Sozialwissenschaftliche Forschungen

Herausgegeben von der

Sozialwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft

Abteilung I — Heft 7

Berlin und Leipzig 1928

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Theorie der Indexzahlen

Beitrag zur Logik des statistischen Vergleichs

Von

Dr. phil. Paul Flaskämper

Privatdozent der Statistik an der Universität Frankfurt a. M.

Berlin und Leipzig 1928

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Angenommen auf Antrag von Professor Dr. Zizek
durch den Abteilungsleiter Professor Dr. Diehl

Vorwort.

Wenn auch die Zeit der Inflation vorüber ist, in der die Bedeutung von Indexziffern, besonders solchen der Lebenshaltungskosten auch weitesten Kreisen vertraut wurde, so wird doch kein Kundiger behaupten wollen, daß das Thema der Indexzahlen nicht mehr zeitgemäß sei. Einmal ist es natürlich nicht richtig, daß die Berechnung von Indexzahlen überhaupt erst durch die Geldentwertung veranlaßt worden ist, und wie es schon lange vor dem Kriege in Deutschland und anderen Ländern eine ganze Reihe von Versuchen gab, gewisse Phänomene des sozialen Lebens — besonders das Preisniveau — in ihrer zeitlichen Entwicklung mit Hilfe von Indexziffern zur Darstellung zu bringen, so wird auch künftig in den Zeiten stabiler Währung die Indexzifferberechnung ein unentbehrliches Werkzeug jedes Wirtschaftsbeobachters und Wirtschaftsforschers bleiben. Ja, im Zusammenhang mit der mächtigen Entfaltung der modernen Konjunkturstatistik wird sich die Anwendung der Indexziffern auf immer neue Gebiete des sozialen und Wirtschaftslebens erstrecken.

Auf der anderen Seite aber hat die ausgedehnte Anwendung der Indexziffern in der Inflationszeit zwar eine umfangreiche Literatur über die Technik und die materiellen Einzelheiten der Anwendung dieses statistischen Meßinstrumentes gebracht, die theoretischen Fragen aber wurden u. E. gänzlich unzulänglich erörtert. Die umfassendste theoretische Leistung ist das bekannte Werk von Irving Fisher, The Making of Index Numbers. So staunenswert vielseitig und so anregend dieses Werk aber auch ist, so müssen wir in diesem Buche doch zu einer Ablehnung desselben kommen. Der Streit um die „beste Indexformel“ ist mit I. Fisher noch nicht entschieden. Auch was einige andere, deutsche und ausländische, Forscher — ich erwähne vor allem Weigel, Winkler, Hermberg, Bortkiewicz und den Italiener Gini — zu dieser Frage beigesteuert haben, kann noch nicht endgültig befriedigen, abgesehen davon, daß diese Autoren nur Teilprobleme behandelt haben.

Der Verfasser betrachtet es daher in diesem Buche als seine Aufgabe, die Fragen nach den verschiedenen Formen der Indexziffern und ihrer theoretischen Bedeutung und Tragweite einheitlich zu erörtern, indem das Indexproblem als Spezialproblem der Logik des statistischen Vergleichs behandelt wird: denn Indexziffern sind Hilfsmittel des statistischen Vergleichs.

Damit ist schon ausgesprochen, daß es sich in diesem Buche in Uebereinstimmung mit dem Titel nur um die Theorie oder, wenn man will, um die Logik der Indexzahlen handelt, daß also die technischen und materiellen Probleme nicht zur Darstellung gelangen. Unter letzteren verstehe ich, z. B. bei einem Lebenshaltungsindex, die Art der Gewinnung der Preisangaben, die Auswahl der zu beobachtenden Waren, die Häufigkeit der Berechnungen, die Frage, ob die Ausgaben für Steuern mitberücksichtigt werden sollen, u. a. Der Verfasser hat die Erörterung dieser Fragen in seinem Buche ausgeschaltet. Denn einmal sind dieselben schon öfters behandelt, und dann müßte die Erörterung dieser Fragen, so notwendig sie an und für sich ist, für jedes besondere Anwendungsgebiet in besonderer Weise durchgeführt werden; gibt es ja doch sehr viele Anwendungsmöglichkeiten der Indexziffern, von denen hier nur Großhandels-, Lebenshaltungs-, Lohn-, Aktien- und Frachtenindex erwähnt seien. Das würde aber die Einheitlichkeit dieses Buches beeinträchtigt haben; will es ja gerade die allen Indexzahlen — gleichgültig, auf welches Sachgebiet sie angewendet werden — zugrunde liegende Logik herausstellen.

