

Schulbuch
der
N a u m l e h r e.

Zum Gebrauche der Schüler
in den untern Klassen der Gymnasien und
in Volksschulen.

Von
J. G. Graßmann,
Professor am Gymnasio zu Stettin.

Dritte vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit drei Steindruck-Tafeln, und einer Reihe geometrischer
Aufgaben zur Uebung in der geometr. Construction.

Berlin, 1843.
Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.

V o r r e d e.

In diesem Auszuge der Raumlehre, welcher bestimmt ist, sich in den Händen der Schüler zu befinden, habe ich den, meistentheils ohne Beweis hingestellten Sätzen kurze Hindeutungen auf die Beweise, Anweisung zur Construction der dazu nöthigen Figuren, und Anleitung zu schriftlichen Arbeiten beigefügt. Ich halte diese letztern auch in anderer Beziehung für sehr bildend, für das klare Auffassen der mathematischen Wahrheiten aber besonders nützlich, da ein jeder hier alles nur so fern und so weit hat, als er es aus sich selbst entwickelt hat. Der Lehrer läßt die Arbeit von einigen Schülern vorlesen, und knüpft daran die Wiederholung. Von Zeit zu Zeit läßt er sich die Bücher abgeben, um zu sehen, oballes in Ordnung ist. — Wo die Schüler schon in solchem Uebermaaß mit schriftlichen Arbeiten, insbesondere mit solchen, welche bloß dem Gedächtnisse zu Hülfe kommen sollen, überhäuft sind, daß sich zwischen diesen keine neue mehr eindrängen und keine verdrängen läßt, (ein Zustand, welcher jezt häufig stattfinden mag) da können diese Anleitungen doch noch zur Vorbereitung und Wiederholung dienen; die Construction der Figuren aber ist unerläßlich, da diese hier größtentheils nicht gegeben sind, und da der Schüler die Gesetze, nach

welchen sie entworfen sind, viel sicherer und fester anschaut, wenn er sie selbst gezeichnet hat, als wenn er sie auf der Kupfertafel vorfindet.

Die angehängten Aufgaben sind, wenigstens in der ersten Hälfte, möglichst so geordnet, daß ein talentvoller Schüler die Auflösung, auch ohne Unterricht in der Mathematik gehabt zu haben, finden kann, und auch dem weniger fähigen dieses, mit einiger Nachhülfe von Seiten des Lehrers, gelingen wird. Diese Einrichtung schien nothwendig, um die während der Dauer eines Coursus neu eintretenden Schüler nicht unbeschäftigt zu lassen. Sie machte es nothwendig, eine Aufgabe öfters durch mehre andre einzuleiten, und dabei auch wohl eine früher schon vorgekommene zu wiederholen. Für diejenigen Schüler, welche den Unterricht in der Größenlehre schon gehabt haben, hebt der Lehrer nur die Hauptaufgaben hervor, und läßt diese von ihnen lösen; die übrigen können alle in ihrer Reihenfolge aufgegeben werden, bis zur 94sten. Von den hierauf folgenden Aufgaben (Nr. 96—183), insbesondre von den nicht wörtlich ausgedrückten, streicht der Lehrer jedem Schüler diejenigen, welche er zu lösen hat, mit einem Bleistift an, dem einen diese, dem andern jene, wie sich eben trifft, damit nicht einer vom andern abschreibt, oder vererbte Hefte gebraucht.

Wo die Kinder zu arm sind, um sich durchgängig mit den Büchern zu versehen, kann der Lehrer jede Aufgabe auf ein Octavblatt starken Papiers schreiben, und die nöthigen Linien, Winkel oder Figuren darunter setzen.

Stettin, den 12. April 1826.

