Die

Brocardschen Gebilde

und

ihre Beziehungen

zu den

verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks.

Von

Dr. A. Emmerich,
Gymnasiallehrer zu Mülheim a. d. Ruhr.

Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1891.

Vorwort.

Die Geometrie der „Brocardschen Gebilde" reicht mit ihren Anfängen bis in das erste Viertel unseres Jahrhunderts zurück. In einem im Jahre 1816 veröffentlichten Schriftchen: „Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks" *) beschäftigte sich A. L. Crelle eingehend und an erster Stelle mit den Eigenschaften eines vorher nicht bekannten merkwürdigen Winkels und Punktes am Dreieck und legte dadurch den Grund zu Forschungen, die in der Folge durch C. F. A. Jacobi in Pforta und mehrere seiner Schüler (z. B. G. Emsmann) erfolgreich weitergeführt wurden, aber nach Jacobis Tode (1855) wieder in Vergessenheit gerieten. 1875 wurden diese Untersuchungen von neuem ins Leben gerufen durch H. Brocard, der ihr Gebiet erheblich erweiterte. Bald fanden sich zahlreiche Männer, die den Brocardschen Gebilden ihr Interesse zuwandten; auch die Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Elementen des Dreiecks wurden mit in den Kreis der Betrachtung gezogen. Brocard selbst erkannte (1881) die Bedeutung seiner Ergebnisse für die Theorie dreier gleichwendig ähnlichen Figuren. Nicht um eine Reihe interessanter isolierter Sätze handelt es sich jetzt und in der Folge, sondern um die Untersuchung dreier bezüglich der Seiten eines Dreiecks homologen Geraden bezw. Punkte. Von besonderer Fruchtbarkeit erweisen sich hierbei die Fälle, wo die drei Geraden durch die Ecken oder durch *einen*

*) S. die Quellenübersicht.

Punkt laufen bezw. die drei Punkte auf den Mittelloten der Seiten oder auf *einer* Geraden liegen; eine Reihe ausgezeichneter Punkte, Geraden, Kreise des Dreiecks ergeben sich in Gefolgschaft dieser Sonderannahmen, bekannte Gebilde erscheinen in neuer Beleuchtung.

Die vorliegende Schrift sucht diese Forschungen aus den Quellen heraus in elementarem Gewande und nach didaktischen Grundsätzen darzustellen. Gern hätte Verf. auch noch die in den letzten zehn Jahren aufgefundenen Beziehungen zu den Kegelschnitten an geeigneter Stelle eingeflochten; allein es war zu befürchten, dass dadurch bei dem elementaren Charakter der übrigen Partieen die Harmonie des Ganzen gestört worden wäre; auch schien es geboten, bezüglich der zum Verständnisse der Schrift erforderlichen Vorkenntnisse einen einheitlichen Standpunkt festzuhalten. Was diesen letzteren anbelangt, so genügt die Vertrautheit mit den Hauptsätzen der Planimetrie und Trigonometrie, um sich in dem Buche zurechtzufinden. So dürfte sich aus dem einen oder anderen Kapitel Stoff zu zusammenhängenden Übungen entnehmen lassen, der vielleicht zur Verwendung auf den Oberklassen unserer höheren Schulen nicht ungeeignet befunden wird.

Die Benennungen der merkwürdigen Punkte etc. sind die von den beteiligten Forschern gegenwärtig angewandten.*) Allerdings ist mit dieser Nomenklatur der Übelstand verbunden, dass mehrere Elemente nicht den Namen ihres erstmaligen Ergründers, sondern den eines späteren Entdeckers tragen. Als nämlich durch Brocards Arbeiten die Geometrie des Dreiecks einen ungeahnten Aufschwung erhielt, und sich bei der Fülle der Ergebnisse die Einführung kurzer

*) Hierbei ist zu bemerken, dass der Grebesche Punkt seit 1884 im Auslande nach E. Lemoine benannt wird, weil dieser Forscher jenen Punkt (seit 1873) zum Gegenstande zusammenhängender Studien gemacht hat. Die Benennung „Grebescher Punkt“ scheint von Hain (A, 1876) eingeführt zu sein und findet sich seit dieser Zeit in verschiedenen Bänden des Grunertschen Archivs; seit 1883 ist sie von den Mitarbeitern des Aufgaben-Repertoriums der Z. angenommen. S. auch N. C. 1880, S. 214.

