Lehrgebäude

der

Mathematik.

Erstes Supplement,

enthaltend

die geometrischen Uebungaufgaben zum zweiten Bande des Lehrgebäudes.

Von

Alexander Freiherrn v. Forstner,

Lieutenant im 22sten Infanterie-Regiment und Mitglied der Ober-Militär-Examinations-Commission.

Mit dreizehn Kupfertafeln.

Berlin, 1823.

Gedruckt und verlegt

bei G. Reimer.

Sammlung

systematisch geordneter und synthetisch aufgelöseter

geometrischer Aufgaben,

bloß betreffend

Constructionen auf der Ebene.

Von

Alexander Freiherrn v. Forstner,

Lieutenant im 22sten Infanterie-Regiment und Mitglied der Ober-Militär-Examinations-Commission.

Mit dreizehn Kupfertafeln.

Berlin, 1823.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Seinem Bruder

Carl Freiherrn von Forstner,

Lieutenant im ersten Garde-Regiment zu Fuß,

widmet

diese Aufgabensammlung

als ein freundliches Andenken

der Verfasser.

Vorrede.

Ueber den Zweck dieses Supplementes zu meinem Lehrgebäude der Mathematik, spricht sich der erste Titel gegenwärtigen Buches, so wie meine, schon in der Vorrede zum ersten Bande des Lehrgebäudes ausgesprochenen Ansicht: dasjenige in besonderen, das Werk begleitenden Supplementen vorzutragen, was eine bloße Uebung des Vorgetragenen bezweckt; hinlänglich aus; und die Supplemente haben daher nicht den Zweck: Erläuterungen, weitere Ausführungen u. dgl. m. zum Hauptwerke zu geben, welche Zugaben, wenn sie auch, in sofern kein Werk vollkommen ist, zuletzt wol jedem großen Werke beigegeben werden oder ihm folgen müssen, dennoch immer als ein Mangel oder Fehler desselben anzusehen sind. — Es wäre daher überflüssig, diese Vorrede über die Grenzen obiger Zeilen auszudehnen; wenn ich nicht über die eigenthümliche Bearbeitung dieses Supplementes, besonders in sofern es zugleich ein Werk für sich ist, wie sein zweiter Titel zeigt, und über diesen Titel selbst, noch einiges zu sagen für nothwendig fände.

Wenn der Zweck von Aufgabensammlungen auch im Allgemeinen immer derselbe ist; so hat doch jeder Herausgeber einer solchen Sammlung, sowol in der Anordnung der Folge der einzelnen Aufgaben, als in der Art der Auflösung derselben, gewiß seine eigenen Ansichten. Die meinigen mögen daher hier folgen. — Die einzelnen Abschnitte und deren besondere Theile, sind so geordnet, wie sie den verschiedenen nach einander folgenden Theorien des zweiten Bandes des Lehrgebäudes, oder meiner Geometrie, entsprechen, so weit derselbe in seinem ersten Abschnitte, die ganze ebene Geometrie enthält, und wie auch bereits in jenem Bande, überall auf die verschiedenen Abschnitte dieses Supplementes, schon hingedeutet wird. Wer daher jenes Buch studirt, wird wol thun, wenn er nach Vollendung der einzelnen Theile der Geometrie, die, jenen Theilen entsprechenden Aufgaben dieser Sammlung, erst löset, ehe er die Theorieen des Hauptwerkes weiter verfolgt. Wer aber diese Sammlung von Aufgaben, ohne das Hauptwerk zu studiren, benutzen will, verliert nichts, denn die citirten Sätze, die sich allerdings auf den zweiten Band des Lehrgebäudes beziehen, befinden sich größtentheils auch in anderen geometrischen Werken. Durch diese Anordnung, mögte die vorliegende Sammlung, sich wol von ähnlichen Sammlungen unterscheiden, in welchen die Aufgaben so geordnet sind, wie sie zu einer bestimmten Gattung von Aufgaben gehören, gleich viel, welche Mittel zu ihrer Lösung angewendet werden müssen. Auch in gegenwärtigem

Buche, findet man die besonderen Gattungen von Aufgaben, in besonderen Theilen der einzelnen Abschnitte geordnet, nur ist diese Anordnung derjenigen untergeordnet, welche zuerst auf die Mittel zur Lösung, Rücksicht nimmt. So stehen z. B. die Aufgaben über die Verwandelung der Figuren, ohne Hülfe der Proportionen und der Aehnlichkeit, im ersten Theile des zweiten Abschnittes, und die Verwandelungen welche jene Lehren auch noch als Mittel voraussetzen, im zweiten Theile des vierten Abschnittes. Die Ueberschriften der verschiedenen Seiten, zeigen diese Eintheilung und Anordnung auf den ersten Blick. — Die einzelnen Aufgaben in den verschiedenen Theilen der Abschnitte, sind in solcher Folge vorgetragen, wie entweder die späteren eine nothwendige Folge der früheren sind, oder so, daß die schwereren den leichteren Aufgaben folgen. Dies mögte, besonders in Hinsicht der wechselseitigen Bedingung durch einander, bei den Aufgaben des zweiten und vierten Abschnittes vorzüglich der Fall seyn, weniger dagegen bei denen des ersten und dritten Abschnittes, wo jene nothwendige Folge, der Natur dieser Aufgaben weniger eigen ist, weshalb die Ordnung bei ihnen, mehr nach der Schwierigkeit ihrer Lösung sich richtet. Diese Bemerkung schließt aber eben so wenig eine gegenseitige Bedingung der Aufgaben dieser zuletzt genannten Abschnitte ganz aus, als das zuerst Gesagte hindern könnte, daß nicht einige an sich interessante Aufgaben, sobald sie nur dem ganzen Abschnitte entsprechen, den innigeren Zusammenhang der Aufgaben des zweiten und vierten Abschnittes, hin und wieder unterbrechen sollten. — Aus diesen Gründen habe ich diese Sammlung: systematisch geordnet, genannt.

Da der zweite Band des Lehrgebäudes, die gesammte Elementargeometrie nur synthetisch vorträgt; so werden die Mittel der algebraisch-analytischen Auflösungen, noch nicht als bekannt vorausgesetzt, daher denn auch alle in diesem Supplemente vorkommenden Uebungaufgaben, nur synthetisch aufgelöset werden. Das, in der Folge, den vierten Band des Lehrgebäudes begleitende Supplement, wird die Beispiele über die algebraische Art der Auflösungen allein abhandeln, indem es die Lehren der analytischen Geometrie, Trigonometrie ꝛc. begleitet. Dies hindert aber nicht, daß da, wo es dienlich ist, der geometrisch-analytische Weg, bei den folgenden Aufgaben angeführt wird. Es geschieht dies besonders bei den Aufgaben des dritten Abschnittes, und fast bei den meisten im vierten Abschnitte, jedoch immer nur in Anmerkungen, da die synthetische Methode, die Hauptabsicht bei dieser Sammlung bleibt. Nur da, wo die Aufgabe mehrere Fälle enthält, wird zuweilen der spätere Fall, durch die analytische Methode sogleich gelöset, um an ihm diesen Weg beim früheren Falle, zugleich mit zu erläutern (z. B. Aufg. 139. 2ter Fall). Eine Einleitung zu dieser Sammlung, giebt übrigens eine kurze Theorie der Aufgabe im Allgemeinen an. — Für die möglichst größte Mannigfaltigkeit der Auflösungen, mußte gleichfalls in einer, für die Uebung bestimmten Aufgabensammlung, gesorgt seyn, nur dürfte solche Mannigfaltigkeit, nicht allein in der mehrfachen Lösung derselben Aufgabe bestehen, sobald nicht eine neue Lösung durch ihre Eigenthümlichkeit, einen, für die Folge vielleicht nützlichen oder wichtigen Weg anzeigte (z. B. die zweite Auflösung der 119ten Aufgabe); sondern diese Verschiedenheit, mußte bei verschiedenen Aufgaben angewendet werden. Ueber die häufig vorkommende Verbindung des Beweises mit der Auflösung, spricht sich die Einleitung gleichfalls aus. Daß manche interessante, elementar aufzulösende Aufgabe, nicht in diese Sammlung aufgenommen ist, hat seinen Grund in der, größtentheils auf algebraischem Wege gefundenen Auflösung, wenn selbst der Beweis sehr einfach synthetisch geführt werden kann *). Die Aufgaben des vierten Abschnittes, geben vorzüglich Gelegenheit, die mannigfaltigen Anwendungen der allgemeinen Theorie der Proportionen, und die eigenthümlichen Wendungen zu zeigen, welche man den Auflösungen und Beweisen durch jene Theorie geben kann, und ist auf diese Mannigfaltigkeit sehr Rücksicht genommen. — Oft bedingt eine Aufgabe einen eigenen Lehrsatz, und in solchem Falle ist auch in dieser Sammlung, der Satz mit seinem Beweise angegeben (z. B. Aufg. 122. Zusatz 2.). — Diese Bemerkungen rechtfertigen gewiß die Benennung: synthetisch aufgelösete Aufgaben, wie der zweite Titel dieser Sammlung, die Auflösungen nannte.