Wie bei jedem Wissenschaftsgebiet, das in enger Fühlung steht mit Fragen des praktischen Lebens, so besteht auch bei der Methodik der Indexzifferberechnung ein Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis. Wenn auch, wie eben erwähnt, dieses Buch sich auf die Entwicklung der Theorie der Indexziffern beschränkt und sich von der Erörterung technisch-praktischer Fragen fernhält, so tut es das doch in dem Bewußtsein, daß es einerseits Aufgabe einer jeden Theorie ist, Richtlinien und Normen zu geben für die praktische Anwendung, und daß andererseits jede Theorie von der Praxis fruchtbare Impulse und Aufgaben zur theoretischen Bewältigung empfängt. Wie es ein Zeichen weltfremden Theoretisierens ist, wenn der Forscher mit Geringschätzung auf die Bedürfnisse der Praxis herabsieht, so ist es auch ein, allerdings nicht minder häufiges Zeichen von Verkennung des Wertes theoretischer Gesichtspunkte, wenn der

Praktiker glaubt, daß seine große Wirklichkeitsnähe ihn von der Notwendigkeit befreie, die Richtlinien des Theoretikers zu beachten.

In diesem Sinne der engen Fühlungnahme zwischen Theorie und Praxis ist diese Theorie der Indexzahlen geschrieben, und in diesem Sinne möchte ich auch hier, ein Wort Kants variierend, indem ich statt Begriff Theorie und statt Anschauung Praxis setze, den Satz aussprechen: „Theorie ohne Praxis ist leer, Praxis ohne Theorie ist blind".

Dieser Auffassung von der Aufgabe und der Bedeutung einer Theorie der Indexzahlen entspricht es auch, daß das Buch sich nicht nur an statistische Fachkreise wendet, sondern ebenso an alle Theoretiker und Praktiker des Wirtschafts- und sozialen Lebens.

Frankfurt a. M., im Oktober 1927.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Was versteht man ganz allgemein unter einer Indexzahl oder einer Indexziffer? In bezug auf das allgemeinste Wesen und die Aufgabe dieser statistischen Hilfsmittel, die als eine Untergruppe der Verhältniszahlen zu betrachten sind, stimmen die meisten, aber durchaus nicht alle Autoren überein: Indexzahlen — in ihrem weitesten Sinne — sollen gleichartige und einander koordinierte statistische Größen miteinander vergleichen. Sie sollen also logische Instrumente des statistischen Vergleiches sein und ähneln den Verhältniszahlen, die manche Autoren Koordinationszahlen nennen.

Das ist auch die Bedeutung des Begriffes der Indexziffern, die der gebildete Laie — bewußt oder unbewußt — damit verbindet und in dem die Tageszeitungen in ihrem Wirtschaftsteil von ihnen reden. Wenn wir z. B. von einer Großhandelsindexziffer oder von einer Aktienindexziffer sprechen, so meinen wir damit eine Zahl, die angibt, wie hoch das Niveau der Großhandelspreise oder der Aktienkurse zu einem bestimmten Zeitpunkte ist, verglichen mit dem entsprechenden Niveau zu einer anderen, als Ausgang gewählten Zeit, wobei der Wert der letzteren gleich 1 oder gleich 100 gesetzt wird. Oder wenn bei Reallohnvergleichen der Reallohn von London gleich 100 gesetzt wird und darauf die Reallöhne anderer Städte bezogen werden, so sprechen wir auch hier von Indexziffern.

Und zwar pflegt die deutsche Terminologie — von Ausnahmen, auf die wir noch zurückkommen, abgesehen — von Indexziffern in gleicher Weise zu reden, ob es sich nun um eine einfache Erscheinung handelt oder um eine komplexe Erscheinung, ob wir den Preis einer einzelnen Ware, z. B. Weizen, in seiner Entwicklung verfolgen oder das gesamte Preisniveau; man unterscheidet danach allerdings gewöhnlich Einzel- und Generalindices.

Wenn auch diese eben angedeutete Begriffsbestimmung der Indexziffern dem Sprachgebrauch entspricht, so ist doch festzustellen, daß nicht alle Autoren diesen Begriff der Indexziffern verwenden. So sind nach Weigel Indexziffern Zahlen, die berechnet werden, „um prägnante, schlagwortartige Ausdrücke für Erscheinungen zu gewinnen, die zwar äußerlich — etwa ihrer Benennung nach — einheitliche Tatsachen sind, in Wirklichkeit aber die Summe einer mehr oder weniger großen Zahl von Einzelerscheinungen darstellen, die sämtlich berücksichtigt werden müssen, wenn man zu einem zusammenfassenden Urteil über die Gesamterscheinung kommen will, die aber ohne weiteres eine solche zusammenfassende Beurteilung entweder überhaupt nicht oder wenigstens sehr schwer gestatten".[1]) Indexziffern müssen also nach ihm immer zwei Bedingungen erfüllen: sie müssen 1. absolute Zahlen sein, und sie müssen 2. durch Reihenverschmelzung zustande gekommen sein, d. h. entweder Summen oder Durchschnitte darstellen. Am schroffsten lehnt Weigel die Bezeichnung einfacher Koordinationszahlen (also unsere Einzelindices) als Indexzahlen ab.