Benennungen als notwendig herausstellte, da fand sich niemand, der die Kunde gebracht hätte von einer früheren Litteraturperiode des Gegenstandes, und so wurden die Bezeichnungen „Brocardscher Winkel“, „Brocardsche Punkte“ geschaffen, die seitdem gäng und gäbe geworden sind. (Der „Brocardsche Kreis“ trägt den Namen seines Urhebers.) Erst 1884 bezw. 1886 wurden die bezüglichen Verdienste Crelles wieder ans Licht gezogen,*) aber jetzt wäre eine unliebsame Verwirrung die Folge gewesen, wenn man an den einmal eingebürgerten Namen wieder hätte ändern wollen. Man wird daher „die Ehre, einigen jener Gebilde den Namen gegeben zu haben, füglich Demjenigen gönnen dürfen, der sie thatsächlich erst zum Allgemeingut der Geometer gemacht hat.“ **) Damit nun aber der geschichtlichen Treue kein Abbruch geschehe, hat Verf. auf Grund der bis jetzt bekannten Quellen es unternommen, die Urheberschaft für die wichtigeren Sätze und Formeln aufzuspüren und gehörigen Ortes kenntlich zu machen — eine Arbeit, für deren etwaige die gegenwärtige Periode betreffende Mängel derselbe die Nachsicht und eventuell die gefällige Berichtigung der Kundigen erbittet. Es hat sich ergeben, dass mehrere Sätze, die noch in den letzten Jahren als der Jetztzeit angehörig betrachtet wurden, auf ein früheres Datum zurückzusetzen sind; hier und da fanden sich Dinge — ich erwähne Hellwigs Untersuchungen über die sekundären Dreiecke —, die bis auf den heutigen Tag verschollen waren.

Bezüglich der Bezeichnungen, soweit dieselben nicht im Texte selbst erklärt sind, sei folgendes bemerkt. Die Winkel eines $\triangle$ ABC heissen α, β, γ, seine Seiten a, b, c, sein Inhalt $\triangle$. Die Scheitellinien AP, BP, CP eines Punktes P treffen die Seiten in den Punkten P_α, P_β, P_γ; die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten heissen P_a, P_b, P_c. Insbesondere bezeichnet O den Mittel-

*) S. des Verf. in der Quellenübersicht bezeichnete Abh. (März 1889).

**) M. Cantor in der Ztschr. f. Math. u. Phys. 1890; hist.-litt. Abt. S. 35.

punkt, r den Radius des Umkreises, G den Schwerpunkt, H den Höhenschnittpunkt, F den Mittelpunkt des Feuerbachschen und J den Mittelpunkt des Inkreises.

Den Herren Neuberg, Lemoine, Tucker, Uhlich, Lieber und Bermann sage ich bei dieser Gelegenheit meinen verbindlichsten Dank für die Überlassung wertvollen und selten gewordenen Quellenmaterials, den Herren Buchbinder und Auwers für die Unterstützung, welche sie mir in der Auffindung der von Jacobi (1851) zitierten Schrift von Schulz v. Strasznicki gewährten; auch Herrn Brocard fühle ich mich verbunden für die Liebenswürdigkeit, mit welcher derselbe die Erlaubnis zur (unwesentlich erweiterten) Nachbildung der von ihm gezeichneten Tafel (Beilage zu seiner Abh. vom Jahre 1883) erteilte.

Möge die Schrift zur Verbreitung einer Anzahl bisher zu wenig bekannter elementar-geometrischer Wahrheiten beitragen und zu weiteren Studien über die einfache und an schönen Eigenschaften unerschöpfliche Figur des geradlinigen Dreiecks anregen.

Mülheim a. d. Ruhr, im Mai 1891.

Der Verfasser.

Quellen.

1816. A. L. Crelle, Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien, Berlin.

1825. C. F. A. Jacobi, De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, Numburgi. Schulprogramm von Pforta.

1827. L. C. Schulz von Strasznicki, Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogieen dargestellt, Wien.

1833. Grunert, Supplemente zu Klügels mathematischem Wörterbuch, erste Abteilung, Artikel Dreieck, Leipzig.

1834. C. F. A. Jacobi, Anhänge zu seiner Übersetzung der Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden, betitelt: Elemente der Geometrie, Jena.

1843. C. Adams, Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie, Winterthur.

1846. C. Adams, Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks, Winterthur.

1847. Grebe, Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, betrachtet, A.*)

— H. Hoffmann, In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersteren einen gegebenen Winkel bilden, A.

1853. Reuschle, Mathematische Abhandlung, Stuttgart. Programm des königl. Gymnasiums.

---

*) *Abkürzungen:* A = Archiv der Mathematik und Physik, Greifswald, später Leipzig. — A. f. = Association française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de. — E. T. = Educational Times, London. — J. é. = Journal de Mathématiques élémentaires, Paris. — J. sp. = Journal de Mathématiques spéciales, Paris. — M. = Mathesis, Gent. — N. A. = Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris. — N. C. = Nouvelle Correspondance mathématique, Brüssel. — Q. J. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, London. — Z. = Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig.