---

*) Ich nenne hier nur als Beispiel die dritte geometrische Aufgabe, in meiner Sammlung neuer mathematischer Aufgaben, S. 67.

Alle Aufgaben sind vollständig aufgelöset und die Beweise ausführlich geführt, es sey denn daß ein besonderer, noch hinzugefügter Fall, beides überflüssig macht. Dies kann aber den Löser nicht abhalten, die Auflösung erst selbst zu versuchen, und sich bei den angeführten Lösungen und Beweisen erst dann Rath und Hülfe zu holen, wenn er beides nicht selbst finden kann. Auch ist diese völlige Durchführung der Lösung, dem Zwecke des ganzen Lehrgebäudes angemessen, welches nichts weniger als ein bloßer Leitfaden, seyn soll. Aber es bleibt dem Löser auch noch manches selbst zu denken übrig; denn von jeder Aufgabe ist nur der Hauptfall, wo möglich in seiner größten Allgemeinheit angeführt, und in besonderen Zusätzen, ist erst auf die Mannigfaltigkeit der Fälle, so wie auf verschiedene Lösungmethoden aufmerksam gemacht, wo dann oft nur so viel ausgeführt wird, als zur Hülfe nothwendig ist. Durch einfache Combinationen der verschiedenen Aufgaben, ist die Menge derselben ganz ungemein zu vervielfältigen; der Anfänger wird darauf, wie auf alles hier kurz Gesagte, an den gehörigen Stellen im Buche aufmerksam gemacht, und der Lehrer, der sich dieser Sammlung gewiß mit Nutzen bei seinen Schülern bedienen kann, wird in den angezeigten Verbindungen und Aenderungen der Aufgaben, Stoff genug zu neuen Aufgaben finden. Auch wird bei dergleichen neuen Fällen, oft auf besondere Beziehungen hingewiesen, welches gewöhnlich in Form von Fragen, zu denen der Leser die Antwort selbst zu finden hat, geschieht. Je nachdem der Löser durch die früheren Aufgaben schon geübt worden ist, wird in späteren Aufgaben oft nur das, denselben Eigenthümliche, durchgeführt, und für das bereits Bekannte der Weg angedeutet, der dann leicht selbst weiter zu verfolgen ist. Dies geschieht besonders in Hinsicht der Bestimmtheit der Resultate u. s. w., wie man es z. B. von der 12ten bis zur 17ten Aufgabe leicht bemerken wird. Die Aufgaben über die Constructionen bei den Parallelogrammen, gewähren besonders eine gute Uebung im Aufsuchen der verschiedenen Fälle, welche bei den Constructionen einer Figur in Hinsicht der gegebenen Stücke, stattfinden können. Die sieben, erst durch Hülfe der Kreislehre zu construirenden Aufgaben beim Rhomboides, mußten dieses neuen Mittels wegen, bis zum zweiten Theile des dritten Abschnittes, ausgesetzt werden. — Der Anhang zum zweiten Abschnitte, nemlich die Anwendung der Berechnung der Figuren auf Verwandelung und Theilung, rechtfertiget die Stelle, welche ihm dort angewiesen ist, durch das, was daselbst in der Einleitung gesagt wird. Dennoch sind späterhin nicht solche Anwendungen der Kreisberechnung, in diese Sammlung aufgenommen, indem sie dem Zwecke der bloßen Constructionen in der Ebene, noch ferner liegen, als die Anwendungen der Lehren jenes Anhanges. — Gern hätte ich noch einen fünften Abschnitt, vermischte Aufgaben enthaltend, hinzugefügt, wenn nicht vielleicht schon die Stärke gegenwärtigen Supplementes, die Grenzen eines solchen überschritten hätte, die ich, troß der größtmöglichsten Zusammendrängung dieser Aufgaben, nicht gut mehr einschränken konnte, weshalb ich auch meinen Wunsch, diesem Supplemente: eine Theorie der Constructionen im Raume mittelst der Projectionen, hinzuzufügen, nicht wol habe erfüllen können.

Unter den benutzten Werken, führe ich hier nur Grüson's Geodäsie. an, in so weit mir dieses, einen anderen Zweck als meine Sammlung habende schätzbare Werk, dienen konnte. Verschiedene Werke gaben mir einzelne Aufgaben, die oft erst durch neu zu erfindende Aufgaben, in der Gestalt vorgetragen, und mit anderen Aufgaben in die Verbindung gebracht werden konnten, in welcher sie hier erscheinen.

Das Supplement erscheint drittehalb Jahre später als es versprochen ist. — Der Grund hiervon liegt zunächst in meiner, zu Ende des Jahres 1820. erfolgten Versetzung aus Berlin. Die Fortsetzung der, damals bereits begonnenen Ausarbeitung dieses Supplementes, erfolgte unmittelbar, sobald die Möglichkeit eintrat, daß ich meinen Aufenthalt hierselbst, vielleicht auf längere Zeit, als fixirt ansehen dürfte. — Mögte diese Unterbrechung dem Werke nichts geschadet haben, und die gütigen Nachfrager nach dieser Sammlung, durch eine desto vollkommnere Arbeit, für ihr Warten möglichst entschädiget werden, so wie ich wünsche, daß das Buch Freunden der Mathematik Nutzen und Vergnügen, Kennern aber Befriedigung gewähren möge.

Berlin, im August 1823.

A. von Forstner.

Kurze Uebersicht des Inhaltes des ersten Supplementes.

Einleitung.

Ueber die Aufgabe.

Wenn die durch irgend eine Wissenschaft begründeten Wahrheiten und Lehren, in mannigfaltigen Verbindungen unter einander dazu dienen sollen, um gewisse Resultate zu erzeugen, welche entweder gemachte Forderungen, Bedürfnisse u. dgl. m., befriedigen, oder welche uns in den Anwendungen des Gelernten üben sollen; so ist es die Aufgabe welche uns mit dem Verlangten bekannt macht. Die Art und Weise wie die Aufgabe erfüllt wird, ist die Auflösung, und die Ueberzeugung von der Richtigkeit der Erfüllung, giebt uns der Beweis.

Es kann hier unmöglich der Ort seyn, eine vollständige Theorie der Aufgabe begründen und aufstellen zu wollen, die ihrem ganzen Umfange nach ein Gegenstand philosophischer Untersuchung ist *); sondern nur so viel von der Aufgabe soll hier vorangeschickt werden als nöthig ist, einen klaren Begriff von den Aufgaben über-

*) Man sehe über die Theorie der Aufgaben unter andern das 7te Hauptstück, im 1sten Bande von Lamberts neuem Organon, S. 276 u. fgd., so wie daselbst das 6te Hauptstück von den Beweisen handelt.

haupt, und von den mathematischen so wie hier wieder von den geometrischen besonders, zu erlangen.

Es giebt in der Mathematik gewisse Aufgaben, welche dazu dienen, um diejenigen Mittel vorzubereiten, die wiederum zum Beweise späterer Lehren dienen, oder die an sich eine eigene Theorie bilden; und solche Aufgaben gehören in den Vortrag der Mathematik selbst hinein. Weit größer ist aber die Menge derjenigen Aufgaben, welche weniger jenen eben genannten Zweck haben, als daß sie eine Uebung in der Anwendung der erlernten Sätze gewähren sollen, und solche Aufgaben sind in der Folge oft von großem Nutzen in den praktischen Anwendungen der Mathematik. Die Menge dieser Aufgaben ist unendlich, wie die Anforderungen selbst unendlich seyn können; man hat daher die wichtigsten unter ihnen, so wie diejenigen, welche als Hauptaufgaben anzusehen sind und viele besondere Fälle unter sich begreifen, aus jener Menge herauszuwählen, und sie in solcher Ordnung wo möglich aufzustellen, daß sie selbst ein systematisches Ganze bilden. Unter den isolirt stehenden Aufgaben dagegen, müssen nur die vorzüglichsten ausgewählt werden, die dann ihren Ort nach der auf sie anzuwendenden Theorie, unter den übrigen Aufgaben finden. Dies zu thun ist der Zweck der, die Lehrbücher begleitenden Sammlungen von Uebungaufgaben.

