Mathematische Mussestunden

Eine Sammlung

von

Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur

Von

Dr. Hermann Schubert

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Zweite, stark vermehrte Auflage

Erster Band:

Zahl-Probleme

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1900

Ludendo discimus.

Leibnitz.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die vorliegende Sammlung ist für gebildete Laien bestimmt, denen von der Arithmetik nur die allerersten Elemente bekannt zu sein brauchen. Sie behandelt, ähnlich wie die Sammlungen von Eduard Lucas und Rouse Ball, historisch und kritisch die wichtigsten von den zur Unterhaltung geeigneten Geduldspielen und Problemen mathematischer Natur. Wenn auch der Verfasser die Sammlungen von Lucas und Ball vielfach benutzt hat, so ist doch der bei weitem grösste Teil der in der vorliegenden Sammlung angestellten Erörterungen aus eigenen Studien des Verfassers hervorgegangen.

Hamburg, November 1897.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der schnelle Absatz der ersten Auflage der „Mathematischen Mussestunden“ zeigten dem Verfasser und Verleger, dass das Buch einem vorhandenen Bedürfnis abhilft und ermutigten sie dazu, den behandelten Stoff derartig zu vermehren, dass möglichst alle mathematischen Probleme, die zur Unterhaltung dienen, ihre kritische Besprechung finden. Dadurch ist der Umfang des Buches auf mehr als das Doppelte gewachsen, und hat eine Teilung in drei Bände wünschenswert gemacht.

Hamburg, im Mai 1899.

Hermann Schubert.

Verwandte Litteratur.

1) Bachet de Méziriac, Problesmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Erste Auflage: Paris 1612; Zweite Auflage: Lyon 1624; Dritte und vierte von Labosne vermehrte und verbesserte Auflage: Paris 1874 und 1879.

2) Edouard Lucas, Récréations mathématiques. I. Band: Paris 1882; II. Band: Paris 1883; III. Band: Paris 1893; IV. Band: Paris 1894.

3) Edouard Lucas, L'Arithmétique amusante, Paris 1895, nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. Delannoy, C. A. Laisant und E. Lemoine.

4) W. W. Rouse Ball, Mathematical recreations and problems of past and present times, London 1892.

5) H. Schubert, Zwölf Geduldspiele, Berlin 1895, Neue Ausgabe, Leipzig 1899.

Ausserdem:

6) Cardano, De subtilitate libri XXI, Nürnberg 1550.

7) Tartaglia: Quesiti et inventioni diverse, Venetia 1554; Trattato de numeri e misure, Venetia 1556; Opere, Venetia 1606.

8) Oughtred, Mathematical Recreations, London 1653.
9) Ozanam, Récréations mathématiques et physiques, Paris 1694 mit vielen vermehrten und verbesserten Auflagen, z. B. 1723, 1803, 1840.
10) Montag, Die Wunder der Arithmetik, Leipzig ohne Jahreszahl.
11) Mittenzwey, Mathematische Kurzweil, 3. Auflage, Leipzig 1895.
12) Grosse, Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beziehung, Leipzig 1897.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Band.

Zahlprobleme.

§. 1.

Erraten gedachter Zahlen.

Um eine gedachte Zahl zu erraten, lasse man mit derselben beliebige Rechnungen ausführen. Dann lasse man sich das erhaltene Resultat sagen, aus dem man die gedachte Zahl durch Lösung einer Gleichung berechnen kann, nachdem man die ausgeführten Rechnungen in arithmetischer Zeichensprache ausgedrückt hat. In den einfacheren Fällen, wo die gedachte Zahl nur anfänglich **einmal** den vorgeschriebenen Rechnungen unterworfen wird, kann das Lösen der Gleichung dadurch geschehen, dass man mit dem erhaltenen Resultat umgekehrt verfährt, wie mit der gedachten Zahl, d. h. sowohl die Reihenfolge der Rechnungsarten umkehrt, wie auch die Rechnungsarten selbst, also z. B. subtrahiert statt addiert, multipliziert statt dividiert. Durch arithmetische Umformungen lässt sich jedoch die Berechnung der gedachten Zahl aus dem Resultat kürzer gestalten. Z. B.:

1. Die gedachte Zahl werde um 5 vermehrt, die Summe mit 3 multipliziert und vom Produkt 7 subtrahiert. Erfährt man dann das erhaltene Resultat, so hat man dasselbe um 8 zu vermindern und den dritten

Teil der erhaltenen Differenz zu nehmen, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Denn $(x + 5) . 3 - 7 = p$ ergiebt nach einander $3x + 15 - 7 = p$ oder $3x + 8 = p$ oder $3 . x = p - 8$ oder $x = (p - 8) : 3$. War z. B. 4 die gedachte Zahl, so erhält man 20 als Resultat, woraus sich die gedachte Zahl durch die Berechnung $20 - 8 = 12$, $12 : 3 = 4$ ergiebt.

