Mathematische Mußestunden

PROF. DR. HERMANN SCHUBERT

Mathematische Mußestunden

Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur

Neubearbeitet von

JOACHIM ERLEBACH

Zwölfte Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner Veit & Comp.

Berlin 1964

Ludendo Discimus

Leibniz

VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Die vorliegende Sammlung ist für gebildete Laien bestimmt, denen von der Arithmetik nur die allerersten Elemente bekannt zu sein brauchen. Sie behandelt, ähnlich wie die Sammlungen von Edouard Lucas[1]) und Rouse Ball[2]), historisch und kritisch die wichtigsten von den zur *Unterhaltung* geeigneten Geduldspielen und Problemen mathematischer Natur. Wenn auch der Verfasser die Sammlungen von Lucas und Ball vielfach benutzt hat, so ist doch der größte Teil der in der vorliegenden Sammlung angestellten Erörterungen aus eigenen Studien des Verfassers hervorgegangen. Von Büchern mit ähnlichem Inhalt aus älterer Zeit ist in erster Linie das von Bachet de Méziriac[3]) zu nennen. Vor Bachet behandelten Unterhaltungsaufgaben Cardano[4]) und Tartaglia[5]), nach Bachet Oughtred[6]) und Ozanam[7]). Die in unserem Jahr-

---

1) Edouard *Lucas*, Récréations mathématiques, Paris 1882. Ferner: Lucas, L'Arithmétique amusante, Paris 1895, nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. Delannoy, C. A. Laisant und E. Lemoine.

2) W. W. Rouse *Ball*, Mathematical recreations and problems of past and present times, London 1892.

3) *Bachet de Méziriac*, Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Erste Auflage: Paris 1612; zweite Auflage: Lyon 1624; dritte und vierte, von Labosne vermehrte und verbesserte Auflage: Paris 1874 und 1879.

4) *Cardano*, De subtilitate libri XXI, Nürnberg 1550.

5) *Tartaglia*, Quesiti et inventioni diverse, Venetia 1554; Trattato de numeri e misure, Venetia 1556; Opere, Venetia 1606.

6) *Oughtred*, Mathematical recreations, London 1653.

7) *Ozanam*, Récréations mathématiques et physiques, Paris 1694, mit vielen vermehrten und verbesserten Auflagen, z. B. 1723, 1803, 1840.

hundert in Deutschland erschienenen Bücher von Montag[8]), Mittenzwey[9]) und anderen enthalten zwar viele Unterhaltungsaufgaben, geben aber keine mathematische Kritik der Probleme. Nur die vom Verfasser in den Jahren 1893—1895 in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" unter dem Namen „Mathematische Spielereien" veröffentlichten Artikel[10]) enthalten schon eine, wenn auch nicht sehr eingehende, mathematische Kritik der dort behandelten Geduldspiele.

Hamburg, November 1897

Hermann Schubert

---

[8]) *Montag*, Die Wunder der Arithmetik, Leipzig.

[9]) *Mittenzwey*, Mathematische Kurzweil, 3. Auflage, Leipzig 1895.

[10]) Diese Artikel sind auch, in einem Büchlein zusammengefaßt, für sich erschienen unter dem Titel „Zwölf Geduldspiele" Berlin 1895 (jetzt Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin).

VORWORT ZUR ZWÖLFTEN AUFLAGE

Nach dem Tode des Hamburger Mathematikers Prof. Dr. Hermann Schubert wurden seine schon in Jahrzehnten bewährten „Mathematischen Mußestunden“ von Prof. Dr. F. Fitting in überarbeiteter Form herausgegeben. Von ihm wurden vor allem das Rundreiseproblem allgemeiner behandelt und die Paragraphen über das Sternsechseck und über die 30 bunten Würfel des Majors MacMahon neu aufgenommen.