Wenn eine Aufgabe gegeben wird, so hat man vor allen Dingen erst zu untersuchen, ob dieselbe auch an sich möglich ist oder nicht. — Der Grund warum diese Untersuchung gewöhnlich unterlassen wird, ist wol der, weil die Aufgaben größtentheils nur so gegeben werden, daß an ihrer Möglichkeit nicht einmal gezweifelt wird. Die Folge von dieser Unterlassung ist theils der Verlust einer, durch jene Prüfungen zu gewinnenden Uebung und Fertigkeit im Vergleiche der Zusammenstimmung gegebener und daraus zu findenden Dinge (Größen u. s. w.); theils hat man in vielen Fällen auch unnütz Mühe und Zeit verschwendet, und kommt zu spät darauf, daß die Aufgabe unlösbar war. — Die unmöglich aufzulösenden Aufgaben sind aber selbst theils solche, die einen offenbaren Widerspruch in sich tragen, der gemeiniglich sogleich als Unsinn erkannt wird, oder sie sind solche, wo die Forderungen den Lehren der Wissenschaft widersprechen, und auch hier ist selten der Grund so verborgen, daß er nicht bei aufmerksamer Betrachtung bald in die Augen fallen sollte. Auf jeden Fall hat man sich jedoch von der Unauflösbarkeit einer Aufgabe genau Rechenschaft zu geben und den Beweis davon zu führen, was freilich in manchen Fällen sehr schwierig ist. — Hat man gefunden, daß eine Aufgabe in sich nichts Unmögliches enthält, so ist eine andere Frage die: ob dieselbe eine aufzulösende sey oder nicht; denn viele Aufgaben finden in den vorausgesetzten und bekannten Lehren, noch gar nicht die Mittel vorbereitet, die zu ihrer Auflösung führen; natürlich muß die Auflösung auch hier unterbleiben, aber wiederum Rechenschaft von den Gründen gegeben werden, warum sie unterblieb. Auch die hierzu nöthige Prüfung wird in der Regel unterlassen, aus denselben Gründen wie vorher bei den möglichen und unmöglichen Aufgaben angeführt wurde; der Schade hiervon ist derselbe, die Prüfung aber fast immer schwieriger als dort. — Wenn ein Bedürfniß im Leben die Lösung einer Aufgabe fordert, so kann man im Voraus überzeugt seyn, daß sie an sich möglich ist, denn wäre sie es nicht, so könnte das Bedürfniß der Aufgabe unmöglich durch sich selbst erzeugt seyn, oder man hätte die Aufgabe zu schnell für eine an sich nothwendige erkannt; beides gegen unsere Annahme. Aber die Frage ist allerdings noch problematisch, ob die Lösung solcher Aufgabe schon möglich ist oder nicht. — Wie diese Nothwendigkeit und die Theorie sich gegenseitig verhalten, liegt gewiß nicht verborgen, aber dies weiter durchzuführen, selbst nur für das Gebiet der Mathematik, ist hier nicht möglich.

Jede Aufgabe ist durch Bedingungen mehr oder minder beschränkt, und wenn diese Beschränkung auch so zu verschwinden scheint, daß man sie fast nicht erkennen kann, so liegt sie doch mindestens darin, daß gerade diese und keine andere Aufgabe gelöset werden soll. — Keinesweges macht aber die Menge der Bedingungen die Schwierigkeit der Auflösung aus; diese kann vermehrt oder vermindert werden durch die größere so wie durch die geringere Menge der Bedingungen. In den Bedingungen ist aber jedesmal das Mittel zu suchen, um über die Möglichkeit und Lösbarkeit, so wie über das Gegentheil hiervon zu entscheiden. Der besondere Fall der Aufgabe giebt hierzu die Regel an, und dem Geiste des Lösers wird diese Untersuchung, nach den weiter oben angeführten Grundzügen anzustellen, überlassen. — Man muß aber bei dem zur Aufgabe Gegebenen noch unterscheiden: die gegebenen Größen und die Bestimmungen zu deren Verknüpfungen. Beide Erfordernisse fallen nur bei den Aufgaben die möglichst allgemein sind zusammen; z. B.: man soll ein Paar Parallelen zeichnen; ist aber ein Punkt gegeben durch welchen die eine derselben gehen, oder gar noch eine Linie mit der die eine parallel laufen soll; so sieht man, daß hier schon bestimmte Größen gegeben sind*), mögen sie immerhin dem Löser in der Wahl selbst überlassen bleiben. Das Gegebene heißt im allgemeinen die Data der Aufgabe, die gegebenen Größen aber, besonders bei den geometrischen Aufgaben, die Stücke. Die zu den Auflösungen nöthigen Lehren, bestimmen gewöhnlich die Menge der Stücke so wie die Menge der

*) Wenn selbst der Punkt keine Größe an sich ist, so giebt er durch seinen Ort eine wichtige Bestimmung an.

möglich zu gebenden Verbindungen. Die folgenden Aufgaben werden oft Gelegenheit darbieten, alles hier allgemein Gesagte zu belegen.

Unter den möglichen Aufgaben sind ferner zu unterscheiden: die bestimmten von den unbestimmten Aufgaben. Erstere sind solche, wo das Resultat nur eines seyn kann, letztere Aufgaben dagegen lassen mehr Resultate, ja oft unendlich viele zu, wenn deren Menge nicht durch besondere Bestimmungen zwischen Grenzen eingeschlossen wird. Auch hier bleibt es stets dem besonderen Falle überlassen zu untersuchen, ob eine Aufgabe bestimmt oder unbestimmt ist, und es läßt sich höchstens allgemein sagen, daß eine Aufgabe um so unbestimmter sey, je allgemeiner sie gegeben ist, was jedoch noch Erläuterungen bedarf, die gleichfalls hier unterbleiben müssen. Für Aufgaben die zu einer bestimmten Gattung gehören, lassen sich zum Theil allgemeine Kennzeichen für die Bestimmtheit der Aufgabe anführen, die größtentheils in der Menge der Stücke und der Bedingungen ihren Grund haben.

Was die Auflösung der Aufgabe selbst anbetrifft, so ist es unmöglich allgemeine Regeln anzugeben, die unbedingt zur Auflösung jeder Aufgabe führen; denn die Wissenschaft wäre vollendet wenn eine oder einige solcher Regeln gegeben werden könnten. Höchstens sind es Wege die allgemein zeigen, wie man es anzustellen habe, damit die Lösung nicht ganz dem Zufalle überlassen bleibt; aber der Geist des Lösers der die Erfindung der Lösung erst erzeugen muß, ist unter keine Formel zu bringen. — Bald ist es der, doch nur untergeordnet mitwirkende Augenschein, bald die Aehnlichkeit einer besonderen Aufgabe mit anderen bekannten allgemeineren, bald die dunkele Vorstellung von der Art die Aufgabe zu lösen oder die Ahndung über den Zusammenhang der Aufgabe mit ihrer Lösung, u. dgl. m. *), was die erste Anregung zur Erfindung der Auflösung giebt. — Unter jenen vorher erwähnten Wegen finden wir nun zwei, die vorzüglich Beachtung verdienen, da sie auf eine wissenschaftliche Art die Lösung befördern helfen; und diese Wege sind der synthetische und der analytische. Wenn nemlich die Auflösung von ganz bekannten Operationen anfängt, und hierauf stets neue Mittel anwendet, bis sie zu einem Resultate gelangt das für das verlangte ausgegeben wird; so war dies die synthetische Methode der Lösung. Geht man aber von der Annahme der bereits vollzogenen Auflösung aus, und untersucht in welchen Verbindungen die zu findenden Größen mit den bekannten stehen, und gelangt so zu richtigen Sätzen oder zu einer nunmehr als nothwendig anerkannten Verknüpfung jener Elemente (d. h. der bekannten und unbekannten Größen) welche demnach die Auflösung bestimmen; so war dies die analytische Methode. Wie die eine das Umgekehrte der anderen ist, leuchtet gewiß sogleich ein, aber es ist auch nicht schwer zu finden, wie beide Methoden stets in einander begründet sind und sich gegenseitig bedingen; — ja man kann behaupten, jede synthetische Auflösung sey auf analytischem Wege gefunden, und bei jeder analytischen Auflösung ist die synthetische Darstellung erforderlich, wenn das Resultat wirklich erscheinen soll; es ist daher nur die Hauptrichtung des Weges, die über jede jener beiden Arten von Lösungen entscheidet. — Der analytische Weg an sich zerfällt für die geometrischen Aufgaben in zwei wesentlich verschiedenen Arten, nemlich: die geometrisch-analytische und die algebraisch-analytische Lösung. Während erstere nur im Gedanken jenen angezeigten Weg, höchstens durch Hülfe einer Figur zur Versinnli-

*) Man sehe auch das was die 2te Anmerkung der folgenden 71sten Aufgabe hierüber sagt.

chung jener Verbindungen, zurücklegt, bringt der letztere Weg durch Hülfe allgemeiner Bezeichnungen die gedachten Elemente in solche Verbindung, daß zwischen ihnen eine Gleichung formirt werden kann; und dann wird auf rein arithmetisch-algebraischem Wege, die unbekannte Größe berechnet und durch allgemeine Zeichen dargestellt. Dieses Resultat läßt sich nun in der Regel wieder in der Figur darstellen, aber das ganze Verfahren gehört der analytischen Geometrie an, die hier noch als unbekannt vorausgesetzt wird. Deshalb werden sämmtliche hier folgende Aufgaben nur auf synthetischem Wege gelöset, und nur zuweilen die geometrisch-analytische Auflösung in Anmerkungen gezeigt, wie bei den Aufgaben der ersten Abtheilung im dritten Abschnitte ausführlich geschieht, bei den früheren Aufgaben aber eben so leicht nachgewiesen werden könnte, und nur hier weggeblieben ist, weil Nachweisung dieser Methode an jenen Aufgaben vortheilhafter ist, überall aber nicht stattfinden konnte, ohne eine unnütze Weitläuftigkeit zu verursachen. Später finden sich gleichfalls noch zuweilen dergleichen Nachweisungen der geometrisch-analytischen Lösung, wo dies aus Gründen nöthig schien; der Leser aber wird der Uebung wegen wohl thun, diesen Weg überall wo er im Buche fehlt, selbst aufzusuchen.