Wir haben aber trotzdem gute Gründe, die Indexzahlen in ihrem weitesten Sinne in die Nähe der Koordinationszahlen zu rücken und sie einfach und, wie wir glauben, in Uebereinstimmung mit dem überwiegenden Sprachgebrauch auf diesem Gebiete in vorläufiger, noch unbestimmter Fassung zu definieren als Instrumente zum Vergleich der Werte einer räumlichen, zeitlichen oder sachlichen Reihe von gleichartigen statistischen Größen; ob die Größen Einzelerscheinungen oder Kollektiverscheinungen darstellen, ist belanglos. Die vorliegende Arbeit selbst soll die eingehende Rechtfertigung der so weiten Fassung des Begriffs der Indexzahlen darstellen. Nur andeutungsweise und vorgreifend sei hier betont, daß die strenge Unterscheidung von Einzelerscheinungen und solchen, die eine Summe oder einen Durchschnitt von Einzelerscheinungen darstellen, gar nicht immer möglich ist, wie später eingehend begründet wird. Ich kann es deshalb auch nicht billigen, wenn das Statistische Reichsamt zwischen „Meßziffern", die zur Charakterisierung von Einzelerscheinungen dienen sollen, und „Indexziffern", die mehrere Erscheinungen zusammenfassend charakterisieren sollen, unterscheidet.

Es mag noch erwähnt werden, daß das Wort Index oder Indexziffer gelegentlich auch in ganz anderem Sinne verwendet wird, in einem Sinne, der dem Weigelschen Sprachgebrauche nahe kommt. Ich denke da vor allem an den Begriff des Mortalitätsindex. Er stellt eine fiktive Sterblichkeitsziffer dar, die in der Weise berechnet wird, daß man die nach Geschlecht und Altersstufen getrennt berechneten Sterblichkeitsziffern unter Zugrundelegung einer Standardbevölkerung zu einer Gesamtsterblichkeitsziffer, eben dem Mortalitätsindex zusammenfaßt.

---

[1]) Weigel, Indexziffern. — Jahrb. f. Nat. u. Stat., 117. Bd., 1921, S. 128.

Eine solche Ziffer hat natürlich mit unseren Indexzahlen, die das Ergebnis eines Vergleiches sind, nichts zu tun. Da der Zweck ihrer Berechnung der ist, die wegen der verschiedenen Zusammensetzung der Bevölkerung verschiedener Länder nach Geschlecht und Alter nicht vergleichbaren allgemeinen Sterblichkeitsziffern miteinander vergleichbar zu machen, kann man höchstens sagen, daß sie V o r a u s s e t z u n g für einen Vergleich ist. — Bisweilen nennt man sogar Saatenstandsnoten Indices.

Bei der Wichtigkeit, die die Berechnung von Indexziffern im eigentlichen Sinne in der modernen Wirtschaftsbeobachtung spielt, ist es allerdings dringend geboten, den Ausdruck Indexziffer wirklich nur auf ganz eindeutig in die oben abgegrenzte Sphäre gehörige Dinge zu beschränken und andere Tatbestände und Sachverhalte, die bisweilen auch mit diesem Namen bezeichnet worden sind, anders zu benennen. Denn es führt jedenfalls zu einer terminologischen Unklarheit und Verwirrung, wenn man denselben Ausdruck für formal so verschiedene Fälle verwendet, so wenig der sprachliche Sinn des Wortes (index = Zeiger) dem widerspricht.

Der Schöpfer völlig neuer Begriffe ist in bezug auf die Terminologie in einer glücklichen Lage; er kann dem Gehalte der Begriffe entsprechende Wortetiketten wählen und prägen. Schwierig ist die Situation aber immer, wenn für ein Gebiet schon termini — vielleicht mit verschwommener Umgrenzung — im Gebrauche sind; es ist dann eine Frage der Zweckmäßigkeit, ob völlig neue Ausdrücke geschaffen werden sollen oder die schon im Gebrauche befindlichen, neu präzisiert, weiter Verwendung finden sollen. In unserem Falle scheint es mir nun völlig aussichtslos zu sein, den Begriff Index, der in der Praxis des Alltags durch seine immer ausgedehntere Anwendung besonders in der Nachkriegszeit einen ganz bestimmten Inhalt bekommen hat — eben als Vergleichsinstrument gleichartiger sozialer und wirtschaftlicher Tatbestände — umzubenennen, etwa, wie Weigel vorschlägt, den gänzlich unpopulären Namen Koordinationszahl dafür zu gebrauchen und den Namen Indexziffer anzuwenden für gewisse absolute Zahlen, die wie die Teuerungszahlen in den seltensten Fällen Selbstzweck sind, sondern meist die Funktion einer Durchgangsgröße haben, worauf später näher eingegangen wird.