2. Die gedachte Zahl werde mit 6 multipliziert, vom Produkt 5 subtrahiert, die Differenz mit 3 multipliziert, das Produkt um 1 vermehrt, die Summe durch 2 dividiert und der erhaltene Quotient um 7 vermehrt. Dann ist der neunte Teil des schliesslich erhaltenen Resultats die gedachte Zahl. Denn $[(6x - 5) . 3 + 1] : 2 + 7$ lässt sich umformen, wie folgt: $[18x - 15 + 1] : 2 + 7$ oder $[18x - 14] : 2 + 7$ oder $9x - 7 + 7$ oder $9x$. Also ist $9x$ das erhaltene Resultat, daher die gedachte Zahl x gleich dem neunten Teile des Resultats.

— Bei der Berechnung der gedachten Zahl aus dem erhaltenen Resultat kann man auch den Umstand verwerten, dass wir in unserer Zifferschrift eine Summe von Vielfachen der Zahlen 1, 10, 100 u. s. w. schreiben, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

3. Die gedachte Zahl werde mit 2 multipliziert, zum Produkt 3 addiert, die Summe mit 5 multipliziert und von dem so erhaltenen Produkte 11 subtrahiert. Dann hat man vom erhaltenen Resultat nur die am Schluss stehende 4 fortzulassen, um die gedachte Zahl zu erhalten. War z. B. 7 die gedachte Zahl, so ergiebt sich durch die vorgeschriebenen Rechnungen nach einander 14, 17, 85, 74. Aus dem Resultat 74 erkennt man die gedachte Zahl 7. Die Begründung des Ver-

fahrens liefert die Umformung: $(2x + 3) . 5 - 11$ oder $10x + 15 - 11$ oder $10x + 4$.

4. Die gedachte Zahl werde mit 3 multipliziert, zum Produkt 25 addiert und die erhaltene Summe mit 4 multipliziert. Dann hat man das erhaltene Resultat nur um 100 zu vermindern und von der erhaltenen Differenz den 12ten Teil zu nehmen, um die gedachte Zahl zu erhalten. Denn $(3x + 25) . 4$ führt auf $12 . x + 100 = p$, woraus man $12x = p - 100$ oder $x = (p - 100) : 12$ erhält.

— Solche Aufgaben über Erraten von Zahlen finden sich schon in dem 1612 zuerst erschienenen klassischen Werke von Bachet „Problèmes plaisants et délectables“. Da diese Bachetschen Aufgaben, obwohl sie nichts Besonderes bieten, sondern teilweise unnötig kompliziert sind, seit ihrem Erscheinen nicht aufgehört haben, immer wieder ans Tageslicht gezogen zu werden, und dadurch eine gewisse historische Berechtigung erlangt haben, so sollen drei von ihnen auch in diesem Buche Platz finden:

5. Man lasse jemand eine Zahl sich denken, dieselbe verdreifachen, und dann die Hälfte nehmen, falls dies ohne Rest ausführbar ist. Falls dies aber nicht ohne Rest ausführbar ist, lasse man vorher 1 addieren, ehe die Hälfte genommen wird. Die erhaltene Hälfte lasse man mit 3 multiplizieren, und sich das so gefundene Resultat sagen. Wenn man dieses durch 9 dividiert, und die dabei erhaltenen Ganzen mit 2 multipliziert, erhält man die gedachte Zahl, falls das anfängliche Nehmen der Hälfte ohne Rest geschehen konnte, dagegen 1 weniger als die gedachte Zahl, falls

beim Nehmen der Hälfte ein Rest geblieben war. Bei der Begründung dieses Verfahrens hat man zu unterscheiden, ob die gedachte Zahl gerade oder ungerade war. War sie gerade, so kann sie gleich $2 \cdot n$ gesetzt werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dann erhält man durch das angegebene Verfahren nach einander:

$2n \cdot 3 = 6n$, $6n : 2 = 3n$, $3n \cdot 3 = 9 \cdot n$. Die Zahl $9 \cdot n$ ist also gleich der Zahl, die man erfährt. Man rechnet nun für sich weiter $9 \cdot n : 9 = n$, $n \cdot 2 = 2n$, das ist aber die gedachte Zahl. Falls die gedachte Zahl ungerade war, darf man sie gleich $2 \cdot n + 1$ setzen, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Dann ergeben die vorgeschriebenen Rechnungen nach einander: $(2n + 1) \cdot 3 = 6n + 3$, $6n + 3 + 1 = 6n + 4$, $(6n + 4) : 2 = 3n + 2$, $(3n + 2) \cdot 3 = 9n + 6$. Man erfährt also die Zahl $9 \cdot n + 6$. Dividiert man durch 9, so erhält man die Zahl n als die Ganzen der Division. Durch Multiplikation mit 2 und Addition von 1 erhält man die gedachte Zahl $2 \cdot n + 1$.

— Bei der folgenden Aufgabe von Bachet muss man sogar unterscheiden, ob die gedachte Zahl bei der Teilung durch 4 den Rest 0, 1, 2 oder 3 lässt:

6. Man lasse die gedachte Zahl verdreifachen. Dann lasse man von der so erhaltenen Zahl oder von der um 1 grösseren die Hälfte nehmen, je nachdem beim Verdreifachen eine gerade oder eine ungerade Zahl erschienen war. Die erhaltene Hälfte lasse man wieder verdreifachen, und von dem Dreifachen oder der um 1 grösseren Zahl die Hälfte nehmen, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl erschienen war. Dann

lasse man sich die Ganzen sagen, die bei der Division jener Hälfte durch 9 entstehen. Die so erfahrene Zahl hat man durch 4 zu dividieren, und zu dem erhaltenen Quotienten nichts oder 1 oder 2 oder 3 zu addieren, um die gedachte Zahl zu erhalten. Man hat nämlich nichts zu addieren, falls bei beiden Verdreifachungen gerade Zahlen erschienen waren, 1 zu addieren, falls nur bei der ersten Verdreifachung eine ungerade Zahl erhalten war, 2 zu addieren, falls dies nur bei der zweiten Verdreifachung geschehen war, und 3 zu addieren, falls bei beiden Verdreifachungen ungerade Zahlen gekommen waren. Zum Beweise dieses Verfahrens hat man zu unterscheiden, ob die gedachte Zahl bei der Teilung durch 4 den Rest 0, 1, 2, oder 3 ergiebt, d. h., ob sie gleich $4 . n$ oder gleich $4 . n + 1$ oder gleich $4 . n + 2$ oder gleich $4 . n + 3$ zu setzen ist, wo immer n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. a) Aus $4 . n$ entsteht durch die angegebenen Rechnungen nach einander: $12n$, $6n$, $18n$, $9n$, n, woraus man dann schliesst, dass $4 . n + 0 = 4n$ die gesuchte Zahl ist; b) aus $4n + 1$ entsteht: $12n + 3$, $12n + 4$, $6n + 2$, $18n + 6$, $9n + 3$, n, woraus man $4 . n + 1$ für die gedachte Zahl schliesst; c) aus $4n + 2$ entsteht: $12n + 6$, $6n + 3$, $18n + 9$, $18n + 10$, $9n + 5$, n, woraus man $4n + 2$ schliesst; d) aus $4n + 3$ entsteht: $12n + 9$, $12n + 10$, $6n + 5$, $18n + 15$, $18n + 16$, $9n + 8$, n, woraus man $4n + 3$ schliesst.

— Das dritte Beispiel von Bachet ist einfacher, als die beiden soeben wiedergegebenen, weil bei ihm die Unterscheidung von gerade und ungerade nicht vorkommt.

7. Man lasse die gedachte Zahl verdoppeln, dann 5 addieren, dann mit 5 multiplizieren, dann 10 addieren, dann mit 10 multiplizieren. Das erhaltene Produkt lasse man sich sagen. Zieht man von der so erfahrenen Zahl 350 ab, so bilden die Hunderter des entstandenen Restes die gedachte Zahl. Denn $[(2x + 5) . 5 + 10] . 10$ giebt $[10x + 25 + 10] . 10$ oder $[10x + 35] . 10$ oder $100x + 350$. Diese Zahl erfährt man. Zieht man von ihr 350 ab, so erhält man $100 . x$, d. h. eine Zahl, deren Hunderter die gedachte Zahl darstellen.