In die jetzt vorliegende 12. Auflage wurden einige weitere Probleme einbezogen, nämlich die Abschnitte über Zahlenlotto, Permutationen und Toto. Auch ein Paragraph über die klassischen mathematischen Probleme wurde hinzugefügt. Die Paragraphen 4, 12, 13 und 18 sind in wesentlichen Teilen geändert worden, während die Abschnitte über magische Quadrate, Sternsechsecke und Rösselsprünge um einige sehr spezielle und den Rahmen dieses Buches sprengende Untersuchungen des Vorbearbeiters gekürzt wurden.

Bedenkt man, daß der ursprüngliche Text des Buches vor nahezu sieben Jahrzehnten verfaßt wurde, so wird verständlich, daß die Sprachentwicklung zahlreiche stilistische Änderungen notwendig machte; desgleichen waren Änderungen der benutzten mathematischen Terminologie erforderlich. Einige Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten konnten bei der Bearbeitung für diese Neuauflage beseitigt werden.

Möge dieses Buch, das sich vor allem an den interessierten Laien wendet, recht viele unterhaltsame Mußestunden bereiten.

Berlin, November 1963

Joachim Erlebach

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1

ZAHLENLOTTO

Ein *Volltreffer im Zahlenlotto* — Hunderttausende erhoffen Woche für Woche, daß Fortuna ihr Füllhorn über sie ergießen möge. Viele Millionen Mark werden umgesetzt und einige Glückspilze gewinnen dabei das Millionenfache ihres Einsatzes.

Das System ist einfach: unter den 49 Zahlen von 1 bis 49 sind sechs anzukreuzen. Wer die später ausgelosten Zahlen auf seinem Lottozettel richtig angekreuzt hat und an der Auslosung beteiligt ist, dem winkt der Gewinn einer halben Million Mark.

Um die Gewinnchancen zu verbessern, wurde die *Zusatzzahl* eingeführt. Hat von den Teilnehmern niemand alle sechs Zahlen richtig getippt, so geht die Chance des Hauptgewinns auf diejenigen Lose über, bei denen fünf der sechs richtigen Zahlen angekreuzt wurden, während die sechste mit einer getrennt ausgelosten Zusatzzahl übereinstimmt. Weitere Gewinne werden für jedes Los mit fünf, vier oder drei richtigen Zahlen ausgeschüttet.

Viele Spieler versuchen, ein System zu entdecken, bei dessen Benutzung die Gewinnchancen steigen oder der Gewinn zur Gewißheit wird. Geheimtips werden ausprobiert und „sichere Systeme“ werden propagandiert oder gar gegen Geld weitergegeben. Wer einen „todsicheren Lottotip“ verkauft, ist ein Betrüger. Wäre der Tip sicher, so könnte der Erfinder ihn selbst verwerten und brauchte ihn nicht zu verkaufen.

Es gibt nur eine einzige „todsichere“ Methode, sechs Richtige zu haben und den Hauptgewinn kassieren zu können. Doch dazu müßte man genau 13983816 Tipscheine verschieden ausfüllen und zugleich abgeben. Unter diesen wären dann garantiert, gleichgültig welche sechs Zahlen die Ziehung ergäbe,

1 *Sechsertreffer*,
258 *Fünfer*, davon 6 mit der Zusatzzahl,
13545 *Vierer* und
246820 *Dreier*.

Einfache, aber sichere Systeme, mit deren Hilfe unter geringem Einsatz unverhältnismäßig hohe Gewinne zu erzielen sind, gibt es nicht, jedenfalls nicht, wenn alle 49 Zahlen in gleicher Weise bei der Verlosung teilnehmen und eine Manipulation der Ziehung durch geeignete Vorkehrungen verhindert wird.

* * *

Wir wollen zunächst begründen, daß keine Zahlenfolge von 6 Zahlen, im folgenden als *Kombination* bezeichnet, bei der Ziehung größere Chancen besitzen kann als irgendeine andere. Das oft benutzte Argument, es sei undenkbar, daß so ausgefallene Kombinationen wie 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 10, 15, 20, 25, 30, 35 oder andere auffallende Anordnungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufträten wie andere, willkürlicher zusammengestellte, ist nicht stichhaltig.