Der Auflösung der Aufgaben selbst, sind nun die bildlichen Darstellungen der Begriffe durch Zeichen wesentlich, d. h. man bedarf der Constructionen, welche auf anschaulichem Wege die Verbindung der, die Auflösung bedingenden Begriffe nachweisen. In den ersten Erforderniſſen sind die Constructionen begründet auf den sogenannten Forderungen, welche die einfachsten Verrichtungen, die an sich weiter keiner Rechtfertigung ihrer Ausführung bedürfen, in sich schließen, und in so fern gleichsam die Grundsätze der Aufgabe bilden. Im weiteren Verfolge aber, beruhen die Auflösungen selbst auf Aufgaben, d. h. auf die verschiedenen Verknüpfungen der Forderungen die schon ein zusammenhängendes und bewiesenes Ganze bilden, und solche Aufgaben sind eben jene den Lehrbüchern größtentheils zugehörende, oder sie sind aus diesen durch Zusammensetzungen schon abgeleitet. Bei der Lösung geometrischer Aufgaben ist die Construction von Hülflinien und Hülfflächen fast immer nöthig; erstere bestehen öfter in der Erfüllung von bloßen Forderungen, als die Construction der Hülfflächen, wo fast immer besondere, ihre Darstellung begründende Lehren erfordert werden. Was die Construction dieser Hülffiguren anbetrifft, so entspringt diese aus der jedesmaligen Nothwendigkeit der Auflösung, und sind wieder keine allgemeine Regeln hierüber zu geben. — Endlich können viele Aufgaben auf mannigfaltigen Wegen aufgelöset werden; der kürzeste ist natürlich der vorzüglichste, und wird in den folgenden Aufgaben auf verschiedene Auflösungen, nur bei besonderer Veranlassung Rücksicht genommen werden.

Die Führung des Beweises für die Richtigkeit der Auflösung, wird bei den synthetischen Auflösungen ganz wie bei den Lehrsätzen vorgenommen, indem man von der Art der Lösung als Voraussetzung, zum Resultate als der Behauptung hinaufsteigt; die analytische Auflösung dagegen, hat ihren Beweis bereits in sich, wenn man nicht das was die Wege dieser Auflösungart darstellten, in entgegengesetzter Ordnung, also synthetisch aufstellt, wo der Beweis denn wie nach jenen Lösungen geführt wird. — Größtentheils sondert man den Beweis von der Auflösung, oft aber verbindet man beide Momente d. h. Auflösung und Beweis so, daß nach jedem einzelnen Theile der Lösung der Beweis als begleitend zugefügt wird, und dies ist bei sehr zusammengesetzten Auflösungen mit Vortheil zu thun, da der abgesondert gegebene Beweis voraussetzt, daß man den ganzen Gang der Lösung stets gegenwärtig habe. Ueber die Natur der Beweise das Nähere beizubringen, ist hier der Ort nicht *). Wenn auch sie oft verschieden geführt werden können, so ist auch bei ihnen der kürzeste Beweis in der Regel vorzuziehen.

Bemerkt sey nur noch über die Aufgabe, daß sie stets als Lehrsatz aufgestellt werden kann, und daß eigentlich jede synthetische Auflösung als eine Voraussetzung, das Resultat von ihr aber als Behauptung angesehen werden kann (das Ganze also als Lehrsatz), der der Beweis folgt. Eben so klar ist aber auch, daß jeder Lehrsatz zur Aufgabe werden kann, wenn man die durch ihn behauptete Wahrheit, erst als zu erforschen d. h. noch als problematisch setzt. Es ist hiernach schwer eine bestimmte Grenze zwischen der Aufgabe und dem Lehrsatze zu ziehen; allgemein läßt sich dies so sagen: jede Wahrheit die in der Folge dazu dient, die Constructionen bei andern Lehren zu begründen, muß in Form einer Aufgabe aufgestellt werden. Ob die bloßen Uebungaufgaben diese Anforderung stets erfüllen, ist gleichgültig, und ihre Lehre ist oft der letzte Zweck selbst, den man bei ihrer Aufstellung sich vorsetzte.

Anmerkung. Wenn in der Folge bei den Auflösungen und Beweisen auf geometrische Lehren hingewiesen wird, so geschieht dies durch G. §. 11, und bezieht sich solche Hinweisung auf den zweiten Band meines Lehrgebäudes der Mathematik, der auch als besonderes Lehrbuch der niederen Geometrie erschienen ist.

*) Siehe Lehrgebäude der Mathematik 1ster Band, allgemeine Einleitung, II. von den Beweisen.

Geometrische Aufgaben.

Erster Abschnitt.

Constructionen bei Triangeln und Parallelogrammen, bloß zur Verzeichnung dieser Ebenen aus denen sie bestimmenden Stücken.

(Für diesen Abschnitt wird die Kenntniß der fünf ersten Kapitel im zweiten Bande des Lehrgebäudes der Mathematik, vorausgesetzt.)

I. Constructionen bei Triangeln.

(Siehe Lehrgebäude der Mathematik, zweiter Band §. 85, 4.)

1ste Aufgabe. (Fig. 1.)

Einen Triangel aus zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

Gegeben: die Linien n und m, nebst dem Winkel q; dieser Winkel soll von den beiden Linien als Seiten des Triangels, eingeschlossen werden *).

*) Man wird hier so wie bei den folgenden Aufgaben, leicht die

Auflösung. Ziehe eine Linie AC = m, trage an einen ihrer Endpunkte den Winkel BAC = q an (G. §. 50, 2.), mache den zweiten Schenkel AB = der zweiten gegeben Linie n, und verbinde die Puncte B und C; so ist △ABC der verlangte Triangel.

Beweis. Daß der erzeugte Triangel ABC die gegebenen Stücke unter der festgesetzten Bedingung wirklich enthält, folgt hier aus der gemachten Construction; daß aber der gefundene Triangel der einzig mögliche ist, welcher jene gegebenen Stücke enthält, d. h. daß derselbe bestimmt ist, folgt aus G. §. 44.; denn alle Triangel die man aus jenen Stücken unter der gedachten Bedingung construiren würde, wenn die Lage der Triangel auch noch so mannigfaltig ausfallen mögte, müssen nach jenem Lehrsatze congruent seyn. Es ist daher der Triangel ABC, völlig bestimmt *). — Welches zu beweisen war.

Zusatz. Daß die Aufgabe d. §. 6. für jeden Fall der Größe der Linien und des gegebenen Winkels möglich, also hierbei gar keine Einschränkung vorhanden ist, sobald der Winkel nur ein concaver Winkel (G. §. 28, I, e) ist (G. §. 120, Zusatz); wird aus der Construction wol sogleich einleuchtend seyn, da jenes Auf- und Antragen, so wie das Ziehen der Verbindunglinie, ohne Rücksicht auf die Größe der gegebenen Stücke, vollzogen wurde.

Anmerk. 1. Jenes in der Auflösung erwähnte Auftragen der Linien, und Verbinden der beiden Puncte, waren Forderungen, dagegen das Abtragen des Winkels, eine vorausgesetzte Aufgabe war, die in der Geometrie gelehrt wird, und worauf wir uns daher bloß beriefen.

---

gegebenen Größen von den gemachten Bedingungen unterscheiden. (Siehe die Theorie der Aufgabe in der Einleitung.)

*) Vergleiche auch hiermit G §. 84.

Anmerk. 2. Für diese, so wie für die fünf folgenden Aufgaben, vergleiche man G. §. 85, 1.

2te Aufgabe. (Fig. 2.)

Aus drei Linien einen Triangel zu construiren, so daß diese Linien die Seiten desselben werden.

Gegeben: die Linien n, m und t *).

Voraussetzung **). Die gegebenen Linien müssen so beschaffen seyn, daß die Summe zweier, immer größer als die dritte Linie ist, weil sonst kein Triangel entstehen kann (G. §. 66.; vergleiche auch §. 67, besonders die Anmerkung daselbst).

Auflösung. Ziehe eine Linie AC gleich einer der gegebenen Linien, z. B. gleich der t; aus dem einen Endpuncte derselben, beschreibe man mit einer zweiten der gegebenen Linien, z. B. aus A mit der n, den Kreisbogen df ***), eben so aus dem anderen Endpuncte C mit der dritten Linie m den Bogen hg; den Punkt B, wo beide Bogen sich schneiden, verbinde man mit den Puncten A und C, so ist △ABC der gesuchte Triangel.

Beweis. Daß der Triangel ABC die gegebenen Linien enthält, folgt wiederum aus der Construction, denn die Linie AB ist = der n, weil B ein Punkt in dem Bogen df, also AB ein Halbmesser für diesen Bogen ist (G. §. 18, 1.); eben so ist BC = m, und AC wurde gleich t gemacht. Daß der Triangel durch jene drei Linien bestimmt ist, folgt aus G. §. 49., mittelst derselben Betrachtungen, die bei der ersten Aufgabe im Beweise, angestellt wurden. Der Schnitt der beiden Kreis-

---

*) Die Bedingung liegt hier, so wie in der vorigen Aufgabe, klar vor Augen.