— Ein solches Erraten gedachter Zahlen muss demjenigen, der gar nichts von Algebra versteht, noch rätselhafter erscheinen, wenn man die gedachte Zahl selbst nicht bloss anfänglich, sondern auch nachher noch ein oder mehrere Male in die Rechnung hineinzieht, wie folgende Beispiele zeigen:

8. Die gedachte Zahl werde um 3 vermehrt, die Summe mit 6 multipliziert, das Produkt um 3 vermindert, die erhaltene Differenz dann aber noch um die anfänglich gedachte Zahl vermindert; endlich werde noch der erhaltene Unterschied durch 5 dividiert, was immer möglich sein muss. Das so erhaltene Resultat lasse man sich sagen. Um aus ihm die gedachte Zahl zu finden, hat man es nur um 3 zu vermindern. Denn der Ausdruck $[(x + 3) . 6 - 3 - x] : 5$ ergiebt durch arithmetische Umformung $x + 3$. War z. B. 19 die gedachte Zahl, so erhält man durch die angegebenen Rechnungen nach einander die Zahlen 22, 132, 129, 110, 22. Erfährt man nun die Zahl 22 als letztes Resultat, so hat man 22 um 3 zu vermindern, um die gedachte Zahl zu erhalten.

9. Das Vierfache der gedachten Zahl lasse man um 3 vermindern, die erhaltene Differenz mit 6 multiplizieren, zu dem erhaltenen Produkte erst 3 und dann noch die gedachte Zahl addieren, die erhaltene Summe durch 5 dividieren und zu dem erhaltenen Quotienten das Dreifache der Zahl addieren, die um 1 grösser ist, als die gedachte Zahl. Dann lasse man sich das Resultat nennen. Der achte Teil desselben ist immer die gedachte Zahl. Denn der Ausdruck $[(4x - 3) . 6 + 3 + x] : 5 + 3 (x + 1)$ ergiebt durch Vereinfachung nach einander $(25x - 15) : 5 + 3x + 3$ oder $5x - 3 + 3x + 3$ oder $8x$. War z. B. 11 die gedachte Zahl, so erhält man durch die angegebenen Rechnungen nach einander 44, 41, 246, 249, 260, 52, dann $52 + 3 . (11 + 1) = 52 + 3 . 12 = 52 + 36 = 88$. Dieses Resultat ergiebt aber die gedachte Zahl 11, wenn man es durch 8 dividiert.

10. Die gedachte Zahl werde erstens um 2 vermehrt und die Summe mit 3 multipliziert, zweitens um 4 vermehrt und die Summe mit 5 multipliziert, drittens um 6 vermehrt und die Summe mit 7 multipliziert. Von der Summe der erhaltenen drei Resultate lasse man noch 8 abziehen und die Differenz durch 15 dividieren. Dann lasse man sich das durch diese Division erhaltene Resultat sagen. Vermindert man es um 4, so erhält man die gedachte Zahl. Denn $3 (x + 2) + 5 (x + 4) + 7 (x + 6)$ ergiebt durch Lösen der Klammern und Zusammenfassen: $15x + 68$. Ferner ergiebt dann $[15x + 68 - 8] : 15$ den Ausdruck $x + 4$. Daher ist x um 4 kleiner als das erfahrene Resultat.

— Wenn der Ratende Arithmetik und Algebra versteht, so kann er es auch demjenigen, der sich die zu ratende Zahl gedacht hat, ganz **überlassen,** welche Rechnungsarten er nach einander anwenden will und mit welchen Zahlen er es thun will. Nur muss ihm der, der die Zahl gedacht hat, angeben, welche Zahl er addiert, subtrahiert, multipliziert oder zum Divisor benutzt. Dann wird der Ratende die gedachte Zahl x nennen und aus den gehörten Angaben eine Gleichung zusammenstellen. Durch Lösung derselben erhält er dann die gesuchte Zahl x, die er raten wollte. Dabei darf die gedachte Zahl auch eine negative Zahl oder ein Bruch sein. Ebenso dürfen die zum Rechnen verwandten Zahlen auch negativ oder gebrochen sein. Wenn dann aber die gedachte Zahl mehr als einmal in die Rechnung hineingezogen wird, so kann es kommen, dass die zur Auffindung der gedachten Zahl dienende Gleichung von höherem als dem ersten Grade wird und daher die Lösung der Gleichung schwieriger wird. In einfachen Fällen und bei kleinen Zahlen wird es freilich leicht sein, die Zahl x zu raten, die die entstandene Gleichung richtig macht. Hier nur noch zwei Beispiele für den Fall, dass die Gleichung, welche die gedachte Zahl liefert, vom zweiten Grade wird.