Um zu zeigen, daß zwei Kombinationen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ und $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ (z. B. die Kombinationen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 4, 7, 17, 29, 33, 41) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, tragen wir auf 49 Pappscheiben gleicher Beschaffenheit die Zahlen von 1 bis 49 in irgendeiner Farbe, etwa in rot, auf. Danach suchen wir uns die Marken $a_1, \ldots, a_6$ heraus und schreiben auf die Rückseiten in anderer, etwa in blauer Farbe die Zahlen $b_1, \ldots, b_6$. Die übrigen 43 Marken versehen wir in beliebiger Anordnung mit den verbleibenden 43 Zahlen. Nehmen wir jetzt mit den so präparierten Marken eine Verlosung vor, so erhalten wir jeweils zwei Gewinnkombinationen, nämlich eine der roten Zahlen und, nachdem wir die Marken umgedreht haben, eine der blauen. Eine Auslosung der roten Zahlen $a_1, \ldots, a_6$ ergibt zwangsläufig zugleich die blauen Zahlen $b_1, \ldots, b_6$ und umgekehrt. Damit ist die Chancengleichheit aller Zahlenkombinationen von 6 aus 49 Zahlen bewiesen. Das Zahlenlotto ist daher ein völlig gerechtes Spiel, gerecht in dem Sinne, daß vor der Verlosung keine Zahlenkombination günstiger ist als irgendeine andere.

* * *

Ein Spieler gibt wöchentlich 100 Tipscheine ab. Er verändert immer wieder die Zahlenkombinationen, so daß niemals eine Kombination erscheint, die schon einmal dabei war. In den 52 Wochen eines Jahres kommen schon 5200 verschiedene Kombinationen zustande. Dennoch könnte weder er noch einer seiner das Spiel fortsetzenden Söhne, Enkel oder Urenkel alle Möglichkeiten erschöpfen. Erst nach mehr als 2689 Jahren wären alle denkbaren Kombinationen gespielt. Es gibt nämlich genau 13983816 Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen; nur eine davon ist jeweils die „richtige“.

Zur Berechnung dieser großen Anzahl von Möglichkeiten ist keineswegs ein besonderes Maß an mathematischen Kenntnissen erforderlich.

Nehmen wir einen Tipschein zur Hand! Schon beim ersten Ankreuzen haben wir 49 Möglichkeiten zur Auswahl. Entscheiden wir uns für irgendeine der Zahlen und bezeichnen sie allgemein mit a_1, so verbleiben für die weitere Auswahl noch 48 Zahlen. Zu jeder der 49 Möglichkeiten bei der Wahl der ersten Zahl a_1 gehören 48 Möglichkeiten bei der Wahl der zweiten Zahl a_2, das ergibt insgesamt bereits $49 \cdot 48$ Zahlenpaare a_1, a_2. Zu jedem der $49 \cdot 48$ Zahlenpaare a_1, a_2 stehen uns für die dritte Stelle 47 verbleibende Zahlen zur Auswahl. Damit haben wir $49 \cdot 48 \cdot 47$ Anordnungen dreier Zahlen a_1, a_2, a_3. Bei jedem dieser Zahlentripel stehen jetzt 46 weitere Zahlen für den vierten Platz zur Verfügung. Folgerichtig weiterschließend erhalten wir insgesamt

$$Z = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$$

Anordnungen $a_1, \ldots, a_6$ von je sechs verschiedenen der 49 Zahlen.

Bei den so erhaltenen Anordnungen handelt es sich aber nicht um durchweg verschiedene Kombinationen. Schon bei der Auswahl der ersten beiden Zahlen haben wir z. B. die Paare $a_1, a_2, = 31, 14$ und $a_2, a_1 = 14, 31$ unterschieden. In der Anzahl Z sind alle Anordnungen getrennt gezählt, bei denen gleiche sechs Zahlen nur in verschiedener Reihenfolge auftreten.