**) Vergleiche die Einleitung.

***) Dies ist eine Forderung; der Bogen dient hier der Kürze halber für einen ganzen zu beschreibenden Kreis.

bogen, folgt aber als **nothwendig außerhalb der Linie** AC, denn $n+m$ ist **größer** als $t=AC$ (laut Voraussetzung); verlängert man daher den Bogen dk bis zur Linie AC in p, so ist $Ap=AB=n$, folglich $Cp<CB(=m)$. Würde man daher die m von C aus auf CA auftragen, so fällt der zweite Endpunct über p hinaus, und **innerhalb** des Kreises, von dem dp ein Bogen ist; denn: stellt man sich den Bogen dk zum Kreise BED ergänzt vor, und CB fiele **außerhalb** dieses Kreises z. B. in F, so wäre ja $CF>DC$, d. h. $CB>AD+AC$, oder $m>AB$*)$+AC$, oder $m>n+t$, was gegen die Voraussetzung ist. Indem also jener zweite Endpunkt der Linie m, **innerhalb** des Kreises BED fällt, der Mittelpunct des zweiten zu beschreibenden Kreisbogens (oder auch des Kreises) aber C ist, der **außerhalb** des Kreises liegt, so muß die Kreislinie bei ihrer Construction jenen ersten Kreis wieder verlassen, also dessen Kreislinie irgend wo schneiden. Ganz eben so würde dies bewiesen werden, wenn auch die Linie $m >$ als AC wäre, ja selbst wenn n und m beide größer als AC sein sollten, denn sie müssen doch immer nach der Voraussetzung so beschaffen seyn, daß sie einzeln mit der AC zusammen genommen, größer als die andern sind.

Anmerk. Der hier gegebene Beweis für die Nothwendigkeit des Schnittes, darf nicht als überflüssig angesehen werden, wenn er auch etwas weitläuftig ist; der Anfänger kann ihn zur Uebung bei den verschiedenen Lagen der Figur, wiederholen. Wir erhalten erst durch diesen Beweis, die Ueberzeugung von der jedesmal stattfindenden Construction des Triangels, unter der, zu Anfang gemachten Bedingung. Die Lehre vom Kreise ist übrigens hier nicht mehr in Betracht gekommen, als sie schon bei den ersten Sätzen der Triangel nöthig war. (S. §. 18, Anmerk. 1.).

*) Es ist $AB=AD$ (S. §. 18, 1.).

3te Aufgabe. (Fig. 3.)

Aus einer Linie und zwei Winkeln einen Triangel zu construiren, so, daß die Winkel der Linie, welche Seite des Triangels werden soll, anliegen.

Gegeben: die Linie n, ferner die Winkel p und q.

Voraussetzung. Die Summe der beiden gegebenen Winkel, muß kleiner als zwei rechte Winkel seyn, also $p + q < 2R$, weil sonst nach G. §. 58., kein Triangel daraus zu construiren ist.

Auflösung. Man nehme eine Linie $AC =$ der n, und trage zu einer Seite derselben, an die Endpuncte, wechselseitig die gegebenen Winkel, nach G. §. 50, 2., an, so daß $\angle ABC = p$ und $\angle BCA = q$ wird; die beiden Schenkel verlängere man, bis sie in B einander schneiden; so ist $\triangle ABC$ der gesuchte Triangel.

Beweis. Auch hier ist es aus der Construction klar, daß der gefundene Triangel die gegebenen Stücke unter der gemachten Bedingung enthält; und daß derselbe völlig bestimmt ist, folgt aus G. §. 60., mittelst der, in der ersten Aufgabe erwähnten Betrachtung. Daß aber die Schenkel der beiden, an die AC construirten Winkel, sich verlängert schneiden müssen, was doch durchaus nöthig ist, folgt (aus G. §. 96.) nach unserer Voraussetzung. Zugleich sehen wir hieraus, daß unter jener Annahme, der Triangel immer entstehen muß.

4te Aufgabe. (Fig. 4.)

Ein Triangel soll durch eine Linie und zwei Winkel bestimmt werden, wovon der eine Winkel der Linie (als Seite) anliegen, der andere Winkel aber, ihr im Triangel gegenüber liegen soll.

Gegeben: die Linie n, der $\angle p$ welcher anliegen, und der $\angle q$ welcher ihr gegenüber liegen soll.

Voraussetzung. Die Summe der beiden gegebenen Winkel muß kleiner als $2R$ seyn; ebenfalls wegen G. §. 58.

Auflösung. Wird die Linie $AC =$ der n gemacht, und der $\angle BAC =$ dem $\angle p$ der ihr anliegen soll; trägt man ferner an einen beliebigen Punct z. B. an D in der Linie AB den zweiten Winkel $q = ADE$ an, und zieht alsdann durch den zweiten Endpunkt C der Linie AC, eine Linie CB parallel dem Schenkel DE (G. §. 97. Zusatz 1.), bis die Linie AB im Puncte M geschnitten wird; so ist $\triangle AMC$ der gesuchte Triangel.

Beweis. Da $\angle CAD + \angle ADE$ oder $\angle p + \angle q < 2R$ sind, so müssen sich die Linien AC und DE irgend wo schneiden (G. §. 96.), folglich schneidet sich auch die AC mit der MC, die parallel der DE gemacht wurde (G. §. 91. Zusatz). Es entsteht also immer ein Triangel nach unserer Construction. Da nun $DE \# MC$ ist, so ist auch $\angle ADE = \angle AMC = \angle q$ (G. §. 97, 1.), weshalb der erzeugte Triangel die gegebenen Stücke unter den gemachten Bedingungen enthält. Daß aber endlich der Triangel auch der einzig mögliche für diesen Fall ist, lehrt §. 61. der Geometrie, wobei wiederum die, in den früheren Aufgaben erwähnten Betrachtungen, wiederholt werden können.

Anmerk. 1. Da die Summe aller Winkel des Triangels gleich $2R$ ist (G. §. 105.), so hätte man auch den Winkel suchen können, der mit den beiden gegebenen Winkeln p und q, zusammen $2R$ ausmacht, und wird dieser Winkel alsdann der Winkel ACM, d. h. der zweite, der Linie AC anliegende Winkel; so wäre alsdann diese Aufgabe, auf die dritte Aufgabe zurückgeführt.

Anmerk. 2. Da durch zwei Winkel eines Triangels, auch der dritte bekannt ist; so werden oft die beiden Lehrsätze §. 60. und §. 61. der Geometrie, worauf diese und die vorige Aufgaben beruhen, als ein Satz dargestellt; weil aber in dem Kapitel, wo die Congruenz der Triangel g.lehrt wird, noch nicht jener Satz von der Summe der Winkel jedes Triangels bekannt ist, wodurch doch erst der dritte Winkel mit zweien anderen bestimmt werden kann, sondern weil jener Satz erst in der Theorie der Parallelen gelehrt wird; so müssen allerdings jene Sätze, als zwei besondere Lehrsätze aufgestellt und bewiesen werden.

Zusatz. Man sieht aus der Auflösung unserer Aufgabe zugleich, wie die Aufgabe zu lösen ist: durch einen Punkt C außerhalb einer Linie AB, eine Linie CM zu ziehen, die mit der AB einen gegebenen $\angle q$ macht.

5te Aufgabe. (Fig. 5.)

Es sind zwei ungleiche Linien und ein Winkel gegeben; man soll einen Triangel construiren worin jene Stücke vorkommen, und wo der gegebene Winkel, der größeren der beiden Linien gegenüber liegt.

Gegeben: der Winkel n, ferner die Linien h und k, wo $k > h$ ist; der Winkel n soll also der Linie k gegenüber liegen.

Auflösung. Wird eine Linie AB gleich der kleineren der gegebenen Linien, also gleich der h gemacht, trägt man alsdann den $\angle n$, an einen Endpunct z. B. an B dieser Linie an, so daß $\angle ABE = n$ wird; und beschreibt man jetzt aus dem zweiten Endpunkt A mit der größeren Linie k nach der Linie BE hin einen Bogen pq, d. h. schneidet man mit der K von A aus die BE in C, so ist, wenn A mit C verbunden wird, $\triangle ABC$ der gesuchte Triangel.

Beweis. Da $k > AB$ angenommen wurde, so ist auch k größer als der Perpendikel AD, welchen man von A aus auf die BC oder auf deren Verlängerung fällen kann, indem schon $AB > AD$ ist; (S. §. 65, 2, a.); daher muß auch die k, irgendwo die Linie BE schneiden, so daß der $\angle n$ oder $\angle ABE$ ihr gegenüber zu liegen kommt, bei jeder Größe die auch $\angle n$ haben mag. Hierdurch sehen wir also ein, daß die Aufgabe bei jeder Größe der gegebenen Stücke möglich seyn

seyn muß, versteht sich, daß $\angle n$ selbst nie grösser als ein concaver Winkel seyn darf *). Daß ferner der gefundene Triangel die gegebenen Stücke unter den gemachten Bedingungen enthält, zeigt die Construction, und daß der Triangel völlig bestimmt ist, lehrt §. 71. der Geometrie.

6te Aufgabe. (Fig. 6.)

Einen Triangel zu bestimmen aus zwei Seiten und dem, der kleineren von beiden gegenüber liegenden Winkel.