J. G. Graßmann.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die kleine Schrift, deren dritte Auflage hier erscheint, ist ein Auszug aus einer größern, welche in den Jahren 1817 und 1824 in der nämlichen Verlags-handlung in 2 Bänden erschienen, und bestimmt ist, in den Händen des Lehrers zu sein, zu welchem Ende sie ausführlichere Entwicklungen, so wie hauptsächlich methodische Anleitungen enthält. Die vorliegende Schrift sollte dagegen das Handbuch der Schüler sein. - Es ist dieses Verhältniß häufig übersehen worden, indem mir Fälle vorgekommen sind, wo Lehrer diesen Auszug jahrelang gebraucht haben, ohne von dem Vorhandensein der größeren Schrift etwas gewußt zu haben. — Die günstige Aufnahme, welche das Schulbuch gefunden hat, legte mir die Pflicht auf, es von Neuem durchzusehen, und wo es nöthig schien zu verbessern und zu vervollständigen. Da es nicht bloß in den untern Classen höherer, sondern vielfältig auch in den mittlern und niedern Schulen eingeführt ist, wo es dann meistens den ganzen darin vorkommenden geometrischen Coursus ausmacht, so schien es zweckmäßig, den Stoff desselben so abzugrenzen, daß es für eine solche Bildungsstufe, wie auf diesen Schulen erreicht werden kann, ausreichend sei. Zu diesem Ende durften die wichtigsten Begriffe und Sätze der Ste-

reometrie, schon ihrer practischen Wichtigkeit wegen, nicht füglich fehlen; sie sind daher dieser Auflage, in Begleitung von Aufgaben und den nöthigen Figuren beigelegt, und von dem Herrn Verleger aufs bereitwilligste und ohne Preiserhöhung aufgenommen. — Ueber die Anwendung, so wie über den Umfang und Gebrauch habe ich mich hinreichend in der Vorrede zum zweiten Bande der oben angeführten Raumlehre erklärt, und kann mich daher darauf beziehen.

Stettin, den 15. Januar 1843.

J. G. Graßmann.

Inhalts-Anzeige.

Allgemeine Vorübungen zur Raumlehre.

I. Rückgang vom Körper zum Punkte	Seite 1
II. Orientirung im Raume. Richtung	2

Erster Theil.

Ebene räumliche Verbindungslehre.

I. Verbindung gr Ln in Beziehung auf die dadurch entstehenden Durchschnittspuncte, Strahlen und Winkel	5
II. Verbindung gr Ln in Beziehung auf die dadurch entstehenden Seiten und Figuren	15
III. Verbindung der Kreise mit gn Ln und unter sich .	21

Zweiter Theil.

Ebene räumliche Größenlehre.

Vorübungen. Anwendung der Verknüpfungen der allgemeinen Größenlehre auf räumliche Gegenstände	24
I. Größenlehre der Winkel	33
Winkel an Einem Punkte	34
Winkel an zwei Punkten	38
Winkel an drei Punkten oder am Dreieck	39
Winkel an vier Punkten oder am Viereck	41
Winkel an Vielecken	42

VIII

II. Größenlehre der Seiten	Seite 44
III. Größenlehre der Seiten und Winkel in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit	44
A. Gegenseitige Bestimmungen zwischen Seiten und Winkeln in einer und derselben Figur	44
Vollkommene Bestimmungen oder Congruenz der Dreiecke	45
Vergleichende Bestimmungen an Dreiecken	46
Gegenseitige Bestimmungen zwischen Seiten und Winkeln in Vierecken	51
Gegenseitige Bestimmungen zwischen Seiten und Winkeln in mehrseitigen, namentlich in regelmäßigen Figuren	52
B. Gegenseitige Bestimmungen zwischen Seiten und Winkeln in mehreren Figuren, oder von der Ähnlichkeit	53
IV. Größenlehre der Flächen	58
V. Vom Kreise	66
Geometrische Aufgaben zur eignen Auflösung mittelst der gn Ln und des Kreises	76
Anhang der wichtigsten Erklärungen und Sätze aus der Körper-Größenlehre oder Stereometrie	103

Vorübungen zur Raumlehre.

Erster Abschnitt.

Rückgang vom Körper zum Punkte.

1. Jedes Ding, was man anfassen kann, ist ein Körper. In der Raumlehre sieht man nur auf den Raum, den jeder Körper einnimmt.