Wir verstehen also unter Indexzahlen V e r h ä l t n i s - z a h l e n , und aus Gründen, die oben schon angedeutet wurden und die später noch ausführlicher behandelt werden sollen, müssen wir es auch ablehnen, zwischen Indexziffern und Meßziffern zu unterscheiden, wie es das Statistische Reichsamt tut.

Wenn nun auch über die Indexzahlen eine reiche Spezialliteratur entstanden ist, so herrscht doch in ihr nichts weniger als Einheitlichkeit und Klarheit. So vermisse ich bei fast allen Autoren, besonders aber bei I. Fisher, die Fundierung des ganzen Problems in einer Logik des statistischen Vergleichs, besonders des Vergleichs komplexer statistischer Erscheinungen wie Preisniveau oder Lohnniveau oder Lebenshaltungskosten. Auf der Basis einer solchen Betrachtung aber löst sich das Problem der Indexziffern, besonders das der Generalindexziffern, das ja das meiste Kopfzerbrechen verursacht hat — das unermüdliche Suchen nach der „besten Indexformel" beweist es — von selbst.

Unsere Aufgabe wird es daher in diesem Buche sein, zunächst in einem grundlegenden Abschnitte das Wesen des statistischen Vergleichs überhaupt zu erörtern, in einem zweiten Abschnitte die allgemeinen Eigenschaften der Indexzahlen als Hilfsmittel des statistischen Vergleichs zu besprechen, gleichgültig ob es sich handelt um einfache oder komplexe Erscheinungen, ferner in einem dritten Abschnitte im besonderen die Indexzahlen komplexer Erscheinungen, das Kernstück der Lehre von den Indexzahlen, zur Darstellung zu bringen und schließlich in einem vierten Abschnitte gewisse Probleme (Durchschnitte von Einzelindices) zu entwickeln, die sich aus unserer Auffassung des ganzen Problemkomplexes ergeben. In einem Anhang werden wir dann zusammenfassend und ausführlich Stellung nehmen zu dem großen Werke I. Fishers, dessen Name mit unserem Problem untrennbar verknüpft ist.

I. Grundsätzliches über die Logik des statistischen Vergleichs.

A. Wesen des Vergleichs überhaupt und des statistischen Vergleichs im besonderen.

Wenn man auch in der letzten Zeit gegenüber einer allzugroßen Geringschätzung der absoluten Zahlen deren selbständigen Wert besonders gern betont hat und wenn es auch richtig ist, daß das Bedürfnis des, von praktischen Gesichtspunkten ausgehenden statistischen Konsumenten sehr häufig, wenn auch nicht immer, schon mit den absoluten Zahlen befriedigt ist, so ist doch klar, daß erst eine methodische Verarbeitung der absoluten Zahlen zu Verhältniszahlen und Mittelwerten die in den statistischen Aussagen schlummernden Beziehungen, Gesetzmäßigkeiten und Regelmäßigkeiten erkennen läßt. Eine ganz besonders wichtige Rolle spielen nun jene Verhältniszahlen, die dem Vergleich (im eigentlichen Sinne) statistischer Größen dienen; hat man doch gesagt, daß der Vergleich die Seele der Statistik sei.

Es wäre sehr reizvoll, einmal die ganze Lehre von dem statistischen Vergleich systematisch zu behandeln; hier kann es sich nur darum handeln, einige Andeutungen über den Umkreis der darin zu behandelnden Probleme zu geben und dann ausführlich von den Indexzahlen zu reden, die wir in der Einleitung als die wichtigsten logischen Instrumente des statistischen Vergleichs bezeichnet haben. Diese Andeutungen aber sind notwendig und bedeuten keine Ueberschreitung des Rahmens dieser Arbeit; sie sind notwendig, um den logischen Ort des Indexproblems deutlich zu umreißen und für die spätere Behandlung der Einzelfragen desselben die grundlegenden Gesichtspunkte zu liefern.

