Die

Bücher des Apollonius von Perga

DE SECTIONE RATIONIS

nach dem Lateinischen des

E d m. H a l l e y

frey bearbeitet, und mit einem Anhange versehen

von

Dr. W. A. Diesterweg,
ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. preuss. Rheinuniversität.

Mit 9 Steintafeln.

Berlin,
bey Georg Reimer.
1824.

Vorrede.

Von den Schriften des Apollonius von Perga gehörte die Schrift περὶ λόγου ἀποτομῆς zu den verloren gegangenen. Glücklicherweise fand sich in der Bodlejanischen Bibliothek eine arabische Uebersetzung derselben, welche, nachdem es mehreren Gelehrten misslungen war, das Glück hatte, von dem berühmten Mathematiker, Edm. Halley, Professor zu Oxford, im Jahr 1706 in das Lateinische übersetzt zu werden. Sie ist eine vortreffliche Schrift, und verdient als ein Muster der geometrisch - analytischen Behandlung einer Aufgabe in allen ihren Fällen von jedem jungen Mathematiker studiert zu werden. Dafür bürgt das Zeugniss des Alterthums, welches ihrem Verfasser den Nahmen des grossen Geometers beilegte, und das Zeugniss Neuton's, welcher sie mit dem Nahmen seiner Lieblingsschrift beehrte.

Ich übergebe sie hiermit dem mathematischen Publicum in Deutschland, in einer freyen Bearbeitung, nicht einer Uebersetzung; mit Zusätzen und einem Anhange über verwandte Aufgaben versehen. Um auch die Leser, welche die sehr seltene Halley'sche Uebersetzung nicht zur Hand haben, in den Stand zu setzen, über die Beschaffenheit des Originals und dieser Bearbeitung selbst zu urtheilen, so lasse ich der Vorrede einen Hauptfall nach der Halley'schen Ausgabe beydrucken.

Um die Anordnung systematischer zu machen, habe ich den Gang des Originals nicht überall beybehalten. Deſshalb findet man loc. X. (Apollonius bezeichnete die Hauptfälle der behandelten Aufgabe mit τόπος, locus) nach loc. XIV. abgehandelt.

Ich füge der Vorrede eine Uebersicht des Inhaltes bey.

Bonn, im Dec. 1823.

Diesterweg.

Apollonii Pergaei de Sectione rationis Lib. II. Locus Tertius.

Occurrat jam recta, per punctum H ducta ipsique ΑΓ parallela, rectae alteri MB citra punctum Z; sive inter illud ac punctum M, ad modum rectae HK: ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. (Fig. 1.) Ducatur autem imprimis recta AB, juxta Casum primum, auferens segmenta ΓΑ ad BZ in ratione data. Junge ΓH; ac per punctum Θ ducatur recta ipsi ΓΑ parallela, ut recta ΣΘΟ. Quoniam ratio ΓH ad HΘ datur, ratio ΓΑ ad ΔΘ data est. Cumque ratio ΓΑ ad BZ data est, dabitur quoque ratio ΔΘ ad ZB. Sunt autem rectae duae positione datae, ΣΟ, MB; ac sumitur in recta MB punctum Z, in recta autem ΣΟ punctum Θ; datum autem punctum H ést intra angulum ΟΘB. Ducenda est igitur recta AHB, auferens rationem ΔΘ ad ZB datam. Recta autem AHB positione datur, juxta Casum primum Loci septimi, neque habet limites. Construetur autem per ea quae ibidem docentur.

Cas. II. (Fig. 2. 3.) Ducatur recta AB, juxta Casum secundum, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Manentibus autem descriptis, cum ratio ΓA ad ΔΘ data est, atque etiam ratio ΘΔ ad ZB datur, recta quoque AB dabitur positione, per Casum secundum Loci septimi.