Beispielsweise müssen die Kombinationen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = 48, 3, 19, 24, 12, 36$$
und $$a_3, a_5, a_1, a_6, a_2, a_4 = 19, 12, 48, 36, 3, 24$$

als gleich angesetzt werden. Somit stimmt jede der Z Anordnungen, da die Reihenfolge der sechs Zahlen beim Lotto keine Rolle spielt, mit einer gewissen Anzahl anderer überein. Wollen wir die Anzahl der wirklich verschiedenen Kombinationen gewinnen, so müssen wir unsere Zahl Z durch die Anzahl der jeweils gleichen Anordnungen dividieren. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß es genau $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ verschiedene Anordnungen 6 gleicher Zahlen gibt.

Als Anzahl der Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen gewinnen wir damit

$$Z_6^{49} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816.$$

Verallgemeinern wir das Ergebnis: Es seien n Zahlen gegeben, aus denen k in beliebiger Reihenfolge auszusuchen sind. Bezeichnen wir die Anzahl der Möglichkeiten mit Z_k^n, so ist[1])

$$Z_k^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot k} = \binom{n}{k}.$$

Beim früher üblichen Lottospiel galt es, 5 aus 80 Zahlen auszusuchen. Hierbei gab es

$$Z_5^{80} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 24040016$$

verschiedene Kombinationen.

* * *

Beim üblichen Zahlenlotto gibt es 13983816 verschiedene Kombinationen. Eine einzige wird durch die Ziehung ausgewählt. Die Chance des Hauptgewinns beträgt daher

1:13983816.

Wenn man es recht bedenkt, so ist es ein fast hoffnungslos erscheinendes Unterfangen, auf einen Volltreffer zu warten. Dennoch kommt ein solcher bei der großen Zahl der Spieler bzw. der abgegebenen Tipzettel immer wieder vor. Auf etwa 1,4 Milliarden abgegebene Lottoscheine entfallen durchschnittlich 100 Volltreffer. Wieviel es genau sind oder wie oft

---

[1]) Der exakte Beweis für diese Formel läßt sich durch vollständige Induktion führen (Schluß von n auf $n + 1$).

ein solcher auftritt, ist nicht vorherzusagen. Alle Aussagen hierüber sind statistischer Natur. Da nicht alle abgegebenen Tips untereinander verschieden sind, kann man nur angeben, daß auf rund 14 Millionen Tips im Durchschnitt ein Volltreffer zu erwarten ist. Es können durchaus auch mal mehrere sein, ebenso wie es möglich ist, daß bei einer noch größeren Anzahl gar keiner dabei ist.

Beim Zahlenlotto gibt es aber, ebenso wie bei anderen Lotterien, nicht nur den Hauptgewinn.

Wie sind die Chancen für den nachrangigen Gewinner? Zunächst untersuchen wir die einfachen *Fünfer*, das sind die Kombinationen, bei denen fünf der sechs Zahlen richtig, eine jedoch falsch getippt wurde. Der Sechser wird nicht mitgezählt, er ist ein „unechter" Fünfer.

Bezeichnen wir die ausgelosten sechs Zahlen allgemein mit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, die übrigen mit b, so erkennt man, daß es sechs Arten von Fünfern gibt, je nachdem, welche der Zahlen $a_1, \ldots, a_6$ fehlt:

$$\begin{array}{cccccc}
b, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6; \\
a_1, & b, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6; \\
a_1, & a_2, & b, & a_4, & a_5, & a_6; \\
a_1, & a_2, & a_3, & b, & a_5, & a_6; \\
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & b, & a_6; \\
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & b.
\end{array}$$

In jedem der sechs Fälle kommt als Zahl b eine der 43 Nicht-Gewinnzahlen, der falschen, in Frage.

Unter allen möglichen Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen gibt es demzufolge $6 \cdot 43 = 258$ Anordnungen, die genau fünf richtige Zahlen enthalten. Auf etwa 54201 Tips entfällt durchschnittlich ein Fünfer.