2. Die Größe eines Körpers läßt sich nach 3 Abmessungen (Dimensionen) bestimmen; jeder Körper hat Länge, Breite und Dicke.

3. Die Grenzen der Körper sind Flächen. Eine Fläche hat nur zwei Abmessungen, Länge und Breite, aber keine Dicke.

4. Die Grenzen der Flächen sind Linien. Eine Linie hat nur eine Abmessung, Länge, aber keine Breite und Dicke.

5. Die Grenzen der Linien sind Punkte. Ein Punkt hat gar keine Ausdehnung, weder Länge noch Breite noch Dicke. Er bezeichnet bloß eine gewisse Stelle.

Anleitung zu häuslichen Arbeiten für die Schüler. — Nehmet euch einen Würfel vor und schreibet auf, wieviel Flächen, Linien und Punkte ihr an demselben findet. Dasselbe kann mit einer sechsseitigen Spitzsäule (Pyramide) geschehen.

Würden mehre Punkte aneinandergesetzt eine Linie, mehre Linien nebeneinandergelegt eine Fläche, mehre Flächen aufeinandergelegt einen Körper geben? Warum nicht?

Zweiter Abschnitt.

Richtung.

1. Eine Bewegung hat einen Anfang, eine Bewegungszeit oder eine Dauer, ein Ende, einen Anfangsort, einen Bewegungsraum oder eine Länge, einen Endort, und eine Richtung. — Wir wollen hier vorzüglich nur auf die letztere sehen.

2. Man kann von einem freien Punkte aus nach allen möglichen Richtungen Bewegungen machen. Die Hauptrichtungen, nach dem Stande unsers eigenen Körpers benannt, sind folgende: aufwärts, abwärts, rechts, links, vorwärts, rückwärts.

Welche von diesen Richtungen sind senkrechte, welche wagrechte? welche sind einander entgegengesetzt? — Nach welchen Richtungen geht meine Bewegung, wenn ich den Finger um die gerade vor mir auf dem Tische liegende Tafel bewege, und dabei von der nächsten linken Ecke anfangs und nach der rechten fortschreite u. s. w., bis ich wieder dahin gelange, von wo ich ausgegangen bin? Wie würde es sein, wenn die Tafel vor mir an der Wand hinge? Könntet ihr wohl 3 Stöckchen mit Wachs so aneinander kleben, daß sie nach den 6 Hauptrichtungen zeigten?

Anmerkung für die Kinder. Ihr müßt die Antworten auf die vorgelegten Fragen so aufschreiben, daß man es verstehen kann, wenn man die Frage auch nicht gelesen hat. Z. B. die erste der obigen Fragen beantwortet ihr so: von den 6 Hauptrichtungen, nennt man die Richtungen aufwärts und abwärts senkrechte, die übrigen, nämlich rechts, links, vorwärts und rückwärts nennt man wagrechte.

3. Zwischen den Hauptrichtungen kann man nach folgenden Richtungen Bewegungen machen, welche man Zwischenrichtungen nennt: rechts aufwärts, links aufwärts, vorwärts aufwärts, rückwärts aufwärts, — rechts abwärts, links abwärts, vorwärts abwärts, rückwärts abwärts — rechts vorwärts, links vorwärts, rechts rückwärts, links rückwärts.

Wieviel Zwischenrichtungen liegen um jede Hauptrichtung? Welche Zwischenrichtungen können gerade entgegengesetzt sein? Sind alle Bewegungen gleich gerichtet, welche nach gleichnamigen Zwischen-

richtungen gehen? Wie unterscheiden sich hierin die Zwischenrichtungen von den Hauptrichtungen?

4. Eine Fläche, in welcher man nach allen Seiten Bewegungen machen kann, welche ihre Richtung nicht verändern, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Die Ebene durch die 4 wagrechten Hauptrichtungen heißt die wagrechte Ebene.

5. Die Ebene durch die Hauptrichtungen aufwärts, abwärts, rechts und links, nennen wir die senkrechte seitwärts gehende Ebene.