Determinatur autem hunc in modum. Capiatur ΘB media proportionalis inter ipsas ZΘ, ΘK; junctâque HB ac productâ ad A, dico quod recta AB aufert rationem ΓA ad BZ, minorem quavis alia ratione, quae resecari possit à rectis per punctum H ductis, ipsique KZ occurrentibus. Ducatur enim alia, ut ΔHN. Cumque recta ΘB media proportionalis est inter ZΘ, ΘK; erit ratio ΣΘ ad BZ minor ratione OΘ ad ZN: ac permutando, erit ratio ΣΘ ad ΘO minor ratione BZ ad ZN. Sed ΣΘ est ad ΘO ut AΓ ad ΓΔ; adeoque ratio AΓ ad ΓΔ minor erit ratione BZ ad ZN: quare permutando, ratio AΓ ad BZ minor erit ratione ΓΔ ad ZN. Recta igitur AB aufert rationem AΓ ad BZ minorem qualibet ratione, à rectis per H transeuntibus rectaeque KZ occurrentibus, abscissâ.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis; sit ΘB media proportionalis inter rectas ZΘ, ΘK; junctaque HB producatur ad A. Dico quod recta AB auferet rationem ΓA ad BZ, minorem quavis aliâ ratione, quam abscindere potest recta quaevis alia per punctum H ducta, ipsique KZ occurrens. Quod si ratio ad construendum proposita aequalis fuerit rationi ΓA ad ZB; tum recta AB sola solvit problema; si minor fuerit eâ, compositio fieri non potest. Si vero major fuerit ea, componetur duobus modis, ab utrâque parte ipsius AB. Sit autem (Fig. 3.) ratio data sicut N ad T, quae major sit ratione ΓA ad BZ. Fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Ξ: ac manifestum est ex aequo, quod ratio Ξ ad T major erit ratione ΘΣ ad BZ. Sed ratio ΘO ad NZ major est eâ; quia ΘB media proportionalis est inter ZΘ et ΘK: unde constat rectas duas duci posse per punctum H, ab utraque parte ipsius AB, quae secent à rectis ΘΣ, ZK, rationes aequales rationi Ξ ad T. Constat autem ex praemissis rectas hunc in modum ductas solvere problema.

Cas. III. (Fig. 4.) Ducatur jam, juxta Casum tertium, recta auferens rationem ΓE ad AZ datam. Quoniam ratio EΓ ad BΘ datur, ac ratio quoque BΘ ad AZ data est; recta EH positione datur: per Casum tertium Loci septimi, qui quidem non habet limites, adeoque manifesta est compositio.

Cas. IV. (Fig. 5. 6. 7. 8.) Ducatur jam, ad modum quartum, recta HN auferens rationem ΓN ad AZ datam. Quoniam ratio ΓN ad ΘΣ datur, etiam ratio ΣΘ ad AZ data est; unde recta HN positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci septimi.

Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis, capiatur media proportionalis inter ZΘ et ΘK. Haec vel minor erit recta ΘM, vel non minor eâ: ac primo non sit minor eâ. Junge HM, ac dico quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione, a recta qualibet per punctum H ducta ipsique ΓM occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut HN. Quoniam media proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK non est minor quam ΘM; recta HM vel auferet rationem $\Theta\Delta$ ad ZM maximam, vel propior erit rectae rationem maximam auferenti: adeoque ratio $\Delta\Theta$ ad ZM major erit ratione $\Theta\Sigma$ ad AZ; permutando autem $\Delta\Theta$ ad $\Theta\Sigma$ major erit ratione ZM ad AZ. Sed $\Delta\Theta$ est ad $\Theta\Sigma$ ut est $M\Gamma$ ad ΓN; quare ratio $M\Gamma$ ad ΓN major erit ratione MZ ad AZ: ac permutando iterum, ratio $M\Gamma$ ad MZ major erit ratione ΓN ad AZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione quam aufert recta quaelibet alia per punctum H ducta ipsique ΓM occurrens. Q. E. D.