Seltener sind die *Fünfer mit Zusatzzahl.* Hierfür muß an Stelle der Zahl b in den sechs angegebenen Fünfer-Arten eine ganz bestimmte Zusatzzahl treten. Unter den 258 Fünfern gibt es daher sechs Fünfer mit Zusatzzahl.

Der nächste Rang der Vierer-Treffer ist schon wesentlich leichter zu erreichen.

Die ausgelosten Zahlen $a_1, \ldots, a_6$ bezeichnen wir als *Richtige*, die verbleibenden 43 Zahlen $b_1, \ldots, b_{43}$ als *Falsche*.

Ersetzt man zwei der sechs Richtigen durch zwei der 43 Falschen, so ergibt sich der echte *Vierer*. Sollen zwei der sechs Zahlen $a_1, \ldots, a_6$ ausgestrichen werden, so gibt es hierfür nach vorangehenden Überlegungen

$$Z_2^6 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

Möglichkeiten. Andererseits stehen

$$Z_2^{43} = \frac{43 \cdot 42}{1 \cdot 2} = 903$$

aus den 43 falschen Zahlen gebildete Ersatzpaare zur Verfügung. Unter allen denkbaren Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen befinden sich demzufolge $15 \cdot 903 = 13545$ echte Vierer. Durchschnittlich jeder 1032. Tip erbringt einen Vierer-Gewinn.

Für die unterste Gewinnklasse sind drei Richtige erforderlich. Eine entsprechende Kombination ergibt sich, wenn drei Richtige gestrichen und durch drei Falsche ersetzt werden.

Für das Streichen von drei der sechs Richtigen ergeben sich 20 verschiedene Fälle:

$$Z_3^6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Zum Ersetzen sind drei der 43 falschen Zahlen auszuwählen:

$$Z_3^{43} = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12341.$$

In jedem der 20 Fälle können die gestrichenen Zahlen auf 12341-fache Weise ersetzt werden. Damit ergeben sich im untersten Rang

$$20 \cdot 12341 = 246820$$

Gewinnkombinationen. Etwa jeder 57. Tip führt zum Gewinn mit drei Richtigen.

Die Gewinnchancen beim Zahlenlotto sind damit erschöpft. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich auf gleiche Weise die Anzahl der Kombinationen mit 2, 1 oder 0 Richtigen ermitteln läßt.

Man erhält:

$$\begin{aligned} Z_4^6 \cdot Z_4^{43} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 15 \cdot 123410 \\ &= 1851150 \end{aligned}$$

als Anzahl der Kombinationen mit genau zwei Richtigen. Durchschnittlich jeder siebente Tip enthält zwei Richtige.

$$\begin{aligned} Z_5^6 \cdot Z_5^{43} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= 6 \cdot 962598 \\ &= 5775588 \end{aligned}$$

aller Kombinationen enthalten genau eine richtige Zahl.

Um die Anzahl der *totalen Nieten* zu bestimmen, d. h. der Anordnungen aus nur falschen Zahlen, nimmt man die Anzahl der Kombinationen von 6 aus 43 Elementen

$$Z_6^{43} = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 6096454.$$

Nicht einmal jede zweite Kombination enthält ausschließlich falsche Zahlen.

Stellen wir die Ergebnisse zusammen und addieren alle Zahlen, die wir für die einzelnen Ränge erhalten haben, so muß die Anzahl sämtlicher Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen das Ergebnis sein:

6096454	Kombinationen enthalten 0 von 6 Richtigen
5775588	Kombinationen enthalten 1 von 6 Richtigen
1851150	Kombinationen enthalten 2 von 6 Richtigen
246820	Kombinationen enthalten 3 von 6 Richtigen
13545	Kombinationen enthalten 4 von 6 Richtigen
258	Kombinationen enthalten 5 von 6 Richtigen
1	Kombination enthält alle 6 Richtigen
13983816	Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen sind möglich.