Gegeben: die Linien n und t, so wie der $\angle q$; es ist $n > t$, und der $\angle q$ soll der t gegenüber liegen.

Voraussetzung. Der gegebene Winkel q muß, da er der kleineren Seite **) im Triangel gegenüber liegen soll, spitz seyn (G. §. 62. Zusatz); ob die beiden gegebenen Linien, beliebig lang seyn können, wird die Auflösung und der Beweis sogleich lehren; eben so werden wir sehen, daß noch eine nähere Bestimmung über die Lage der kleineren jener Linien, gemacht werden muß.

Auflösung. Ziehe eine Linie $AB =$ der grösseren gegebenen Linie n, trage an einen ihrer Endpuncte, z. B. an A, den $\angle q = \angle BAF$ an; aus dem zweiten Endpuncte jener Linie, also aus B, schneide man mit der Linie t, d. h. mit der kleineren der gegebenen Linien, die unbestimmt lange Linie AF, in C oder in E; verbindet man jetzt B mit einem oder mit beiden Puncten C und E, so erhält man zwei Triangel ABE und ABC, welche beide den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

*) Es sind daher auch bei dieser Aufgabe, keine weitere Voraussetzungen über die Größe der Stücke gemacht.

**) Ob diese Seite die kleinste im Triangel ist, bleibt hierbei gleichgültig, das hängt noch von der dritten sich ergebenden Seite ab.

Beweis. Es ergiebt sich auch hier wiederum aus der Construction, daß die erzeugten Triangel, beide die gegebenen Stücke, unter der gemachten Bedingung enthalten. Aber, eben weil wir zwei Triangel hier bekommen, so ist die Aufgabe unbestimmt, wenn nicht näher bezeichnet wird, welcher jener beiden Triangel der verlangte seyn soll, welches dadurch bestimmt wird, daß man entweder denjenigen Triangel verlangt, wo der, der größeren beider gegebenen Seiten gegenüber liegenden Winkel ein stumpfer, oder den wo er ein spitzer Winkel ist, da man hiernach $\triangle ABE$ (wo $\angle BEA$ stumpf ist) oder $\triangle ABC$ (wo $\angle BCA$ spitz ist) erhält. Daß man vom Puncte B aus, nach der Linie AF, zwei gleich lange Linien mit der t ziehen kann, folgt aus G. §. 65, 2, e, und liegen sie zu beiden Seiten des Perpendikels AD, den man vom Puncte B aus, auf die unbestimmt lange AF fällen kann. Was diese Linien übrigens weiter für Betrachtungen darbieten, ist G. §. 65, 2. gelehrt. — Allein, wenn die Linie t, kleiner als der Perpendikel AD ist, gegeben wird, so erhält man, indem die Lage der Linie AF, so wie die des Punctes B bereits völlig bestimmt ist, gar keinen Schnitt in der AF (G. §. 65, 2, a.); und hierin liegt wieder eine Einschränkung der Aufgabe, daß man nemlich wissen muß, ob die kleinere der beiden gegebenen Linien, auch größer als jener Perpendikel ist; ist sie kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich, und ist sie ihm gleich, so ist $\triangle ABD$, d. h. ein rechtwinklicher Triangel der erzeugte Triangel. Da übrigens $t < n$ gegeben ist, so kann der Schnitt mit der Linie AF, nicht über den Punct A hinaus, d. h. auf den Schenkel des Nebenwinkels von $\angle BAF$ fallen, welches aus G. §. 65, 2, c folgt. — Jene beiden Einschränkungen, wozu noch die, vor der Auflösung genannte Voraussetzung gehört, müssen also wohl gemerkt werden; zwei von ihnen gehören zur Möglichkeit *), die dritte zur Bestimmtheit **) der Aufgabe. Ist aber alles dieses gehörig festgesetzt, so wird der erzeugte Triangel wiederum völlig bestimmt seyn, denn nach G. §. 73, ist jeder Triangel mit ihm congruent, welcher dieselben Stücke, unter denselben Bestimmungen und Voraussetzungen, enthält ***).

Anmerk. Die bis hierher gelöseten sechs Aufgaben, entsprechen den sechs Lehrsätzen der Congruenz der Triangel. — Siehe G. §. 74. und §. 85, 1.

7te Aufgabe. (Fig. 7.)

Einen gleichschenklichen Triangel aus seinen Stücken zu bestimmen.

Auflösung. Da beim gleichschenklichen Triangel durch eine der gleichen Seiten die andern, und durch einen der gleichen Winkel der anderen, schon mit bekannt ist (G. §. 45. und §. 47.); so darf man, wenn eine jener Seiten gegeben ist, die andere nicht auch besonders geben, und eben so bei jenen Winkeln. Die verschiedenen zu gebenden Stücke führen nun auf folgende Fälle, welche auf die bereits gelöseten Aufgaben zurückgeführt werden können:

1. Wenn eine der gleichen Seiten und der ungleiche Winkel gegeben sind. — Hier erhalten wir die erste Aufgabe. Uebrigens ist die Größe jenes Winkels willkührlich.

2. Wenn eine der gleichen Seiten und die ungleiche Seite gegeben werden. — Hier entsteht die zweite Aufgabe.

3. Wenn die ungleiche Seite und einer der gleichen Winkel gegeben sind. — Die dritte Aufgabe führt hier zur Auflösung. Der gegebene Winkel muß spitz seyn.

*) Die Größe des gegebenen Winkels, und der kleineren Seite, letztere in Hinsicht des gedachten Perpendikels BD.

**) Welcher jener beiden Triangel der verlangte ist.

***) Vergleiche G. §. 72. mit dieser Aufgabe.

4. Eine der gleichen Seiten und einer der gleichen Winkel sind gegeben. — Hier führt die vierte Aufgabe zur Auflösung; auch kann man sich der fünften so wie der sechsten Auflösung bedienen, da zwei Seiten und der, der einen von beiden (die in diesem Falle weder die größere noch die kleinere ist) gegenüber liegender Winkel gegeben ist. Da bei diesem, so wie bei dem 3ten Falle, der gegebene Winkel spitz seyn muß (G. §. 59, 2.), so kann die Frage, in Hinsicht eines der beiden Triangel (siehe die 6te Aufgabe) nicht entstehen. Eben so muß der Schnitt hier immer möglich seyn, da der, in der 6ten Aufgabe erwähnte Perpendikel, hier auf die Seite des spitzen Winkels fällt u. s. w. (G. §. 59, 4.).

5. Die ungleiche Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel sind gegeben. — Hier kann man entweder den Nebenwinkel des gegeben Winkels suchen, welcher der Summe der beiden gleichen Winkel, gleich ist, daher die Hälfte desselben, einen der gleichen Winkel giebt, wodurch dieser Fall auf den 3ten Fall zurück geführt wird; oder man verfährt folgendermaßen: man trage auf die Schenkel des gegebenen ungleichen Winkels FAG (Fig. 7.); zwei beliebige doch gleiche Linien AC und AE auf, und verbinde C mit E, so ist $\triangle$AEC gleichschenklich, und die Winkel E und C haben die Größe, die für sie die einzig mögliche ist, d. h. für die gleichen Winkel eines gleichschenklichen Triangels von jenem ungleichen Winkel *). Da aber die Grundlinie EC noch nicht gleich der gegebenen Linie seyn wird, so nehme man die gegebene Grundlinie und trage sie von C aus auf CE, so daß CD gleich derselben wird; durch D ziehe man eine Parallele DB mit der AE (nach G. §. 87, 2.) bis die AC geschnitten wird; so ist $\triangle$BDC der gesuchte Triangel. Denn $\angle$DBC $=$ $\angle$EAC (G. §. 97, 1.), gleich dem gegebenen Winkel, ferner $\angle$BDC$=$$\angle$AEC$=$$\angle$BCD,

*) Dies folgt einfach aus der zuerst erwähnten Betrachtung.

d. h. $\triangle BDC$ ist gleichschenklich (G. §. 47.), hat die gegebenen Stücke, und ist der einzig mögliche oder völlig bestimmte Triangel, eben der Größe der gleichen Winkel wegen.

Anmerk. 1. Es bedarf keiner Erinnerung, wie die Construction ferner ausgefallen wäre, wenn die gegebene Grundlinie größer als CE sich gefunden hätte.

Anmerk. 2. Daß man aus den Seiten und Winkeln eines gleichschenklichen Triangels, keinen neuen Fall, außer den erwähnten fünf Fällen, für die Construction desselben finden kann; lehrt eine einfache Betrachtung dieser Art von Triangel.

Anmerk. 3. Vergleiche G. §. 85, 3.

8te Aufgabe.

Einen rechtwinklichen Triangel aus seinen Stücken zu bestimmen.