Zunächst muß betont werden, daß das Wort Vergleich in der Statistik in verschiedenem Sinne gebraucht wird. So spricht man auch von Vergleich, wenn man die absolute Zahl der Bevölkerung in Beziehung setzt zur Fläche des von ihnen bewohnten Gebietes, mit anderen Worten die Bevölkerungsdichte berechnet. Daß es sich dabei nicht um einen Vergleich im eigentlichen Sinne handelt, also hier eine sehr ungenaue Bezeichnungsweise vorliegt, ist klar: Bevölkerungszahl und Flächengröße sind völlig ungleichartige und daher unvergleichbare Begriffe; nur Gleichartiges aber kann man vergleichen. In solchen Fällen sollte man nicht von „Vergleichen" reden, sondern von „In-Beziehungsetzen". Es ist ein besonderer Gegenstand der theoretischen Statistik, im besonderen der Lehre von den Verhältniszahlen und noch weiter im besonderen der Lehre von den Beziehungszahlen, zu untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit statistische Größen miteinander in Beziehung gesetzt werden dürfen. Die durch derartige Inbeziehungsetzung, die ganz uneigentlich „Vergleichen" genannt wird, entstandenen Beziehungszahlen als Ausdruck besonderer Erscheinungen, in unserem Beispiel der Bevölkerungsdichte, können dann allerdings ihrerseits Gegenstand eines Vergleiches werden: so wie wir die Fläche oder die Einwohnerzahl verschiedener Länder vergleichen können, so können wir auch ihre Bevölkerungsdichte vergleichen.

Im Gegensatz zu diesen uneigentlichen Vergleichen haben wir es also hier mit dem Vergleich im eigentlichen, strengen Sinne zu tun. Wie eben schon angedeutet, ist Voraussetzung für einen solchen, daß es sich dabei um gleichartige, um ähnliche Erscheinungen handelt; nur solche sind vergleichbar. Gleichartig heißt natürlich nicht gleich; denn in einem solchen Falle würde das Ergebnis des Vergleiches ja die Feststellung der völligen Uebereinstimmung der zu vergleichenden Erscheinungen bedeuten. Es ist klar, daß das ein Grenzfall des Vergleichs ist, dem der andere Grenzfall der völligen Verschiedenheit gegenübersteht. Eine kurze Besinnung auf die allgemeine Logik des Vergleichs überhaupt, nicht nur des statistischen, zeigt nämlich, daß zwei völlig heterogene Dinge, die gar nichts gemeinsam haben, auch nicht sinnvoll miteinander verglichen werden können.

Ein gewisses Ausmaß von Gleichheit — das Vorhandensein eines tertium comperationis — ist also Voraussetzung für die Vergleichbarkeit. Im übrigen können aber die verschiedenen miteinander verglichenen Erscheinungen völlig unabhängig voneinander sein. Es kann sich aber auch um den Fall handeln, daß die beiden Erscheinungen zwei zeitlich voneinander getrennte Erscheinungsformen eines und desselben Dinges sind: ich kann die Höhe des Wasserspiegels zweier verschiedener Seen miteinander vergleichen, aber auch die Höhe des Wasserspiegels eines und desselben Sees zu verschiedenen Zeitpunkten. Im zweiten Falle wird der Unterschied zur Veränderung. Mit Veränderungen, zeitlichen Entwicklungen haben wir es bei unserem Problem der Indexzahlen sehr viel, wenn auch nicht ausschließlich, zu tun.

Ohne uns in allgemeine logisch-erkenntnistheoretische Gedankengänge zu verlieren, dürfte nun so viel klar sein, daß jeder Vergleich, wenn anders er diesen Namen verdient, und vorausgesetzt, daß sein Ergebnis nicht die Feststellung der völligen Verschiedenheit oder der völligen Uebereinstimmung ist, mindestens die Feststellung des „mehr“ oder „weniger“ bzw. des „größer“ oder „kleiner“ enthalten muß. Ein Vergleich, der nicht dieses Minimum an Einsicht bietet, ist kein Vergleich im eigentlichen Sinne des Wortes: ein Vergleich von Katze und Löwe z. B. soll doch nicht nur sagen, in welchen Punkten die beiden Tiere völlig übereinstimmen oder völlig verschieden sind, sondern auch den Grad der Verschiedenheit ihrer Eigenschaften qantitativ und zwar möglichst genau mindestens aber in der Form des „mehr“ oder „weniger“, ausdrücken.

Es ist klar, daß es nur eine, von der Wissenschaft natürlich erstrebte Verfeinerung des Vergleiches ist, wenn an Stelle der bloß rohen Vergleichsresultate des „mehr als“ oder „weniger als“ bzw. des „größer als“ oder „kleiner als“, genau bestimmte, zahlenmäßige Werte treten. Den Vergleich nicht nur in jener rohen Form, sondern in der eben angedeuteten zahlenmäßig bestimmten Form zu geben, ist nun der Statistiker in der Lage, sofern er für die zu vergleichenden Erscheinungen zahlenmäßige Werte zur Verfügung hat. Der statistische Vergleich erreicht also unter diesem Gesichtspunkt das Ideal des Vergleichs überhaupt.