§ 2

PERMUTATIONEN

Im vorigen Kapitel wurde davon Gebrauch gemacht, daß sich 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen lassen. Allgemein gibt es für n verschiedene Dinge (*Elemente*) genau

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot (n - 1) \cdot n$$

verschiedene Anordnungen (*Permutationen*)[1]).

Es verabredet z. B. eine Schar von elf Jungen, in ständig wechselnder Anordnung als Fußballmannschaft anzutreten. Sie werden jedoch niemals alle denkbaren Anordnungen ausprobieren können. Es gäbe nämlich

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 39916800$$

verschiedene Aufstellungen, die sich selbst in tausend Jahren nicht durchspielen ließen.

Wie kommt diese große Zahl zustande? Jeder der elf Spieler könnte Torwart sein, in jedem Falle gäbe es zehn Anwärter auf den Platz des linken Verteidigers. Damit sind bereits $11 \cdot 10$ Möglichkeiten der Anordnung gegeben. In jeder von diesen Aufstellungen müssen die übrigen neun Spieler je einmal den Platz des rechten Verteidigers einnehmen, womit sich $11 \cdot 10 \cdot 9$ Spiele ergäben. Für die Position des Mittelläufers stehen dann jeweils acht Anwärter zur Verfügung. Folgerichtig weiterschließend erhält man die 11! Permutationen der elf Spieler.

* * *

---

[1]) Der Beweis hierzu läßt sich durch vollständige Induktion führen.

Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es für eine sechsköpfige Familie? Die Antwort lautet:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Zwei Jahre lang kann sich diese Familie täglich in anderer Ordnung zu Tisch setzen. Acht Personen dagegen könnten schon nicht mehr alle Permutationen ausprobieren, denn es ist $8! = 40320$.

Die Anzahl der Anordnungen wird jedoch erheblich geringer, wenn zusätzlich gewisse erschwerende Bedingungen gestellt werden.

Handelt es sich bei den acht Personen um vier Damen und vier Herren und wird ferner verlangt, sie sollten eine *bunte Reihe* bilden, so daß zu beiden Seiten jeder Dame ein Herr sitzt, schrumpft die Anzahl der Sitzordnungen erheblich zusammen.

Zur Lösung dieses Problems nehmen wir an, es seien $2n$ Personen, nämlich n Damen und n Herren anwesend. Ließe man zunächst die n Damen ihre Plätze einnehmen, wobei wir annehmen wollen, die Plätze seien von 1 bis $2n$ numeriert und den Damen stünden die Plätze mit geraden Nummern zur Verfügung, so gäbe es für die n Damen genau $n!$ mögliche Sitzordnungen. In jedem dieser $n!$ Fälle könnten sich die Herren in $n!$ verschiedenen Anordnungen auf die Plätze mit ungeraden Nummern setzen. Damit ergeben sich $(n!)^2$ verschiedene Sitzordnungen. Da aber auch den Damen die Plätze mit ungeraden Nummern und den Herren die mit geraden Nummern zugeordnet werden können, erhalten wir als Gesamtergebnis

$$2 \cdot (n!) \cdot (n!) = 2 \cdot (n!)^2$$

mögliche Sitzordnungen. Für vier Damen und vier Herren wären das $2 \cdot (4!) \cdot (4!) = 2 \cdot 24 \cdot 24 = 1152$ verschiedene Tischordnungen gegenüber $8! = 40320$ bei völlig freier Anordnung.

* * *

Nimmt man ein Spiel von 32 Karten zur Hand, so können diese Karten in 32! verschiedenen Anordnungen übereinander liegen. Bei einem Skatspiel ist für den einzelnen Spieler die Anordnung der in seiner Hand befindlichen Karten unwesentlich. Jeder Spieler kann seine 10 Karten auf 10! verschiedene Arten in der Hand ordnen. Je 10! Permutationen der 32 Karten führen daher zur gleichen Verteilung. Dies gilt für alle drei Spieler. Schließlich lassen sich die beiden abseits gelegten Karten miteinander vertauschen, ohne die Verteilung zu ändern. Es gibt daher

$$\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} = 2\,753\,294\,408\,504\,640$$

Kartenverteilungen beim Skat.