Sit jam media proportionalis inter $Z\Theta$ et ΘK minor quam ΘM, ut ΘA. Jungantur HM, HA, ac producatur HA ad Δ. Dico quod recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad AZ, majorem quavis alia ratione, quam abscindit recta quaelibet per H ducta, totique rectae ΓM occurrens: quodque recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem quàvis aliâ rectâ ipsi ΔM occurrente. Ducantur enim rectae duae ut $H\Pi$, HB. Quoniam autem ΘA media proportionalis est inter $Z\Theta$, ΘK, auferet recta HA rationem ΘN ad AZ maximam. Est igitur ratio ΘN ad AZ major ratione $\Sigma\Theta$ ad ZO; et permutando ratio ΘN ad $\Sigma\Theta$ major erit ratione AZ ad ZO. Sed $N\Theta$ est ad $\Theta\Sigma$ ut $\Delta\Gamma$ ad ΓB, quae proinde ratio major est ratione AZ ad ZO: permutando autem ratio $\Delta\Gamma$ ad AZ major erit ratione ΓB ad ZO. Ac pari modo demonstratur rationem illam majorem esse ratione $\Gamma\Pi$ ad PZ. Quapropter recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad AZ, majorem omnibus rationibus à rectis per H ductis rectaeque ΓM occurrentibus, abscissis. Dico praeterea quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem ratione quacunque, à rectâ quâvis per H ductâ, ipsamque ΔM intersecante, abscissâ. Quoniam enim (Fig. 6.) recta $H\Pi$ propior est ipsi $H\Delta$, maximam rationem auferenti, quam est recta HM; ac rectae quae propiores sunt illi semper abscindunt rationes majores: igitur ratio ΘE ad PZ major erit ratione $\Lambda\Theta$ ad MZ. Permutando autem ratio $E\Theta$ ad $\Theta\Lambda$ major erit ratione PZ ad ZM. Sed $E\Theta$ est ad $\Theta\Lambda$ ut $\Pi\Gamma$ ad ΓM; ratio igitur $\Pi\Gamma$ ad ΓM major erit ratione PZ ad ZM: ac permutando ratio $\Pi\Gamma$ ad PZ major erit ratione ΓM ad MZ. Quocirca recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad ΛZ, majorem quavis ratione quam abscindere potest recta aliqua alia per H ducta, ita ut rectis ΓM, ΔM occurrat. Recta vero HM aufert rationem minorem quâvis alia rectam ΔM solam intersecante.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant jam descripta; ac media proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK vel minor erit quam $M\Theta$; vel non erit minor eâ. Imprimis autem non sit minor ea. Junge HM; ac recta HM abscindet rationem ΓM ad MZ, majorem quam recta quaevis per H ducta ipsamque ΓM intersecans. Igitur si ratio ad construendum data fuerit aequalis rationi ΓM ad MZ; recta HM eaque sola solvit problema. Si vero ratio minor fuerit, construetur problema unico tantum modo. Quod si (Fig. 7.) ratio data, quae sit ut P ad T, minor fuerit ratione ΓM ad MZ, fiat ut ΓH ad $H\Theta$ ita P ad Ξ; ac demonstrari potest ex aequo, quod ratio Ξ ad T minor erit ratione $\Lambda\Theta$ ad MZ: unde patet quod possibile sit per punctum H ducere duas rectas, quae auferant à rectis ΓΜ, ΜΖ rationem aequalem rationi Ξ ad T. Hae si ducantur, cadent ab utraque parte ipsius ΗΜ; ac manifestum est alteram ex his rectis ut ΗΟ, quae per punctum Η transit ac producta occurrit ipsi ΓΜ, solvere problema; alteram vero non item: adeoque unico tantum modo efficitur. Q. E. D.