1854. **Wiegand**, Ein mathematisches Thema aus der Schule, Halle.
— G. **Emsmann**, Über einen merkwürdigen Punkt im Dreiecke, Halle.
1855. **Hellwig**, Die durchgeschriebenen Kreise und die Kreisternionspunkte des Dreiecks, Halle.
1859. ?, Lady's and Gentleman's Diary, Qu. 1933.
1867. **Wetzig**, Über das Minimum oder Maximum der Summe der positiven und negativen Quadrate der Abstände eines Punktes von drei Geraden einer Ebene, Zeitschr. für Mathematik und Physik, Leipzig.
1873. **Lemoine**, Sur quelques Propriétés d'un Point remarquable du Plan d'un Triangle, A. f. Lyon.
1874. **Lemoine**, Notes sur les Propriétés du Centre des Médianes antiparallèles dans un Triangle, A. f. Lille.
1875. **Chadu**, Lösung einer von Brocard N. A. 1875 gestellten Aufgabe (S. die Einl. zum ersten Kap.), N. A.
1876. **Hain**, Über symmetrische Punktsysteme des Dreiecks, A.
1877. **Eutaris**, Journal de Math. élém. de Vuibert, S. 43.
— **Brocard**, Propriétés du Triangle, N. C.
1879. **Brocard**, Propriétés du Triangle, N. C.
— **Neuberg**, Brief, die von Brocard N. A. 1875 gestellte Aufgabe betreffend, N. C.
1880. **Brocard**, Propriétés du Triangle, N. C.
1881. **Brocard**, Étude d'un nouveau Cercle du Plan d'un Triangle, A. f. Alger.
— **Kiehl**, Zur Theorie der Transversalen, Bromberg. Programm der Realschule.
— **Neuberg**, Sur le Centre des Médianes antiparallèles, M.
1882. **Tarry** et **Neuberg**, Propriétés générales de trois Figures semblables, M.
— **Taylor**, On a six Points Circle connected with a Triangle, Messenger of Mathematics.
1883. **Morel**, Étude sur le Cercle de Brocard, J. é.
— **Brocard**, Nouvelles Propriétés du Triangle, A. f. Rouen.
— **Tucker**, The triplicate-Ratio Circle, Q. J.
1884. **Artzt**, Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises, Recklinghausen. Programm des Gymnasiums.
— **Casey**, A Sequel to Euclid, 3. Aufl.; 4. Aufl. 1886; 5. Aufl. 1888, Dublin.
— **Lemoine**, Théorèmes divers sur les Antiparallèles des Côtés d'un Triangle, M.
— **Neuberg**, Mémoire sur le Tétraèdre, Académie royale de Belgique, Brüssel.
1885. **McCay**, On three Circles related to a Triangle, Royal Irish Academy, Dublin.
— **Lemoine**, Propriétés diverses du Cercle et de la Droite de Brocard, M.

1885. Lemoine, Propriétés relatives à deux Points qui se déduisent d'un Point quelconque comme les Points Ω, Ω' du Point K, A. f. Grenoble.
— Neuberg, Sur le Point de Steiner, A. f. Grenoble.
— Neuberg, Sur les Cercles de Tucker, E. T.
1886. Neuberg, Sur le Point de Steiner, J. sp.
— Lemoine et Neuberg, Notes sur la Géométrie du Triangle, M.
— Casey, On the harmonic Hexagon of a Triangle, Royal Irish Academy, Dublin.
— Artzt, Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind etc., Recklinghausen, Programm des Gymnasiums.
— Schoute, Over een nauwer Verband tusschen Hoek en Cirkel van Brocard, Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam.
— Artzt, Beiträge zur Geometrie des Brocardschen Kreises, Recklinghausen.
1887. Fuhrmann, Der Brocardsche Winkel des Dreiecks, A.
— Emmerich, Konstruktionsaufgaben zur Geometrie des Brocardschen Kreises, Mülheim a. d. Ruhr. Programm des Realgymnasiums
— Neuberg, Transmutations d'un Triangle, M.
— McCay, Sur l'Hyperbole de Kiepert, M.
— Emmerich, Sur les Points du Diamètre de Brocard, M.
— Vigarié, Sur quelques Cercles remarquables, J. é.
— Lemoine, Questions diverses sur la nouvelle Géométrie du Triangle, A. f. Toulouse.
1888. Neuberg, Sur les Triangles équibrocardiens, A. f. Oran.
— Simmons, An Introduction to the recent Geometry of the Triangle in Milne's Companion to the weekly Problem Papers, London.
1889. Gob, Notes de Géométrie recente, Société royale des Sciences de Liège, Brüssel.
— Fuhrmann, Der Brocardsche Winkel, Königsberg i. Pr. Programm des Realgymnasiums auf der Burg.
— Emmerich, Der Brocardsche Winkel des Dreiecks, Mülheim a. d. Ruhr. Programm des Realgymnasiums.