Bei etwa 23,8% aller Skatspiele liegt mindestens ein Bube im Skat. Es gibt nämlich

$$Z_2^{32} = \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 496$$

verschiedene Skatpaare[1]), aber nur

$$Z_2^{28} = \frac{28 \cdot 27}{1 \cdot 2} = 378$$

Skatpaare, wenn kein Bube dabei sein soll. Auf durchschnittlich 496 Kartenverteilungen entfallen daher 118, das sind 23,8%, bei denen mindestens ein Bube im Skat liegt.

Nur weniger als 4 Millionen Spiele (der 700millionste Teil aller Spiele) sind so beschaffen, daß einer der Mitspieler über alle elf Trümpfe verfügen kann.

Viel größer als beim Skatspiel ist die Zahl aller denkbaren Verteilungsmöglichkeiten beim Whistspiel, bei welchem 52 Karten unter 4 Mitspieler verteilt werden, so daß jeder 13

[1]) Zu der Anzahl der Kombinationen vgl. § 1.

Karten erhält. Die gesuchte Zahl ergibt sich durch Berechnung des Ausdrucks:

$$\frac{52!}{13!\ 13!\ 13!\ 13!}.$$

Man erhält:

53644 Quadrillionen
und 737765 Trillionen
und 488792 Billionen
und 839237 Millionen
und 440000.

Von der Größe dieser Zahl gibt vielleicht das folgende Beispiel eine Vorstellung. Wenn die ganze Erdoberfläche, einschließlich aller Gebirge und Ozeane, mit Whisttischen so besetzt werden könnte, daß der Tisch nebst den 4 Spielern immer nur 1 qm bedeckte, und wenn dann an jedem dieser Tische unaufhörlich Whist gespielt würde, und zwar immer in je 5 Minuten 1 Spiel, so würde es länger als 1000 Millionen Jahre dauern, ehe auf dieser nur mit Whisttischen bedeckten Erde jede denkbare Verteilungsart der 52 Karten durchgespielt wäre.

Ein ähnliches Problem wie das der Kartenverteilungen ist das folgende. Bei einer kleinen Abendgesellschaft werden zwei Bonbonnieren, drei Konfektschachteln und vier Parfümfläschchen unter den anwesenden neun Damen verlost. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

Wir lösen das Problem allgemein und setzen $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$. Wären alle Gewinne verschieden, so gäbe es $n! = 9!$ Verteilungsmöglichkeiten. Unter diesen $n!$ Permutationen führen jedoch alle diejenigen zu der gleichen Verteilung, bei denen nur die k gleichen Elemente erster Art untereinander vertauscht werden. Da es $k!$ solcher Vertauschungen gibt, bleiben noch $\frac{n!}{k!}$ Verteilungen übrig. Auch eine Vertauschung der l gleichen Elemente zweiter Art führt zu keiner neuen Verteilung, so daß die Anzahl der Möglichkeiten auf $\frac{n!}{k! \cdot l!}$ schrumpft. Eine entsprechende Überlegung gilt auch für die m Elemente dritter Art, und wir erhalten schließlich als Resultat

$$\frac{n!}{k! \cdot l! \cdot m!}$$

In unserem speziellen Beispiel ergeben sich daher

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$$

verschiedene Möglichkeiten für das Verteilen der Gewinne.

§ 3

TOTO

Ein auf den ersten Blick ähnliches Problem wie beim Zahlenlotto, in mathematischer Sicht jedoch völlig anderes, finden wir beim Fußballtoto. Die Aufgabe besteht darin, für eine gewisse Anzahl von Spielen den Ausgang vorherzusagen. Bei einem Spiel einer Mannschaft a gegen eine Mannschaft b interessiert hier weniger das Torverhältnis, als vielmehr die Frage, ob a gewonnen und b verloren, ob b gewonnen und a verloren, oder ob schließlich das Spiel unentschieden blieb.