6. Die Ebene durch die Hauptrichtungen aufwärts, abwärts, vorwärts und rückwärts nennen wir die senkrechte vorwärts gehende Ebene. Die 3 genannten Ebenen heißen Hauptebenen.

Nach welchen Haupt- und Zwischenrichtungen kann man in jeder der drei Hauptebenen Bewegungen machen? In welchen Richtungen durchschneiden sich je 2 derselben? Was für eine Ebene ist die Oberfläche eines ruhig stehenden Wassers? Was für eine Ebene würde die Fronte eines Hauses sein, wenn sie glatt wäre, und man gerade davor stände? was für eine die Siebelfwand? die Decke der Zimmer? das Dach? Könn't ihr wohl 3 runde Stücke Notenpapier so ausschneiden und zusammensetzen, daß sie die drei Hauptebenen vorstellen können.

7. Die Richtungen, welche nicht in den 3 Hauptebenen liegen, nennt man Aussenrichtungen. Es sind folgende: rechts vorwärts aufwärts, links vorwärts aufwärts, rechts rückwärts aufwärts, links rückwärts aufwärts, rechts vorwärts abwärts, links vorwärts abwärts, rechts rückwärts abwärts, links rückwärts abwärts.

Welche Aussenrichtungen liegen um jede Hauptrichtung? welche können einander gerade entgegengesetzt sein? Sind alle Bewegungen nach gleichnamigen Aussenrichtungen gleichgerichtet?

8. Ein geometrischer Punkt hat keine Länge, Breite und Dicke. Einen solchen kann man aber nicht zeichnen. Dem Zeichen eines Punktes giebt man so viel Länge, Breite und Dicke, als nöthig ist, um dem Auge sichtbar zu sein. Eben so muß auch das Zeichen einer Linie, der Strich, nur so viel Breite und Dicke haben als nöthig ist, um es wahrzunehmen.

Wie kann wohl eine Linie aus einem Punkte, das Zeichen einer Linie aus dem Zeichen eines Punktes entstehen? — Zeichnet jeder einige Striche und gebt ihnen nicht mehr Breite als durchaus erforderlich ist, um gesehen werden zu können? Sind das nun geometrische Linien?

9. Wenn ein Punkt sich so bewegt, daß er überall dieselbe Richtung behält, so heißt die Linie, welche seinen Weg bezeichnet, eine gerade; verändert der Punkt nur hin und wieder seine Richtung, so heißt sie eine gebrochene; verändert er überall seine Richtung, eine krumme.

Zeichnet jeder einige gerade, gebrochene und krumme Striche. — Kann ein gebrochener und ein krummer Strich wohl aus mehreren geraden bestehen?

10. Eine Fläche kann sich nur an einem Körper befinden, dessen Grenze sie ist. Ist der Körper beweglich, und eine Fläche desselben eben, so kann man diese in jeder beliebigen Ebene halten. Man denkt sich aber eine solche Fläche, wie z. B. die Schiefertafel, ein Blatt Papier immer in der senkrechten, seitwärts gehenden Ebene und sieht aus den Buchstaben oder Zahlen leicht, welche Seite oben sein muß. Hiernach bezeichnet man die Richtung der in dieser ebenen Fläche gezeichneten Striche als wagrecht, senkrecht, schräg u. s. w.

11. Jeder Strich muß zwar begrenzt sein, man kann sich aber doch unbegrenzte oder unendliche Linien denken. Diese werden künftig immer verstanden, wenn von Linien schlechthin die Rede ist. Zwei oder mehr unendliche Linien können sich nicht in ihrer Länge, sondern allein in ihrer Richtung von einander unterscheiden. Dieß ist daher diejenige Verschiedenheit, nach welcher wir sie nunmehr verknüpfen wollen.

Erster Theil.

Ebene räumliche Verbindungslehre.

Erster Abschnitt.

Verbindung gerader Linien in Beziehung auf die dadurch entstehenden Durchschnittspuncte.

1.

