

S a m m l u n g
neuer
mathematischer Aufgaben.

Von

A. von Forstner,

Lieutenant im zweiten Garde-Regiment und Lehrer der Mathematik
bei der Grenadier-Divisions-Schule.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin, 1819.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

V o r w o r t.

Bei den schätzbaren Sammlungen mathematischer Aufgaben, die wir bereits besitzen, mochte es überflüssig scheinen, dieselben noch zu vermehren; aber die Anzahl dieser Sammlungen ist eben nicht so groß, und ihr Inhalt nicht so erschöpfend, daß nicht jeder Beitrag erwünscht seyn sollte, um so mehr, da fast eine jede neue Sammlung die Aufgaben früherer Sammlungen, durch mehr oder minder neue Aufgaben vermehrt enthält, und hierdurch den Lösern und Freunden mathematischer Aufgaben, nicht nur oft Zeit und Lust genommen wird, die nicht selten nur spärlich vertheilten neuen aufzusuchen, sondern sie müssen auch die Aufgaben immer von neuem anschaffen; die sie

vielleicht schon mehr als ein Mal besitzen, wodurch die Anschaffung derselben sehr kostspielig wird, was schon bei mathematischen Werken, des schwierigen Satzes und der Kupfertafeln wegen, nicht anders seyn kann. Von diesem Vorwurfe sollte nun allerdings eine Sammlung neuer Aufgaben frei seyn. Aber in wie fern sind gegenwärtige Aufgaben neu zu nennen? Die überaus mannigfaltige Behandlung und Anwendung der Mathematik, macht es allerdings schwer, noch neue unbekannte Aufgaben zu finden, und doch ist meines Wissens noch keine wesentliche der folgenden Aufgaben, in bekannten Sammlungen vorhanden, wenigstens habe ich mehrere derselben hierüber nachgeschlagen *), bin aber weit entfernt von dem Glauben, als kenne ich alle vorhandene Sammlungen. Die Neuheit meiner Aufgaben, kann sich ferner wohl nur auf die erste, vierte und fünfte Abtheilung beziehen, da der Form nach die Aufgaben der zweiten und dritten Abtheilung wohl schon in Sammlungen enthalten sind, ja in mathematischen Werken enthalten seyn müssen; aber vorliegende Beispiele sind sämmtlich neu. Es scheint mir nöthig, mich hierüber näher zu erklären. Zuerst habe ich

*) Zu spät um eine Aenderung ohne große Mühe zu veranlassen fand ich, daß meine zweite geometrische Aufgabe, die Aufgabe des 77ten Paragraphs der vortrefflichen geometrischen Aufgabe von Meyer Hirsch, ist.

einige hier und da gemachte Gleichungen gesammelt, und stelle sie hier in eine Ordnung zusammen, die allerdings auffallen muß, denn Gleichungen von verschiedenen Graden, bald mit einer bald mit mehreren unbekanntem Größen, oft leichtere Aufgaben den schwereren folgend, zusammenzustellen, scheint mehr als unsystematisch, — und doch hat es seinen Grund, indem ich glaube, daß es schwerer ist eine Aufgabe zu lösen, wenn man vorher nicht weiß zu welcher Klasse sie gehört, sondern dies selbst erst suchen muß, als im entgegengesetzten Falle; dann ist es mir oft vorgekommen, daß selbst geübte Löser, bei Aufgaben lange Zeit zubrachten, aus dem Grunde — weil sie ihnen zu leicht waren, sie suchten den Grund tief und er lag ganz nahe; diesem zu begegnen folgen, doch nur selten, leichtere Aufgaben den schwereren. Wer die quadratischen Gleichungen noch nicht zu lösen versteht, wird sie bei dem Anfange bald herausfinden, und kann sie ja übergehen. Daß ich die Auflösungen nicht beigefügt habe, bedarf wohl keiner Entschuldigung, sie hätten das Werkchen unnütz vermehrt, und schaden manchem Löser nur, der sich zu früh bei ihnen Rath holt. Die Resultate stehen darin nicht gleich bei der Aufgabe, sondern folgen zusammen der letzten, um auch hier der gerechten Klage der Löser zuvor zu kommen, unwillkürlich dieselben zu lesen, und so die Ueberraschung zu verlieren, die das Lösen der Gleichungen, fast vor allen arithme-

tischen und algebraischen Aufgaben zum Voraus hat, indem die Aufgabe fast immer einem Räthsel gleicht, dessen Auflösung dem Geübten nicht fehlen kann. Vielleicht habe ich den Reiz für die Auflösung der Gleichungen dadurch erhöht, daß ich auch solche machte, deren Resultat ein bekannter Name ist, was offenbar überraschender wird, als eine Zahl u. dgl. m. zu entwickeln; wie dies zu verstehen ist, sagt die Anmerkung vor der ersten Aufgabe; doch dürften sie nur mit anderen Gleichungen untermischt seyn, da man wohl nicht genug, bei mathematischen Aufgaben die Eintönigkeit vermeiden mußte.

Den Gleichungen folgen trigonometrische Aufgaben, und diesen, Aufgaben aus der Kreisberechnung. Sie mögen mehr zu einer Sammlung von Beispielen dienen, als daß in ihnen neue Methoden zur Auflösung dieser Rechnungarten enthalten wären; für Abwechslung glaube ich hierbei gesorgt zu haben, und nicht zu viel zu sagen, daß jeder der diese Aufgaben gelöst hat, eine hinlängliche Kenntniß über die verschiedenen Bedingungen bei einfachen Triangeln sich erworben hat, und in vorkommenden Fällen auch, nicht zu sehr zusammengesetzte Verbindungen von Triangeln, wird zu behandeln verstehen; den geübten Trigonometrer können und sollen diese Aufgaben auch noch nicht bilden.