Auflösung. Indem der rechte Winkel beim rechtwinklichen Triangel sich schon von selbst versteht, so darf derselbe nicht erst besonders gegeben werden, sondern die übrigen Stücke müssen in solchen Verbindungen bekannt seyn, daß sie mit jenem Winkel als drittes Stück, nach einer der sechs ersten Aufgaben, den Triangel bestimmen. Deshalb ist es aber auch wiederum nur nöthig, die hierbei vorkommenden Fälle aufzuzählen, und sie auf eine jener Aufgaben zurückzuführen. — Diese Fälle sind nun folgende:

1. Wenn die beiden Catheten *) gegeben sind. — Hier kommt Aufgabe 1 in Anwendung.

2. Wenn eine Cathete und der anliegende Winkel gegeben werden. — Daß dieser Winkel spitz seyn muß, folgt aus G. §. 59, 1. Die Aufgabe ist nun auf Aufgabe 3 zurückgeführt **).

---

*) Ueber die Erklärung der Catheten und der Hypothenuse, sehe man G. §. 64.

**) Daß kein Fall der Aufgabe 2 entspricht, ist klar, denn da der eine Winkel bekannt ist, können nicht noch 3 Seiten gegeben seyn.

3. Die Hypothenuse und der eine anliegende Winkel sind gegeben. Auch hier ist der Winkel natürlich spitz, und die Auflösung folgt aus der vierten Aufgabe.

4. Eine Cathete und der gegenüber liegende (spitze) Winkel sind bekannt. — Auch jetzt führt die vierte Aufgabe zur Auflösung.

5. Eine Cathete und die Hypothenuse sind gegeben. — Letztere Linie muß größer als die erstere seyn (G. §. 65, 1.). — Hier tritt die Auflösung der fünften Aufgabe ein.

6. Soll ein rechtwinklich gleichschenklicher Triangel construirt werden, so ist derselbe aus irgend einer seiner Seiten bestimmt. Denn: ist eine Cathete gegeben, so haben wir die erste Aufgabe, und ist die Hypothenuse gegeben, so kann man die Auflösung auf die dritte oder vierte Aufgabe zurückführen, indem ja alle Winkel eines solchen Triangels schon bestimmt sind (G. §. 106, 5.), daher diese auch nicht besonders gegeben werden dürfen.

Anmerk. Auch hier giebt es keinen neuen Fall, wie eine einfache Betrachtung eines rechtwinklichen Triangels zeigt. (Vergleiche G. §. 85, 3.)

Zusatz.

Wir haben uns durch die bis hierher gelöseten Aufgaben hinlänglich überzeugt, daß ein Triangel stets durch drei seiner Stücke völlig bestimmt ist, sobald sie nur so gegeben werden, daß den Bedingungen der Congruenz der Triangel entsprechen wird. Wenn bei den Fällen der beiden letzten Aufgaben, auch nur zwei Stücke scheinen gegeben zu seyn, so ist das dritte stillschweigend mitgegeben. — Werden weniger wie jene drei Stücke gegeben, so ist die Aufgabe unbestimmt, denn viele Triangel, die noch keinesweges unter einander congruent zu seyn brauchen, können deshalb doch jene Stücke enthalten; noch viel weniger aber, kann ein Stück jeden Triangel bestimmen. — Sind dagegen mehr als drei

Stücke gegeben, so wird die Aufgabe *unmöglich*; indem ein Triangel, welcher die drei ersten Stücke enthält, das vierte (oder gar noch mehr) entweder nur *zufällig* enthalten würde, und alsdann wäre es *überflüssig* dasselbe besonders zu geben, oder enthält er es nicht, so ist es, eben weil der Triangel schon ganz *bestimmt* ist, unmöglich, dasselbe ihm noch zu geben.

Nun wird aber ein Triangel auch oft durch die Verbindung einiger seiner Stücke bestimmt, aber die Menge der hierbei vorkommenden Fälle ist nicht aufzuzählen, der Mannigfaltigkeit wegen, die hierbei stattfinden kann. Oft werden dergleichen Aufgaben sehr einfach auf einem algebraischen Wege *) aufgelöset, ja es ist dieser Weg nicht selten der einzig mögliche, allein es sind auch oft hierbei Kenntnisse der Trigonometrie nöthig. Es mögen aber dennoch schon hier einige jener Aufgaben der Uebung wegen, folgen.

9te Aufgabe. (Fig. 8.)

Es soll ein Triangel bestimmt werden, aus einer seiner Seiten, dem dieser Seite anliegenden Winkel und aus der Summe der beiden anderen Seiten.

Voraussetzung. Die Linie welche die Summe der beiden Seiten angiebt, muß *größer* als die gegebene Seite seyn, wegen G. §. 66.; der Winkel aber kann jede beliebige Größe haben.

Gegeben. Die Linie n gleich der einen Seite, den $\angle p$ gleich jenem Winkel, und die Linie s gleich der Summe der beiden anderen Seiten.

Auflösung. Man zeichne eine Linie $AB =$ der n, an einen ihrer Endpuncte z. B. an A, trage man den gegebenen $\angle p = \angle BAC$ an, und mache den anderen Schenkel $AC =$ der gegebenen Linie s; dann verbinde man die Puncte C und B, halbire die Linie BC

*) Siehe die Einleitung.

(G. §. 52.), errichte auf der BC in der Mitte E einen Perpendikel (G. §. 53.), bis er die AC im Puncte D schneidet, dieser Perpendikel sey ED; den Punct D verbinde man mit B; so ist $\triangle$BDA der gesuchte Triangel.

Beweis. Der Triangel BDA enthält die Seite n, und der $\angle$p liegt ihr laut Construction an; ferner ist $\triangle BED \cong \triangle EDC$ (G. §. 44.), denn $BE = EC$, $ED = ED$, $\angle BED = \angle DEC$ als rechte Winkel; daher ist $BD = DC$ (G. §. 40, 5.), und folglich $AD + DB = AD + DC = AC = s$, d. h. die Summe der beiden anderen Seiten im erzeugten Triangel, ist der gegebenen Linie s gleich, wie verlangt wurde.

Es ist aber mit obigem Beweise allein, noch nicht die Bestimmung des Triangels bewiesen, denn es könnten vielleicht noch mehrere (unter sich nicht congruente) Triangel jene Bedingungen erfüllen. Ferner muß gezeigt werden, daß jene Auflösung auch immer zu vollziehen ist. — Zuerst ist nun die Lage der Linie AB und der Linie AC, durch den $\angle$p völlig bestimmt. Man nehme jetzt an, es gebe in der Linie AC noch einen anderen Punct als D, welcher die Aufgabe auch auflöset, z. B. F, so verbinde man F mit B, und es müßte nun $AF + FB = s$ seyn; da aber schon $AD + DB = s$ ist, so müßte wiederum

$$AD + DB = AF + FB = AD + DF + FB \text{ seyn;}$$

nimmt man hier $AD =$ AD hinweg,

so bleibt $DB = DF + FB$ übrig, was unmöglich ist, da es gegen G. § 66. streitet. Es kann also kein Punct über D hinaus die Aufgabe erfüllen. Wollte man einen Punct zwischen A und D, z. B. den Punct G als die Aufgabe erfüllend annehmen, so würde man, wenn G mit B verbunden wird, durch dieselbe Betrachtung wie oben, darauf stoßen, daß $GB = GD + DB$ seyn müßte, was eben so unmöglich ist. Also ist $\triangle$ABD der einzig mögliche, oder jene Stücke bestimmen ihn. — Was aber die Möglichkeit jener Construction, für jeden Fall, sobald nur die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, anbetrifft; so verbinde man um solche zu zeigen den Punct E mit der gegenüber liegenden Winkelspitze A. Jetzt entstehen zwei Triangel AEC und AEB, worin EC = EB und AE = AE, aber laut Annahme AC > AB ist; daher ist auch ∠AEC > ∠AEB (G. §. 69.), und weil beide Winkel Nebenwinkel sind, so ist ∠AEC stumpf. Folglich fällt der in E errichtete Perpendikel auf die Seite des stumpfen Winkels, und muß die Linie AC irgend wo schneiden, da er weder die EA noch die EC treffen kann, und doch den Triangel AEC irgendwo bei gehöriger Verlängerung verlassen muß. — Indem diese Betrachtung nun, ganz ohne Rücksicht auf die Größe des Winkels p, oder auf die relative Größe der Linien s und n (nur daß s > n ist) gemacht würde; so findet jener Schnitt, und mithin die Auflösung unserer Aufgabe, für jeden Fall statt, die Linie s mag jede Größe über n hinaus haben. Zugleich steht es aber durchaus nicht in unserer Willkühr zu bestimmen, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren der beiden unbekannten Seiten des Triangels gegenüber liegen soll, indem wir bereits gezeigt haben, daß der Triangel völlig bestimmt ist, und es müßten offenbar zwei ganz verschiedene Triangel entstehen, wenn der gegebene Winkel einmal der größeren und dann wieder einmal der kleineren jener beiden Seiten gegenüberstehen sollte. Ist der gegebene Winkel ein stumpfer, so muß er ja überdem schon der größeren jener unbekannten Seiten gegenüberstehen.

Anmerk. Wie würde man wol nach der eben gelöseten Aufgabe, einen rechtwinklichen Triangel construiren, dessen Perimeter und eine Cathete gegeben wäre?

10te Aufgabe. (Fig. 9. und 10.).

Aus einer Seite, einem der anliegenden Winkel und aus der Differenz der beiden an-

deren Seiten, einen Triangel zu verzeichnen oder zu bestimmen.