1. Zwei oder mehr g. Ln. (gerade Linien) welche gleiche Richtung haben, nennt man gleichlaufende Linien oder Parallelen; haben sie aber nicht gleiche Richtung, so heißen sie ungleichlaufende.

2. Gleichlaufende Linien können sich nirgend durchschneiden.

Zeichnet jeder einige Paare gleichlaufender, und auch einige Paare ungleichlaufender Striche. — Wenn sich 2 Striche durchschneiden, können sie dann wohl gleichlaufend sein? Wenn sich 2 gerade Striche nicht durchschneiden, sind sie darum gleichlaufend?

2.

Aufgabe. Es ist eine gewisse Anzahl von Linien gegeben, welche theils gleichlaufend, theils ungleichlaufend sind. Man soll alle möglichen Fälle des Gleichlaufens und Ungleichlaufens auffuchen und zusammenstellen.

Beisp. Wenn 5 g. Ln theils gleichlaufend, theils ungleichlaufend sind, so können folgende Fälle stattfinden. Es können sein

- | | | | | | | |
|----|----------|---|---------------|--------|---|--|
| 1. | entweder | 4 | gleichlaufend | und | 1 | ungleichlaufend, |
| 2. | oder | 3 | = | = | 2 | = |
| 3. | = | 2 | = | = | 3 | = |
| 4. | = | 2 | gld. u. | wieder | 2 | und 1 |
| 5. | = | 3 | = | = | 2 | gleichlaufend, aber mit den vorigen ungleichlaufend. |

Welche Fälle können bei 6 und 7 g. Ln stattfinden? Nach wievielen Richtungen können 9 g. Ln höchstens gleichlaufend sein? Wieviel g. Ln sind wenigstens erforderlich, um gleichlaufende nach 5 Richtungen zu haben?

Durchschnittspuncte.

3.

1. Zwei g. Ln können sich nur in Einem Puncte durchschneiden, und sind dann ungleichlaufend.

2. Sind mehr als 2 g. Ln vorhanden, so läßt sich die höchste Anzahl von Durchschnittspuncten finden, wenn man annimmt, daß eine jede von jeder der übrigen durchschnitten werde.

Aufgabe. Wieviel Durchschnittspuncte können 4 g. Ln höchstens haben?

Aufl. 1. Denkt man sich zuerst 2 g. Ln, so können sich diese nur in 1 Puncte durchschneiden. Kommt nun die dritte g. L. hinzu, so kann sie jede von den beiden vorhandenen nicht öfter als einmal durchschneiden, und es entstehen also 2 neue Durchschnittspuncte. Kommt endlich die vierte g. L. hinzu, so kann sie jede der 3 vorhandenen nur einmal durchschneiden, also nur 3 neue Durchschnittspuncte hervorbringen. Es werden also überhaupt aus dem Durchschnitt von 4 g. Ln nicht mehr als $1 + 2 + 3 = 6$ Durchschnittspuncte entstehen können.

Aufl. 2. Wenn sich 4 g. Ln in der höchsten Anzahl von Puncten durchschneiden, so durchschneidet jede die 3 übrigen. In jeder stehen also 3 Durchschnittspuncte, und da 4 Linien vorhanden sind, so würde man auf solche Weise $4 \cdot 3 = 12$ Durchschnittspuncte zählen. Allein jeder Punct steht in 2 Linien zugleich, und ist also zweimal gezählt. Will ich also die richtige Anzahl von Durchschnittspuncten haben, so muß ich von der vorhin gefundenen Zahl die Hälfte nehmen. Die richtige Anzahl der Durchschnittspuncte ist daher $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Dieselbe Auflösung ist nun für eine andre beliebig zu wählende Anzahl von Linien auszuführen, und mit einer Zeichnung zu begleiten.

Wieviel Durchschnittspuncte können 5, 6, 7, 8, 9, 10 g. Ln höchstens haben? — Auch für einige größere, beliebig zu wählende Mengen von Linien ist die größte Anzahl von Durchschnittspuncten zu bestimmen, jedoch ohne ausführliche Auflösung.