Jam sit (Fig. 8.) media proportionalis inter ΖΘ et ΘΚ minor quam recta ΘΜ; sit ea ΘΝ. Junge rectas ΗΜ, ΗΝ; et producatur ΗΝ ad Σ; ac recta haec ΗΣ auferet rationem ΓΣ ad ΝΖ, majorem quavis, quae resecari possit à rectis per punctum Η ductis, ipsique ΓΜ occurrentibus. Recta vero ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, minorem quavis ratione à rectis per Η ductis, ipsique ΣΜ soli occurrentibus, abscissâ. Propositâ autem ratione construendâ, quae aequalis sit rationi ΓΣ ad ΝΖ; manifestum est quod sola recta ΗΣ solvet problema. Si ratio proposita major fuerit ea, tum componi non potest. Quod si minor fuerit ratione ΓΣ ad ΝΖ, major vero quam ΓΜ ad ΜΖ; hoc in casu dupliciter solvi potest problema per praecedentia: à rectis scilicet ab utrâque parte ipsius ΗΣ ducendis, ipsisque ΓΣ, ΣΜ occurrentibus. Quod si ratio data aequalis fuerit rationi ΓΜ ad ΜΖ; constat etiam ex determinatione praemissa, quod duobus modis solvi possit, nempe rectâ ΗΜ, ac rectâ aliâ ut ΗΡ. Si vero ratio minor fuerit quam ΓΜ ad ΜΖ; tum cadet altera è rectis ultra ipsam ΗΜ, adeoque non satisfaciet problemati. Manifesta autem sunt haec omnia ex iis quae jam pridem demonstravimus.

Cas. V. (Fig. 9. 10.) Ducatur jam recta HΛ, juxta Casum quintum, auferens rationem ΓΔ ad ΛZ datam. Quoniam ratio ΓΔ ad ΘN datur, ratio etiam NΘ ad ΛZ datur; unde recta quoque HΛ positione data est, per demonstrata in Casu quarto Loci septimi, qui quidem determinationem habet. Determinatur autem hunc in modum. Quoniam media proportionalis inter ZΘ, ΘK, vel major esse potest quam recta ΘM, vel minor eâ; primum non sit major eâ. Junge HM, ac manifestum est ex limitationibus praecedentibus, quod recta HM auferet rationem ΓM ad MZ majorem rationibus omnibus, à rectis per punctum H ductis rectaeque ΛM occurrentibus, abscissis. Si vero media proportionalis inter ZΘ, ΘK major sit quam recta ΘM; ut est recta ΘΛ: jungantur HΛ, HM; ac patet ex limitationibus praecedentibus, quod recta HΛ auferet rationem ΓΔ ad ΛZ, majorem omni ratione, quam auferunt rectae quaevis per H ductae, ipsique ΛMΘ occurrentes. Recta vero HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, solique rectae ΛM occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, erit media proportionalis inter ZΘ et ΘK, vel major quam ΘM, vel non major ea. Primo autem non sit major eâ. Junge HM auferentem rationem ΓM ad MZ, majorem omni ratione, à rectis per H ductis, ipsique ΛM occurrentibus, abscissâ: ac si fuerit ratio ad componendum data ut ΓM ad MZ, sola recta HM solvit problema. Si major fuerit eâ, tum construi non potest. Quod si ratio minor fuerit eâ, ex praecedentibus constat unam solam rectam duci posse, quae occurrens ipsi ΛM problemati satisfaciat. Q. E. D.

Quod si ΘΛ, media proportionalis inter ZΘ et ΘK, major fuerit quam ΘM; jungantur HM, HΛ; ac recta HΛ auferet rationem ΓΔ ad ΛZ, majorem omni ratione quam abscindunt rectae aliae per H ductae, ipsique ΘM continuatae occurrentes: recta vero HM auferet rationem minimam, nempe rationem ΓM ad MZ. Jam si proponatur ratio ad construendum, quae fuerit ut ΓΔ ad ΛZ; patet quod recta HΛ sola solvet problema: ac si major fuerit ratio, non construetur. Quod si minor fuerit ratione ΓΔ ad ΛZ, major vero quam ΓM ad MZ, manifestum est ex praemissis, problema effici posse duobus modis; ductis rectis, ab utraque parte ipsius HΛ, rectae ΛM occurrentibus. Si vero minor fuerit ratione ΓM ad MZ, ex praecedentibus limitationibus constat, unico solum modo solvi posse problema; scilicet recta ipsam ΛM intersecante. Denique si ratio aequalis fuerit rationi ΓM ad MZ, duplicem habebit solutionem. Recta enim HM, atque etiam alia ipsi ΛM occurrens ultra punctum Λ, rem praestant. Totum hoc patet ex prius demonstratis.