Die Aufgaben aus der Kreisberechnung enthalten gleich eine Anwendung der Trigonometrie, in der

Entwicklung der Segmente. Die Bedingungen sind hier so mannigfaltig wie möglich gewählt, enthalten aber dennoch nicht alle mögliche Fälle. Bei diesen Aufgaben aber, hielt ich eine Hülfe für nöthig, nämlich das Bilden der Proportionen und Andeutung der, vor Behandlung derselben oft noch erst zu entwickelnden Größen, ja bei einigen Aufgaben war wohl eine noch bedeutendere Hülfe nicht überflüssig. In wiefern diese Aufgaben auch für denjenigen brauchbar sind, der die Kenntniß der Trigonometrie entbehrt, habe ich in der Einleitung zu diesen Aufgaben gesagt, ließ sie aber dennoch, für die Trigonometrie, den trigonometrischen Aufgaben folgen.

Die vierte Abtheilung enthält die analytischen Aufgaben, sich größtentheils auf die regulären Polygone beziehend, und ich glaube, daß mehrere Betrachtungen über dieselben, wie ich sie hier anstelle, nicht unwillkommen sind. Es ist offenbar interessant, die verschiedenen Verhältnisse der Perimeter dieser Figuren mit der Peripherie, der Flächen mit dem Kreise, die Näherungen jener zu diesen u. s. w. zu betrachten.

Ob ich Recht habe zu behaupten, daß Anfänger größtentheils, über den Zusammenhang der Perimeter der Figuren und der Flächen derselben, sich irrige Begriffe zu machen geneigt sind, oft wohl wähen, mit einer Linie nur eine Fläche begrenzen zu

können, und ob nicht dieser Irrthum vielleicht einen psychologischen Grund hat, — überlasse ich Lehrern und Kennern zu beurtheilen; daß ich vorzüglich diesem zu entgegen immer hindeute, wird unverkennbar seyn. Der Zusatz nach der dritten Aufgabe ist vorzüglich hierauf berechnet, dürfte aber wohl hier nur historisch angeführt werden; etwas vollkommen Genügendes hierüber, vermisse ich selbst in den besten mathematischen Schriften, und vielleicht könnte der Gegenstand, eines eigenen Werkes Stoff werden. Die Entwicklung des Verhältnisses der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser, wie ich sie hier durch die Trigonometrie gebe, mögte wohl neu seyn; doch Kenner sind vielleicht hierüber unterrichteter als ich, und ihrem Urtheil unterwerfe ich das meinige auch, wenn ich nämlich glaube, dem Schüler den Vortrag der Kreisberechnung nach Erlernung der Trigonometrie zu erleichtern, da dies doch auch vor derselben geschehen kann, wenn auch auf mühsamerem Wege; den Vortheil der leichteren Berechnung der Segmente und andere Vortheile zu geschweigen. — Daß weder die Peripherie des Kreises die mittlere Proportionallinie zwischen den Perimetern gleichnamiger regulären Polygone in und um den Kreis, noch der Kreis selbst die mittlere Proportionalfläche zwischen den Flächen jener beiden Polygone ist, was Anfänger so gern anzunehmen gesonnen sind, habe ich auch gezeigt. —

Endlich sind noch einige geometrische Aufgaben, größtentheils die Construction beim Kreise betreffend, hinzugefügt. Mein Augenmerk richtete ich hierbei vorzüglich auf deren analytische Lösung (fügte aber die synthetischen Beweise größtentheils auch hinzu), in der festen Ueberzeugung, daß die Quantität der gelöseten Aufgaben, weniger den geübten Löser machen, als die vielseitige Behandlung einer Aufgabe, Erwägung der möglichen und unmöglichen Fälle u. s. w.; ob aber die Qualität der hier gegebenen Aufgaben dieser Behauptung entspricht, ist kein Urtheil für mich. Näher mich über den synthetischen und analytischen Weg einzulassen, war hier nicht der Ort. — Die Anmerkung zur neunten Aufgabe wird mir nicht übel gedeutet werden, wenn ich eine Gelegenheit wahrnahm, die Anwendung einer einfachen Aufgabe auf die erhabensten Gegenstände der Größenlehre zu machen.

Zum Schluß dieser Worte, bitte ich Kenner der Mathematik, denen vielleicht diese Zeilen zu Gesicht kommen sollten, und die sie ihrer Betrachtung werth halten, um ihre Ansichten, wo sie mit den meinigen vielleicht abweichen, so wie eine Berichtigung, wenn ich Aufgaben für neu hielt, die sich vielleicht in Sammlungen schon finden, oder wenn irgendwo Rechenfehler entdeckt werden sollten; es würde Thorheit seyn, in oft seitenlangen Rechnun-

gen, sich von ihrem Einflusse ganz frei sprechen zu wollen. —

Daß diese Zeilen für Anfänger und Freunde der Mathematik, und nicht für ausgeübte Löser (in so fern dies überhaupt möglich wäre) geschrieben wurden, bedarf keiner weitem Anzeige, und sollten sie hie und da Nutzen stiften, so bleibt mir nichts zu wünschen übrig.

Berlin, am 4^{ten} im Februar 1819.

v. Forstner.

I n h a l t.

I. Gleichungen vom ersten und zweiten Grade mit einer und mehreren unbekanntem Größen	Seite 1
II. Trigonometrische Aufgaben	— 16
III. Aufgaben aus der Kreisberechnung	— 24
IV. Analytische Aufgaben	— 30
V. Geometrische Aufgaben	— 64

Berichtigung.

Seite 64, Zeile 15 v. u., statt: sieht, lies: sucht.