Diese zahlenmäßig formulierten Unterschiede können nun in einer doppelten mathematischen Form auftreten. Zunächst in der Form einer absoluten Differenz: A ist um n Einheiten größer als B oder entsprechend B um ebensoviel Einheiten kleiner als A. Diese Angabe genügt aber noch nicht, um die Bedeutung des Unterschiedes zwischen A und B zu erkennen und noch weniger, um diesen Unterschied sinnvoll zu vergleichen mit jenem von zwei anderen Größen von gänzlich anderer Größenordnung, sagen wir C und D; denn nicht nur Größen können wir miteinander vergleichen, sondern auch Unterschiede zwischen Größen.

Eine bestimmte absolute Differenz kann nämlich eine große oder eine kleine Veränderung bedeuten je nach der Größenordnung der zu vergleichenden Größen. Der absolute Unterschied 5 zwischen 10 und 15 bedeutet selbstverständlich mehr als derselbe absolute Unterschied zwischen 100 und 105 oder gar 1000 und 1005. Um nun gewissermaßen diese innere Bedeutung des Unterschiedes oder, wenn es sich um Veränderungen handelt, die Größe des Veränderungsschrittes zu messen, berechnen wir den relativen Unterschied: wir sagen also: B ist n mal so groß wie A oder um p% größer als A.

In diesem Zusammenhang eine kurze Bemerkung über die sprachliche Formulierung der zahlenmäßigen Größe des relativen Unterschiedes, die sehr häufig, leider bisweilen sogar in amtlichen Veröffentlichungen, nicht einwandfrei ist. Nehmen wir an, die beiden zu vergleichenden Größen A und B verhielten sich zueinander wie 1 : 3,5, so läßt sich das sprachlich auf eine doppelte Weise ausdrücken. Man kann entweder sagen: B ist 3,5mal so groß wie A, bzw. die Größe B beträgt 350% von der Größe A *oder*: B ist *um* das 2,5fache bzw. *um* 250% größer als A. Aehnlich ist eine Steigerung *auf* das 5fache bzw. *auf* 500% identisch mit einer Steigerung *um* das 4fache bzw. *um* 400%. Entsprechend bedeutet eine Verminderung *um* $\frac{1}{3}$ bzw. *um* 33,3% eine Verminderung *auf* $\frac{2}{3}$ bzw. *auf* 66,7%.

Wir sagten, daß das Vergleichen in einem möglichst exakten, zahlenmäßigen Feststellen des Unterschiedes zwischen zwei Größen bestünde. Wenn dabei das Ergebnis in der Form von relativen Größen, also nicht von absoluten Differenzen ausgedrückt wird — und das ist der Fall, der bei den Indexziffern ausschließlich in Betracht kommt —, so können wir auch sagen, daß wir die eine Größe an der anderen *messen*. Die eine der zu vergleichenden Größen spielt dabei die Rolle des *Vergleichsmaßstabes*, der *Maßeinheit*. Welche Größe diese Funktion übernimmt, ist formal gleichgültig: wir können bei einem Vergleich von A und B A an B und B an A messen. Die Vergleichsresultate müssen immer miteinander harmonieren, die Zahlenwerte nämlich einandere reziprok sein. Wenn B 3mal so groß ist wie A, so ist A $\frac{1}{3}$mal so groß wie B; wenn A $^5/_4$ von B ist, so ist B $^4/_5$ von A oder, was dasselbe besagt, wenn A um $\frac{1}{4}$ größer ist als B, so ist B $^1/_5$ kleiner als A.

Zwischen zwei bestimmten Größen gibt es also nur *einen einzigen* Wert — vom Vorzeichen abgesehen — für den *absoluten* Unterschied, unabhängig von der Richtung des Vergleichs, aber *zwei* verschiedene Werte für den *relativen* Unterschied, je nachdem die kleinere oder die größere der verglichenen Größen als Maßeinheit dient, wobei die beiden Werte, wie schon gesagt, reziprok zueinander sind.

So selbstverständlich auch diese Beziehung ist, so wird sie doch oft übersehen, namentlich wenn das Ergebnis des Vergleichs in Prozentzahlen ausgedrückt ist: einem größer um 50% ($B = {}^3/_2\,A$) entspricht ein kleiner nicht um 50%, sondern um $33\frac{1}{3}$% ($A = \frac{2}{3}\,B$).

Dieses Reziprozitätsverhältnis hat nun eine wichtige Konsequenz bei *zeitlichen* Unterschieden, also bei *Veränderungen*. Wenn eine Größe in einem gewissen Zeitraum um 50% zugenommen hat und wir uns vorstellen, daß sie in einem darauffolgenden Zeitraum wieder auf den ursprünglichen Wert zurückgeht, so muß auf die Steigerung um 50% folgen eine Abnahme nun nicht, wie der Ungeübte denken könnte, wieder um 50%, sondern nur um 33⅓%. Denn, wenn die Größe ursprünglich, sagen wir, 100 war, so ist sie am Ende des ersten Zeitraums 150 und, wenn sie am Ende des zweiten wieder 100 sein soll, also von 150 auf 100 zurückgegangen sein soll, muß sie um 33⅓% abgenommen haben. Während also die absolute Zunahme und die entsprechende absolute Abnahme denselben Wert, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen haben (in unserem Falle +50 und —50), ist die Veränderung +50% gleichwertig der Veränderung —33⅓%.