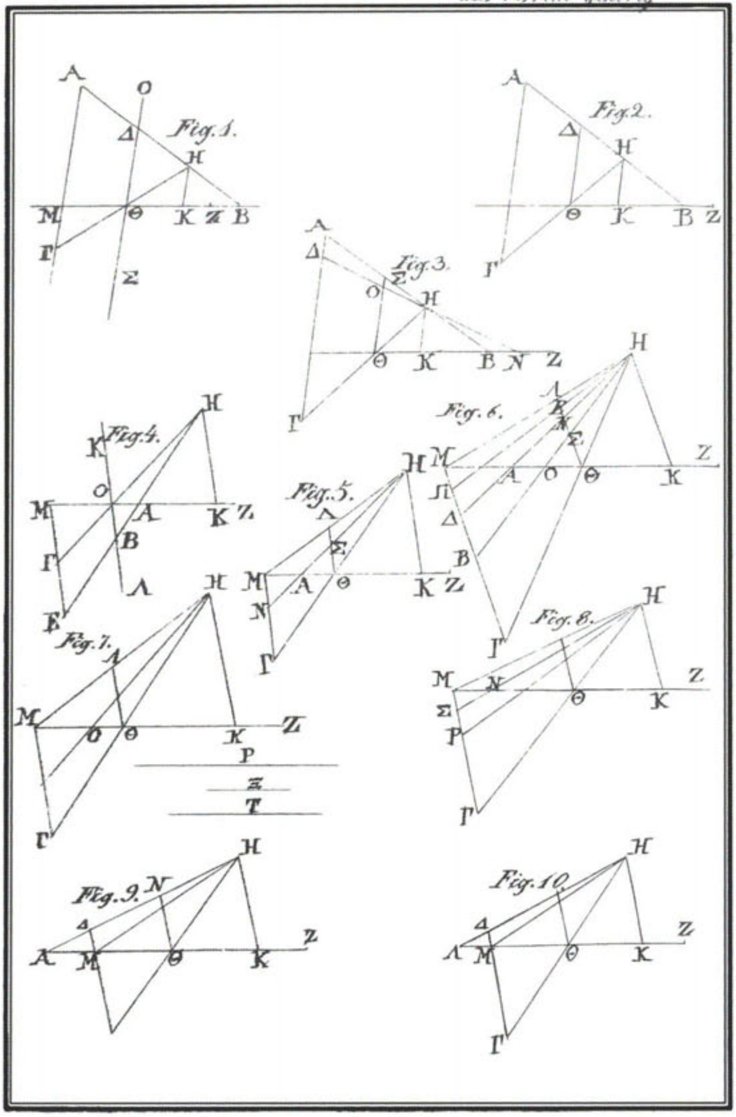
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

Lehnsatz A. Aufgabe. (Fig. a.)

Eine gegebene gerade Linie AB in einem Punkte C so zu schneiden, dafs das Rechteck aus den Segmenten AC, CB dem Rechtecke aus zwey gegebenen geraden Linien P, Q gleich sey.

Auflösung.

Man mache BAD = ABE = R auf einerley Seite von AB, AD = P, BE = Q, ziehe DE, beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und errichte auf der Linie DE in dem Punkte F, in welchem der Kreis diese Linie erreicht, ein Perpendikel. Der Punkt C, in welchem dasselbe der Linie AB begegnet, wird das Verlangte leisten.

Determination.