Diesen Schriften sind beizugesellen kleinere Artikel, welche in Form zu beweisender Sätze als Aufgaben (in M., J. é., E. T., Z.) in den letzten 10 Jahren gestellt worden sind. Hervorgehoben seien unter diesen die Beiträge von Artzt, Böklen, Brocard, Fuhrmann, Godt, Kiehl, Stegemann, Stoll und Tarry, welche im Aufgaben-Repertorium der Z. niedergelegt und später im Verein mit Sätzen anderer gleichzeitiger Schriftsteller von Lieber in 3 Programmabhandlungen (Stettin, Progr. des Friedr.-Wilh.-Realgymnasiums, 1886—1888) veröffentlicht wurden. Didaktischen Zwecken dient auch die Schrift von Fuhrmann: Synthetische Beweise planimetrischer Sätze, Berlin 1890, welche im Anhange (S. 115—190) die elementaren Eigenschaften der Brocardschen Gebilde und mit Hülfe der projektiven Geometrie die Beziehungen derselben zu den Kegelschnitten behandelt.

Abkürzungen der Autorennamen.

AD = Adams.	K = Kiehl.
AR = Artzt.	KR = Kücker.[4]
AL = E. van Aubel.[1]	LT = Laisant.
Bö = Böklen.	LE = Lemoine.
BR = Brocard.	LG = de Longchamps.[5]
CY = Casey.	Mc = McCay.
CH = Chadu.	Mo = Morel.
CR = Crelle.	N = Neuberg.
D = Davis.[2]	R = Reuschle.
EH = Emmerich.	SE = Schoute.
EN = G. Emsmann.	Sc = Scott.[6]
F = Fuhrmann.	Ss = Simmons.
GL = Glaser.[3]	SN = Stegemann.
GB = Gob.	SL = Stoll.
GT = Godt.	TY = Tarry.
GE = Grebe.	TL = Taylor.
GR = Grunert.	TC = Tucker.
HA = Hain.	V = Vigarié.
HE = Hellwig.	WE = Wetzig.
Ho = Hoffmann.	WI = Wiegand.
J = C. F. A. Jacobi.	WH = Woolhouse.[7]

[1]) M. 1881 S. 207. — [2]) Simmons S. 110. — [3]) Z. 1890 S. 31. — [4]) Z. 1890 S. 422. — [5]) J. sp. 1886 S. 126. — [6]) Simmons S. 178. — [7]) Lady's and Gentleman's Diary, 1865.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Der Brocardsche Winkel.

Zweites Kapitel.

Die Brocardschen Punkte.

Drittes Kapitel.

Die Lemoineschen Kreise.

Viertes Kapitel.

Die Tuckerschen Kreise; der Taylorsche Kreis.

Fünftes Kapitel.

Die Beikreise.

Sechstes Kapitel.

Der Brocardsche Kreis.

Siebentes Kapitel.

Gleichbrocardische Dreiecke.

Achtes Kapitel.

Die Neubergschen und die McCayschen Kreise.

Ergänzungen.

Zu § 31, Satz 1 vergl. Jacobis Anhänge zu van Swinden, No. 342 und 406; ferner Adams 1843, Satz 42 und Tietz, Über Transversalen No. 23 (Progr. des Lyc. zu Braunsberg 1862).

Zu § 38, 9. Vermittelst des Kiehlschen Satzes (§ 61, 5) erkennt man, dass zu jedem Dreieck zwölf Punkte gehören, deren Fusspunktendreiecke einem gegebenen Dreieck ähnlich sind. Sollen die Fusspunktendreiecke dem Urdreieck ähnlich sein, so kommen noch in Betracht die Zentren der Apollonischen Kreise, die Schnittpunkte ihrer Zentrale mit $O\Omega$ und $O\Omega'$, sowie die Punkte der unendlich fernen Geraden. Diskussion des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks nach diesen Gesichtspunkten!

Berichtigungen.

S. 24 Fig. 9 oben links l. x_b;
S. 37 Z. 12 fehlt am Schlusse der Faktor $\triangle$;
S. 89 Z. 4 v. u. l. Litteratur;
S. 91 Z. 12 v. u. l. HO (statt GH);
S. 93 Z. 4 l. a (statt α).