11. Man lasse die gedachte Zahl mit der um 1 grösseren multiplizieren, vom Produkte die gedachte Zahl subtrahieren und sich den erhaltenen Rest nennen. Die Quadratwurzel aus demselben ergiebt die gedachte Zahl. Denn $x(x+1)-x$ ergiebt x^2+x-x, d. h. x^2. War z. B. 29 die gedachte Zahl, so erfährt man die Zahl 841 als Resultat. Die Quadratwurzel aus 841 ergiebt 29 als die gedachte Zahl.

12. Derjenige, der sich eine Zahl gedacht hat, und dem es ganz überlassen ist, wie er damit rechnen will, giebt an, dass er das Doppelte der gedachten Zahl zu 17 addiert hat, die erhaltene Summe mit der gedachten Zahl multipliziert hat und auf solche Weise zu der Zahl 135 gelangt ist. Der Ratende hat dann anzusetzen: $(17 + 2x)x = 135$, woraus er $2x^2 + 17x = 135$ und daraus $4x^2 + 34x = 270$ folgert. Um anfänglich Brüche zu vermeiden, wird er diese Gleichung mit 4 multiplizieren, woraus $16x^2 + 136x = 1080$ folgt. Durch Addition des Quadrats des achten Teils von 136, also der Zahl 17, ergiebt sich dann: $(4x)^2 + 2 \,.\, 4x \,.\, 17 + 17^2 = 1369$. Die Quadratwurzel aus 1369 ergiebt 37, so dass links das Quadrat von $4x + 17$, rechts das von 37 erschienen ist, woraus folgt $4x + 17 = 37$ oder $4x + 17 = -37$ ist. Im ersten Falle ergiebt sich 5 als gedachte Zahl. Der zweite Fall ergiebt $x = -13^1/_2$, so dass, wenn auch eine negative gebrochene Zahl gedacht sein könnte, der Ratende zweifelhaft sein muss, ob die Zahl 5 oder die Zahl $-13^1/_2$ gedacht war.

— Bisher war immer nur vorausgesetzt, dass eine einzige Zahl gedacht ist. Sind zwei oder mehr Zahlen gedacht, so führt die Auffindung derselben auf ein System von zwei oder mehr Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Sind mehr Zahlen gedacht, als Angaben darüber gemacht werden, so führt die Lösung auf sogenannte diophantische Gleichungen. Die darauf führenden Probleme sollen jedoch zunächst ausgeschlossen bleiben. Dagegen soll hier der Fall erwähnt werden, dass zwei Zahlen gedacht sind und auch zwei Angaben darüber vorliegen, sowie, dass drei Zahlen gedacht sind und drei Angaben darüber vorliegen. Einige Beispiele einfachster Natur folgen hier:

13. Man lasse sich die Summe und die Differenz zweier gedachter Zahlen angeben. Von den beiden Resultaten, die man so erfährt, nehme man die halbe Summe und die halbe Differenz. Dann hat man die gedachten Zahlen. Denn $x + y = a$ und $x - y = b$ ergeben durch Addition $2x = a + b$ oder x gleich der Hälfte von $a + b$. Ferner erhält man durch Subtraktion $2y = a - b$ oder y gleich der Hälfte von $a - b$.

14. Man erfahre, dass derjenige, der sich zwei Zahlen gedacht hat, 43 bezw. 47 erhalten hat, je nachdem er nämlich das Vierfache der ersten mit dem Fünffachen der zweiten Zahl addiert hat, oder umgekehrt das Fünffache der ersten mit dem Vierfachen der zweiten Zahl addiert hat. Man hat dann anzusetzen $4x + 5y = 43$ und $5x + 4y = 47$. Durch Addition beider Gleichungen kommt $9x + 9y = 90$ oder $x + y = 10$ oder $4x + 4y = 40$, sowie $5x + 5y = 50$. Subtrahiert man nun $4x + 4y = 40$ von $4x + 5y = 43$, so erhält man $y = 3$. Subtrahiert man ferner $4x + 5y = 43$ von $5x + 5y = 50$, so erhält man $x = 7$. Also sind 7 und 3 die beiden gedachten Zahlen.