Damit der Halbkreis der Linie DE begegne, mufs (Fig. a. 2.) ein von dem Mittelpunkte O auf DE gefälltes Perpendikel $OL \leqq \frac{1}{2}AB$ seyn. (El. I. 19.)

Macht man AOH = R, und zieht durch den Durchschnitt H der OH mit DE die Linie HQ#AB,

$$\text{so ist } HO : OL = DH : \left\{\begin{array}{l} HQ \text{ (El. VI. 4.)} \\ AO \text{ (El. I. 34.)} \\ \frac{1}{2} AB \end{array}\right.$$

$$\text{also mufs } OH \leqq HD \text{ seyn (El. V. 14.)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{folglich } OH^2 \\ \text{(El. Ax. 1.) } \frac{(AD+BE)^2}{4} \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} HD^2 \\ \frac{1}{4} DE^2 \quad \text{(El. VI. 2.)} \\ \frac{EN^2+ND^2}{4} \text{ (El. I. 47.), wenn } EN \# AB, \\ \frac{AB^2+(AD-BE)^2}{4} \quad \text{(El. I. 34.)} \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } (AD+BE)^2 \leqq AB^2+(AD-BE)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{somit } (AD+BE)^2-(AD-BE)^2 \\ \text{(El. II. 4. 7.) } 4\,AD.BE \end{array}\right\} \leqq AB^2$$

$$\text{demnach } AD.BE \leqq \tfrac{1}{4} AB^2$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AD.\,BE \leqq \tfrac{1}{4} AB^2 \quad \text{(Det.)}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{also } 4\,AD.\,BE \\ (AD+BE)^2-(AD-BE)^2 \end{array}\right\} \leqq AB^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{folglich } \frac{(AD+BE)^2}{4} \\ OH^2 \end{array}\right\} \leqq \left\{\begin{array}{l} \frac{AB^2+(AD-BE)^2}{4} \\ \frac{EN^2+ND^2}{4} \\ \frac{1}{4} DE^2 \\ HD^2 \end{array}\right.$$

mithin $OH \overset{=}{<} HD$

Nun ist $HO : OL = DH : \left\{ \begin{matrix} HQ \\ AO \end{matrix} \right.$

demnach $LO \overset{=}{<} \left\{ \begin{matrix} OA \\ \frac{1}{2} AB \end{matrix} \right.$

Der Halbkreis berührt also (Fig. a. 1.), oder schneidet (Fig. a. 2.) die Linie DE. In beiden Fällen ist $AFB = R$ (El. III. 31.)

also $AFD < R$, $BFD > R$

folglich $DFC > DFA$, $DFC < DFB$

mithin fällt FC zwischen AF, FB

somit liegt C zwischen A, B.

Ferner ist $DAF = CBF$ (El. III. 32.), $DFC = AFB$

demnach $AFD = CFB$

folglich $DA : AF = CB : BF$ (El. VI. 4.)

Auch ist $EBF = FAC$ (El. III. 32.), $EFC = AFB$

somit $EFB = AFC$

folglich $FA : AC = FB : BE$

mithin $DA : AC = CB : BE$ (El. V. 22.)

demnach $AC.CB = \left\{ \begin{matrix} AD.BE \\ P.Q \end{matrix} \right.$ (El. VI. 16.)

Zus. Es erhellet von selbst (Fig. a. 2.), daſs ein zweiter Durchschnitt des Halbkreises mit der Linie DE einen zweiten Punkt C′ mit der gegebenen Eigenschaft auf der Linie AB bestimme.

Lehns. B. Aufg. (Fig. b.)

Auf der Verlängerung einer gegebenen geraden Linie AB einen Punkt C zu bestimmen, so daſs das Rechteck aus den Segmenten AC, CB dem Rechtecke aus zwey gegebenen geraden Linien P, Q gleich sey.

Auflösung.

Man mache $BAD = ABE = R$ auf verschiedenen Seiten der Linie AB, $AD = P$, $BE = Q$, ziehe DE, beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und errichte in dem Punkte F, in welchem derselbe die Linie DE schneidet, ein Perpendikel auf DE. Der Punkt, in welchem dasselbe die Verlängerung von AB erreicht, wird das Verlangte leisten.