Da diese Reziprozitätsbeziehung, besonders wenn die Vergleichswerte in Prozentzahlen angegeben werden, häufig nicht beachtet wird, sei es gestattet, in Anbetracht ihrer Wichtigkeit folgende Uebersicht zu bringen, wobei die unter p und p' stehenden Zahlen als in folgenden Beziehungen zueinander stehend gedacht sind: wenn A um p% größer ist als B, dann ist B um p'% kleiner als A oder: wenn eine Erscheinung von einem Zeitpunkt auf den anderen um p% zugenommen hat, dann muß sie bis zu einem dritten Zeitpunkt um p'% abgenommen haben, wenn sie den ursprünglichen Wert wiedererlangen soll:

p	p'
0	0
1	0,990
10	9,1
20	16,7
25	20
33	25
50	33,3
100	50
200	66,7
500	83,3
.	.
.	.
.	.
∞	100

Wie nun bei zwei Größen trotz eines einzigen Wertes der absoluten Differenz ein verschiedener relativer Unterschied angegeben werden kann, je nachdem in welcher Richtung verglichen wird, von der kleineren zur größeren oder von der größeren zur kleineren Größe, so können, wenn die Unterschiede mehrerer Größenpaare miteinander verglichen werden, bei gleichen absoluten Unterschieden verschiedene relative vorhanden sein und umgekehrt, auch wenn immer in derselben Richtung verglichen wird: so besteht zwischen 10 und 11, 20 und 21, 100 und 101 usw. derselbe absolute Unterschied, nämlich 1, aber ein verschieden großer relativer Unterschied (10, 5 bzw. 1%), andererseits besteht zwischen 10 und 11 derselbe relative Unterschied von 10% wie zwischen 100 und 110 oder 500 und 550 oder 1000 und 1100 usw., aber natürlich ein jeweils verschieden großer absoluter Unterschied.

Eine besondere Form nimmt diese Beziehung an, wenn es sich um den, für uns so wichtigen Fall einer zeitlichen Entwicklung handelt. Eine Größe nehme z. B. in drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten die Werte 100, 125, 150 an, so sind die absoluten Unterschiede im ersten und zweiten Intervall gleich groß, nämlich gleich 25, der relative Unterschied aber beträgt im ersten 25% und im zweiten 20%. Den umgekehrten Fall haben wir, wenn wir die Werte für die drei Zeitpunkte ansetzen mit 100, 110 und 121. Hier sind die absoluten Werte verschieden, aber die relativen gleich (= 10%).

Mit der relativen Veränderung nun, mit der wir es in der Lehre von den Indexzahlen ausschließlich zu tun haben und die logisch viel bedeutsamer ist als die absolute Differenz, messen wir die V e r ä n d e r u n g s w u c h t oder V e r ä n d e r u n g s i n t e n s i t ä t, für die die absolute Differenz kein Maßstab ist.

Der logische Sinn des eben Gesagten ist uns allen aus dem Verlauf der Wirtschaftskurven während der Inflationszeit zur Anschauung gebracht: eine Steigerung des Dollarkurses von 100 auf 110 bedeutete einen 10mal so großen Veränderungsschritt, als eine Steigerung von 1000 auf 1010, aber einen ebensogroßen wie eine solche von 1000 auf 1100.[1])

Als Einheit für die absolute Differenz zwischen zwei zu vergleichenden Größen nehmen wir die numerische Einheit oder ein Vielfaches von ihr. Als Einheit für die relative Veränderung, für die Veränderungswucht oder Veränderungsintensität müssen wir ein bestimmtes Verhältnis zwischen den beiden Größen wählen, z. B. das Verhältnis 1 : $^{11}/_{10}$, was einer Veränderung um jeweils 10% entsprechen würde, oder 1 : 2, was einer Verdoppelung entsprechen würde. Ob wir als Einheit des Veränderungsschrittes

---

[1]) Dem mit der Psychologie Vertrauten dürfte hier die Aehnlichkeit mit dem sogenannten Weber-Fechnerschen Gesetze einfallen, demzufolge der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sinnesreizen erst als Empfindungsunterschied wahrgenommen wird, wenn der Reiz um einen bestimmten Bruchteil gewachsen ist, ganz gleichgültig aber, wie groß der voraufgehende Reiz war: wenn eine Person erst eine Steigerung eines auf die Hand gelegten Gewichtes von 100 auf 120 g als „schwerer" empfindet, so wird sie auch erst eine Steigerung von 200 auf 240 g merken, eine solche von 200 auf 220 wird aber ohne Eindruck bleiben, während andererseits bereits eine Vergrößerung des Gewichtes von 50 auf 60 wahrgenommen werden kann. Entsprechendes gilt für andere Empfindungsgebiete (siehe z. B. R. Schulze, Aus der Werkstatt der experimentellen Psychologie und Pädagogik, Leipzig, 1913, S. 61).

eine größere oder kleinere relative Veränderung wählen, hängt von dem Ausmaße der Veränderung ab.