15. Von drei gedachten Zahlen lasse man die erste und zweite, die erste und dritte, sowie die zweite und dritte addieren. Man hört, dass dadurch die Summen 13, 18, 21 erhalten sind. Man setzt dann an: $x + y = 13$, $x + z = 21$, $y + z = 18$. Man addiere alle drei Gleichungen. Dann erhält man $2x + 2y + 2z = 52$ oder $x + y + z = 26$. Subtrahiert man von dieser Gleichung jede der drei angesetzten Gleichungen, so

erhält man $x = 8$, $y = 5$, $z = 13$ als die gedachten drei Zahlen. Wenn also überhaupt bei drei gedachten Zahlen die Summe je zweier angegeben wird, so hat man von der Hälfte der Summe der drei angegebenen Resultate jedes einzelne Resultat zu subtrahieren, um die drei gedachten Zahlen zu erhalten.

— Für den Laien gestalten sich solche auf Raten von Zahlen bezüglichen Aufgaben dadurch oft fesselnder, dass die Zahlen sich auf Dinge beziehen, die den Ratenden persönlich besonders angehen, wie etwa die Zahl der Geldstücke, die er bei sich hat, die Zahl seiner Zähne, das Datum seines Geburtstages, sein Geburtsjahr, sein Alter, die Zahlen, die er gewürfelt hat, u. s. w. Von solchen eingekleideten Zahlen-Rate-Aufgaben hier nur ein Beispiel:

16. Man bitte denjenigen, dessen Alter man raten will, von der Zahl, die sein Alter in Jahren ausdrückt, die Quersumme (Summe der Ziffern) anzugeben. Darauf bitte man ihn, die betreffende Zahl umzukehren, d. h. die Zehner zu Einern und die Einer zu Zehnern zu machen, und dann den Unterschied zwischen der ursprünglichen und der umgekehrten Zahl zu sagen. Um aus den beiden so erhaltenen Angaben das Alter zu bestimmen, dividiere man die zu zweit angegebene Zahl durch 9, was immer ohne Rest möglich ist. Den erhaltenen Quotienten hat man dann zur Quersumme zu addieren und von der Quersumme zu subtrahieren. Die Hälften der in beiden Fällen erhaltenen Resultate stellen die Ziffern der Zahl dar, die das Alter angiebt. Erfährt man z. B. 11 als Quersumme und 63 als Differenz, so hat man 63 durch 9 zu dividieren, und die erhaltene

Zahl 7 zu 11 zu addieren und von 11 zu subtrahieren. So erhält man 18 und 4, deren Hälften 9 und 2 sind. Die Entscheidung, ob das Alter dann 29 oder 92 Jahre beträgt, wird, wenn nicht auf andere Weise, dadurch herbeigeführt, dass man sich sagen lässt, ob die ursprüngliche Zahl oder die durch Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl die grössere war.

§ 2.

Vorauswissen erhaltener Resultate.

— Wenn man jemand, der sich eine Zahl gedacht hat (vgl. § 1), vorschreibt, wie er mit der Zahl weiter rechnen soll, so lässt es sich so einrichten, dass die gedachte Zahl sich bei der Berechnung forthebt, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass man die gedachte Zahl nicht allein anfänglich, sondern auch nachher noch mindestens einmal in die Rechnung hineinzieht. Die Berechnung des entstandenen Ausdrucks, der ausser der sich forthebenden gedachten Zahl x, nur noch bestimmte Zahlen enthält, führt dann zu einem Resultate, das derjenige, der sich die Zahl gedacht hat, auch erhalten haben muss, so dass man ihm sein Resultat sagen kann, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Man lasse die gedachte Zahl verdreifachen, zu dem Dreifachen 2 addieren, die Summe mit 4 multiplizieren, zum Produkte 4 addieren, die Summe durch 12 dividieren, und vom Quotienten die gedachte Zahl subtrahieren. Dann weiss man, dass der, der sich die Zahl gedacht hat, die Zahl 1 erhalten haben muss, gleichviel, welche Zahl er sich gedacht hat. Denn $(3x + 2) . 4 + 4$ ergiebt $12x + 8 + 4$ oder $12x + 12$, dies durch 12 dividiert ergiebt $x + 1$. Subtrahiert man aber x von $x + 1$, so muss immer 1 herauskommen, gleichviel, wie gross x ist. War z. B. 7 die gedachte Zahl, so wurden nacheinander folgende Zahlen