Es treten n Mannschaften $a_1, \ldots, a_n$ gegen je eine von n anderen Mannschaften $b_1, \ldots, b_n$ an. Ein Sieg einer a-Mannschaft werde durch eine 1, ein Sieg einer b-Mannschaft durch eine 2, ein unentschiedenes Spiel durch eine 0 gekennzeichnet. Jede Folge von n Ziffern 1, 2 oder 0 in beliebiger Reihenfolge stellt einen Tip dar, so z. B. für $n = 10$ Spiele die Folge

$$2, 1, 1, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 1.$$

Wir können hier nur berechnen, wie viele verschiedene Tips es bei n Spielen gibt, ohne daß die verschiedenen Tips als gleichwertig angesehen werden können. Anders als beim Zahlenlotto sind hier die verschiedenen Möglichkeiten nicht gleich wahrscheinlich, da der Ausgang eines Fußballspiels kein Zufallsergebnis ist, sondern von den einzelnen Spielern und der Güte ihrer Mannschaft abhängt.

Betrachten wir zunächst das erste der angesetzten Spiele, so haben wir uns für 1, 0 oder 2 zu entscheiden. In jedem der drei Fälle gibt es drei Möglichkeiten für das zweite Spiel, das sind $3 \cdot 3 = 3^2$ verschiedene Tips. Für jeden dieser Tips stehen die drei Zahlen 1, 0 oder 2 für das dritte Spiel zur Auswahl. Wir erhalten $3^3 = 27$ verschiedene Tips bei drei Spielen. Folgerichtig weiterschließend ergeben sich insgesamt genau

$$Z = 3^n$$

verschiedene Tipmöglichkeiten bei n Spielen.

Bei neun angesetzten Spielen lassen sich daher $3^9 = 19683$, bei dreizehn Spielen $3^{13} = 1594323$ verschiedene Tipzettel ausfüllen.

§ 4

ÜBER SEHR GROSSE ZAHLEN

Im Innern von Australien ebensowohl wie im Innern von Südamerika gibt es Völkerschaften, welche Zahlen, die größer sind als 2 oder 6, in ihrer Sprache nicht auszudrücken vermögen, weder durch besondere Zahlwörter noch durch Zusammensetzung von Wörtern für kleinere Zahlen, noch auch durch Umschreibungen. Solche Völker haben überhaupt nicht das Bedürfnis, Zahlen, die größer sind, als wesentlich verschieden aufzufassen. So erzählt Herr von den Steinen von den Bakaïri, die am Xingu, einem Nebenflusse des Amazonenstromes, wohnen, daß sie Zahlen von 1 bis 6 durch Zusammensetzen auszudrücken vermögen, daß sie aber, veranlaßt, noch größere Zahlen zu nennen, sich in die Haare fassen, um dadurch etwas Unzählbares auszudrücken. So wird ferner von den Botokuden, die auch in Südamerika zwischen dem Rio Doce und dem Rio Pardo wohnen, berichtet, daß sie sprachlich nur eins und viel unterscheiden können, und daß sie daher schon für 2 und 3 ein und dasselbe Wort haben. Wenn wir mit Achselzucken auf ein so geringes Bedürfnis, Zahlen auszudrücken, herabsehen, so sollten wir, kritisch gegen uns selbst, nicht vergessen, daß auch in unserer modernen Kultur der Durchschnittsmensch nicht imstande ist, große Zahlen voneinander zu unterscheiden, oder wenigstens nicht imstande ist, im Gebiete großer Zahlen richtige Schlußfolgerungen zu ziehen. Wie dem Botokuden die Unterscheidung von 2 und 3 als unwesentlich erscheint, so erscheint auch manchem modernen Kulturmenschen die Unterscheidung von einer Billion