Die

Brocardschen Gebilde.

Es ist in der That bewunderswürdig, dass eine so einfache Figur, wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist. Wie viele noch unbekannte Eigenschaften anderer Figuren mag es nicht geben!

A. L. Crelle.

Sammlung mathematischer Aufsätze, I 1821, S. 176.

Erstes Kapitel.

Der Brocardsche Winkel.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen über die Brocardschen Figuren bildet die Aufgabe:

Innerhalb eines $\triangle$ ABC *einen Punkt* Ω *so zu bestimmen, dass die durch ihn gezogenen Scheitellinien mit den Seiten in gleicher Reihenfolge denselben Winkel bilden.*

Da die Richtung, in welcher der Umfang des Dreiecks durchlaufen wird, eine zwiefache sein kann — ABCA oder ACBA —, so lässt sich erwarten, dass *zwei verschiedene* Punkte Ω, Ω' der Forderung Genüge leisten, je nachdem

$$\angle\ \Omega AB = \Omega BC = \Omega CA \quad \text{(Fig. 1a) oder}$$

$$\angle\ \Omega' AC = \Omega' CB = \Omega' BA \quad \text{(Fig. 1b)}$$

sein soll.

Fig. 1a.

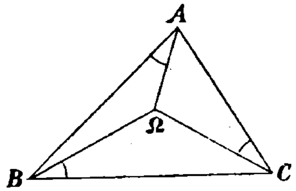
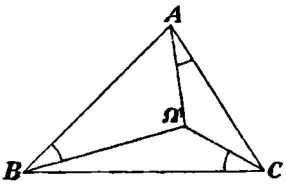


Fig. 1b.



Die Bestimmung des Winkels (ω) in diesen beiden Fällen kann in mehrfacher Weise ausgeführt werden. Entnimmt man der Aufgabe die Folgerungen

$$\angle A\Omega B = 2R-\beta, \quad \angle B\Omega C = 2R-\gamma, \quad \angle C\Omega A = 2R-\alpha,$$

$$\angle A\Omega' C = 2R-\gamma, \quad \angle C\Omega' B = 2R-\beta, \quad \angle B\Omega' A = 2R-\alpha,$$

so gelingt es, die Verhältnisse der Strecken $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ bezw. $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$ untereinander und zu den Seiten des Dreiecks durch Winkelfunktionen darzustellen und zur Herleitung einer Gleichung zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ zu verwerten; unmittelbar ergiebt sich eine solche durch Anwendung des Cevaschen Satzes in der goniometrischen Form. Eine andere Lösung beruht darauf, dass man die Teile, in welche $\triangle ABC$ von Ω bezw. Ω' aus zerfällt, mit dem ganzen Dreieck vergleicht und nachher wieder zusammensetzt. Stets gelangt man hierbei zu reellen Werten für ω, welche bezüglich der Winkel oder Seiten symmetrisch sind, woraus zu folgern, dass die Punkte Ω, Ω' in jedem Dreieck vorhanden sind, und dass den beiden Punkten *derselbe* Winkel ω entspricht. Dieser Winkel heisst der *Brocard*sche. Seine Zeichnung, sein Verhalten in verschiedenen Arten von Dreiecken, sein Maximum, ferner die Grenzen der Dreieckswinkel bei gegebenem ω bilden neben den vorzugsweise trigonometrischen Lösungen der anfangs genannten Aufgabe und manchen damit zusammenhängenden Formeln den Gegenstand dieses Kapitels.

§ 1. Die Grundformel.

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \cot\omega &= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \\ 2)\ \cot\omega &= \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{Cr}).$$

Bem. Der Zusammenhang zwischen 1) und 2) wird vermittelt durch die aus $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$ oder

$$^{*)}\Sigma\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1$$

fliessende Formel

$$(\alpha)\qquad \Sigma\cot\alpha = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^{-1}.$$

1. *Erste Herleitung* (Cr). Wird auf die Dreiecke $B\Omega C$, $C\Omega A$ (Fig. 1a) der Sinussatz angewandt, so ergiebt sich

$$a : C\Omega = \sin\gamma : \sin\omega,$$
$$\underline{C\Omega : b = \sin(\alpha - \omega) : \sin\alpha}$$
$$\sin\alpha : \sin\beta = \sin\gamma\sin(\alpha-\omega) : \sin\alpha\sin\omega,$$

*) Das Summenzeichen Σ dient zur abgekürzten Darstellung symmetrischer Funktionen der Winkel oder Seiten des Dreiecks. In der That genügt es,