Beweis.

Es ist $DFC = R$, $DFB < R$ (El. III. 31.)

also $DFC > DFB$

folglich liegt C in der Verlängerung von AB.

Ferner ist $DAF = CBF$ (El. III. 32.22), $DFC = AFB$

also $AFD = CFB$

folglich $DA : AF = CB : BF$

Auch ist $EBF = FAC$, also $EFC = AFB$

$EFB = AFC$

folglich $FA : AC = FB : BE$

mithin $DA : AC = CB : BE$

somit $AC.CB = \left\{ \begin{array}{l} AD.\,BE \\ P.\,Q. \end{array} \right.$

Zus. Es erhellet von selbst, daſs der zweite Durchschnitt F des Kreises mit DE einen zweiten Punkt C′ auf der verlängerten BA bestimme, welcher das Verlangte leistet.

Die

BÜCHER des APOLLONIUS von PERGA

de sectione rationis.

Aufgabe.

Von einem, außerhalb zweyer der Lage nach gegebenen geraden Linien, in der durch dieselben gelegten Ebene, gegebenen Punkte eine gerade Linie zu ziehen, so daß die zwischen ihren Durchschnittspunkten mit jenen Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten liegenden Segmente ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Erstes Buch.

Die gegebenen Linien sind parallel, oder es liegen, wenn sie nicht parallel sind, die in denselben gegebenen Punkte nicht beide aufserhalb ihres Durchschnittspunktes. (Fig. 1—26.)

I) Die gegebenen Linien AB, CD sind parallel. (Fig. 1—7.) Die gegebenen Punkte seyen E, F.

1) Der aufserhalb der Linien gegebene Punkt O liegt innerhalb des Winkels DFR. (Fig. 1—3.). (Loc. I.)

Fall I.

Die verlangten Segmente sollen liegen auf den Linien FD, EB. (Fig. 1.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte Linie, ihre Durchschnittspunkte mit AB, CD seyen G, H, so ist, wenn die gerade Linie OE gezogen wird, welche die Linie CD in L schneide,

$$EG : LH = EO : OL \quad (\text{El. VI. 4.})$$

also ist $EG : LH$ gegeben (Dat. 29. 1.) *)

Da $EG : FH$ gegeben ist (p. hyp.)

so ist $FH : HL$ (Dat. 9.)

folglich auch $FH - HL : LH$ gegeben (Dat. 6. *Zus.*)

mithin ist LH (Dat. 2.)

somit der Punkt H (Dat. 30.), und die gerade Linie OH der Lage nach (Dat. 29.) gegeben.

Determination.

Da $FH > HL$

$$\text{so ist } EG : FH < \left\{ \begin{array}{l} EG : HL \quad (\text{El. V. 8.}) \\ EO : OL \end{array} \right.$$

also muſs das gegebene Verhältniſs $p : q < EO : OL$ seyn.

Construction.

Man ziehe EF, mache $OK \# CD$, $UF = FK$, $UV \# EF$, $TE = EV$, $FP = p$, $FQ = q$, $QR \# TP$, $LM \# EF$, ziehe RM, welche in H die CD schneide, so ist OH die gesuchte Linie.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{r} \text{Es ist } p : q \\ PF : FQ \\ (\text{El. VI. 4.}) \quad \left. \begin{array}{l} TF \\ EK \end{array} \right\} : FR \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{ll} EO : OL & (\text{Det.}) \\ EK : KF & (\text{El. VI. 2.}) \end{array} \right.$$

$$\text{also } RF > \left\{ \begin{array}{l} FK \quad (\text{El. V. 10.}) \\ LM \end{array} \right.$$

*) Die Citationen der Data des Euclides beziehen sich auf die von Schwab, Stuttgart, 1780 veranstaltete deutsche Ausgabe.