Nennen wir nun a den Anfangswert einer Reihe und 1 : p das als Einheit gewählte relative Verhältnis, so ergibt sich bei Annahme einer regelmäßigen Veränderung um jeweils einen Veränderungsschritt folgende Reihe:

$$a \quad ap \quad ap^2 \quad ap^3 \quad ap^4 \ldots\ldots\ldots ap^n$$

oder, wenn wir statt a, das ja als Maßeinheit dient, 1 setzen:

$$1 \quad p \quad p^2 \quad p^3 \quad p^4 \ldots\ldots\ldots p^n$$

und, wenn schließlich auch 1 und p in Potenzform ausgedrückt werden:

$$p^0 \quad p^1 \quad p^2 \quad p^3 \quad p^4 \ldots\ldots\ldots p^n.$$

Die absoluten Werte einer solchen Reihe, die durch gleiche relative Unterschiede voneinander getrennt sind, bilden also eine g e o m e t r i s c h e R e i h e , deren Quotient der Wert eben dieses relativen Unterschiedes ist. Die absoluten Differenzen werden aber, bei gleichbleibendem relativen Unterschied, immer größer und größer, vorausgesetzt, daß $p > 1$.

Um das an einem einfachen Zahlenbeispiel zu illustrieren, wollen wir $p = 2$ setzen, also den Fall einer Verdoppelung annehmen. Gleichzeitig wollen wir die Reihe nach links erweitern, wobei wir die negativen Potenzen von 2 erhalten, die dann natürlich nicht Verdoppelung, sondern Halbierung bedeuten. Wir erhalten dann folgende Reihen:

1.	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	. . . . .
2.	⅛	¼	½	1	2	4	8	16	. . . . .
3.	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	. . . . .

Die Reihe 1 und 2 bedeuten die absoluten Werte der sich verändernden Größe und die Reihe 3 stellt gewissermaßen die Veränderungsschritte gegenüber dem Ausgangswert ($2^0 = 1$) dar, wobei die Verdoppelung, z. B. der Schritt von 1 auf 2 als Einheit genommen ist. Der Sprung von 2 auf 4, von 4 auf 8 usw. stellen dann je einen Veränderungsschritt von demselben Ausmaße dar, der Sprung von 1 auf 16 z. B. 4 solcher Schritte.

Die Reihe 3 ist nun proportional den Logarithmen der ersten Reihe, also der Reihe der absoluten Werte. Es erhellt aus dieser Reihe, daß nicht nur die Veränderung von 1 auf 2 dasselbe bedeutet wie die von 2 auf 4, von 4 auf 8 usw., sondern daß auch die Veränderung von 2 auf 16 3mal so groß ist wie die von 2 auf 4, weil letztere 1, erstere 3 Veränderungsschritte umfaßt, während die absolute Differenz im ersten Falle (16 —2) 7mal so groß ist wie im zweiten (4 —2).

Wie nun z. B. die Veränderung von 2 auf 4 die Hälfte der Veränderung von 2 auf 8 ist — denn der Veränderungsschritt von 2 auf 4 ist genau so groß wie der von 4 auf 8 —, 4 aber das geometrische Mittel von 2 und 8 ist, so findet man ganz allgemein den unter der Voraussetzung gleichmäßiger Veränderung in der Mitte liegenden Wert zwischen zwei bekannten Werten als dessen geometrisches Mittel. Das findet eine sehr wichtige Anwendung auf die Interpolation von zeitlichen Indexzifferreihen. Wenn eine Erscheinung in monatlichen Intervallen beobachtet wurde und nun für einen genau in der Mitte gelegenen Zeitpunkt ein Wert berechnet werden soll, unter der Annahme gleichmäßiger Veränderung in dem betreffenden Zeitraum, so ist nur das geometrische Mittel am Platze.

Aus den bisherigen Darlegungen folgt nun auch, daß bei einer graphischen Darstellung zeitlicher Veränderungen, bei denen es ja fast immer auf das Ausmaß der relativen Veränderung ankommt, die logarithmische Kurve verwendet werden muß, bei der gleiche relative Unterschiede durch gleichgroße Ordinatenabschnitte dargestellt sind. Die Darstellung zeitlicher Veränderungen in der Form des logarithmischen Diagramms findet auch erfreulicherweise immer mehr Anwendung, in