Voraussetzung. Die Linie welche die Differenz der beiden Seiten angiebt, muß kleiner als die gegebene Seite des Triangels seyn, wegen G. §. 67.; der Winkel kann jede Größe (nur concav muß er natürlich seyn) haben.

Gegeben. Die Linie n als Seite, der ∠ p ihr anliegend und die Linie d als Differenz der beiden zu findenden Seiten.

Auflösung. Diese Aufgabe theilt sich ihrer Natur nach, je nachdem der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren der beiden zu suchenden Seiten gegenüber liegen soll oder kann, worüber das Nähere in der Auflösung gelehrt werden wird, in zwei Theile, nemlich:

a. Wenn der Winkel der größeren jener einzeln unbekannten Seiten gegenüber liegen soll, daher jede Größe haben, d. h. spitz, recht oder stumpf seyn kann (Fig. 9.).

Man ziehe eine Linie CB = der n, lege an einen ihrer Endpuncte den ∠ ACB = p, und verlängere den Schenkel AC über C hinaus um CD = d, d. h. man suche den Nebenwinkel vom ∠ p. Jetzt verbinde man D mit B, halbire BD *) in O, und errichte in O einen Perpendikel OA so weit, bis er den verlängerten Schenkel des Winkels p in A trifft; dann verbinde man A mit B, und △ BAC ist der verlangte Triangel.

Beweis. Es enthält △ BAC die Seite n, und der ∠ p liegt ihr an; ferner ist △ ADO ≅ △ ABO (G. §. 44.), folglich AD = AB; also AB − AC = AD − AC = CD = d, d. h. die Differenz der beiden anderen

---

*) Wenn wir uns auf Aufgaben berufen die in der Geometrie gelöset werden, und schon einmal citirt sind, so fällt dies Zurückweisen ferner weg.

Seiten ist gleich jener gegebenen Linie d; ferner ist AB = AD > AC d. h. der Winkel liegt der größeren Seite gegenüber.

Wir haben aber jetzt auch noch auf jene Betrachtungen Rücksicht zu nehmen, welche wir in der vorigen Aufgabe anstellten. Also zuerst: ist △ABC nun auch bestimmt? — Die Linie BC und der ∠p können keine andere Lage gegen einander haben; allein man könnte vielleicht einen anderen Punct in der CA als den A, für einen, die Aufgabe auch lösenden Punct annehmen. Es sey also H derselbe, so verbinde man H mit B, und es müßte HB — HC jetzt auch gleich d seyn. Dies ist aber nicht möglich, denn alsdann wäre:

$$BH - HC = BA - AC = BA - AH - HC,$$

da nun $-HC = \qquad -HC$ ist,

so auch $BH = BA - AH$

d. h. im △BAH ist eine Seite der Differenz der beiden anderen Seiten gleich, was gegen G. §. 67. streitet. Auf denselben Widerspruch würde man stoßen, wenn man jenen Punct H, über den Punct A hinaus, annehmen wollte, welches man leicht zeigen kann. Es ist also der gefundene Triangel völlig bestimmt. — Was aber die andere Frage anbetrifft, ob auch die Construction immer möglich sey zu vollziehen; so sehen wir, hierzu ist nothwendig, daß der Perpendikel OA, sich mit dem Schenkel CA auf der Seite der Linie DA schneidet, wo der ∠p liegt, damit dieser Winkel in den Triangel zu liegen kömmt. Wenn aber der ∠CDB, den die Hülflinien BD mit dem rückwärts verlängerten Schenkel CD bildet, ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist, was, wenn ∠p stumpf ist, wol möglich seyn könnte, so sieht man die Unmöglichkeit jenes doch nothwendigen Schrittes aus der Theorie der Parallelen leicht ein. Es muß also der ∠D nothwendig ein spitzer Winkel seyn, oder sich als solcher während der Construction ergeben. Hieraus sieht man, daß es nicht genug für die Möglichkeit der Construction ist, wenn $d < n$ gegeben ist, sondern dies kann sehr gut stattfinden, und nichts streitet dagegen, daß $\angle BDC$ sich anders als spitz ergiebt, da er der größeren Seite BC im $\triangle BCD$ gegenüber liegt. Wir würden also hierdurch berechtiget werden zu schließen, daß wir bei der Wahl der d, für diesen Fall *) nicht willkührlich verfahren können, wenn nicht erwidert werden könnte, daß vielleicht für solchen Fall, wo $\angle D$ sich recht oder stumpf ergiebt, die gegebene Construction unvollkommen sey, und eine andere Auflösung jetzt stattfinden müßte **). Allein, wenn wir nun setzen, $\angle D$ hätte sich stumpf oder recht ergeben, so muß, des einmal bestimmten Winkels p wegen, der dritte Winkelpunct des Triangels, doch immer in den Schenkel CA fallen, und man nehme an, irgend eine Construction könnte ihn in A geben; so ist, weil der Punct B auch schon bestimmt ist, $\triangle BAC$ der verlangte Triangel, und $AB - AC = d = DC$, daher $AB = AC + DC = AD$, folglich $\triangle BAD$ gleichschenklich, und in ihm endlich einer der gleichen Winkel, nemlich $\angle D$ recht oder stumpf, was nicht möglich ist (G. §. 59, 2.). Also kann jener Triangel nun auch unter keiner Bedingung erfüllt, d. h. construirt werden, sondern die Aufgabe ist dann wirklich unmöglich. — Ist endlich der $\angle p$ recht oder spitz gegeben, so kann sich schon $\angle D$ nicht anders als spitz ergeben, weil ja $\angle BCA > \angle BDC$ ist (G. §. 57.), und die Construction ist gewiß möglich (d. h. der Schnitt findet statt), sobald nur, was immer vorausgesetzt wird, $d < n$ ist. — Soll aber noch bewiesen werden warum, wenn die Auf-

*) Ob bei den übrigen Fällen auch, wird die Folge bald lehren.

**) Dieser Einwurf ist einleuchtend; hätten wir aber wie bei der vorigen Aufgabe, die Construction für immer passend gefunden, so könnte wiederum kein Einwurf dieser Art gemacht werden.

gabe möglich ist, auch der Perpendikel OA die Linie CA über C hinaus trifft; so verbinde man O mit C, wo wieder Triangel BOC und $\triangle$COD, die Seiten BO = OD und OC = OC, aber BC > CD haben, daher $\angle$BOC > $\angle$COD ist (G. §. 69.), also muß $\angle$COD spitz seyn, und der Perpendikel über C hinaus, d. h. auf CA fallen.

b. Wenn der gegebene Winkel der **kleineren** der gesuchten Seiten gegenüber liegen soll, also **spitz** seyn muß. (Siehe G. §. 63.) (Fig. 10.)

Man zeichne wieder eine Linie CB = n, lege den $\angle$p = $\angle$ACB an einen ihrer Endpuncte an, und mache CA = d d. h. gleich der gegebenen Differenz *), verbinde A mit B, halbire AB in O, und errichte in O auf der AB den Perpendikel OD, bis er die verlängerte CA in D trifft; so ist, wenn man D mit B verbindet, $\triangle$CDB der gesuchte Triangel.

Beweis. $\triangle$CDB enthält die Seite n, welcher der $\angle$p anliegt; es ist ferner laut Construction und G. §. 44., $\triangle$AOD $\cong$ $\triangle$BOD, daher AD = DB, und folglich d = CD − AD = CD − DB, d. h. die Differenz der beiden gefundenen Seiten ist der Linie d gleich. Da ferner DA + AC = DC > DA = DB ist, so liegt der Winkel der **kleineren** der gegebenen Seiten gegenüber.

Die Frage ob der $\triangle$CDB auch **bestimmt** ist, wird durch die Annahme eines anderen Punctes als D in der AD, eben so bewiesen, wie es im vorigen Falle geschah. — Die Construction ist aber nur ausführbar, wenn $\angle$BAC stumpf, also $\angle$BAD spitz ist, denn nur alsdann kann sich der Perpendikel mit der verlängerten CA schneiden. Hierdurch erhalten wir wieder eine Einschränkung der Größe der gegebenen d, und man hätte leicht

*) In diesem Auftragen der d auf den Schenkel selbst, oder wie im vorigen Falle auf die Verlängerung desselben, liegt der Unterschied beider Auflösungen.

d $<$ n geben können, und doch wäre $\angle$ CAB vielleicht spitz geworden. Die Aufgabe wäre also für diesen Fall unmöglich, selbst noch, wenn $\angle$ CAB recht wäre. Wollte man wieder annehmen, daß eine andere Construction die Aufgabe dann noch vielleicht lösen könnte, so müßte doch der dritte Winkelpunct des Triangels, da C und B bestimmt sind, in der CD, des Winkels p wegen, liegen, und man hätte wieder, wenn $\triangle$ CDB der nunmehr erzeigte wäre, CA als Differenz, also AD = DB, d. h. einen gleichschenklichen Triangel ADB, wo $\angle$ A, als einer der gleichen Winkel, zugleich als Nebenwinkel eines spitzen Winkels, stumpf seyn müßte, welches unmöglich ist. Daß für den möglichen Fall der Aufgabe, sich der Perpendikel wiederum hier immer schneiden muß, liegt hier einfach vor Augen.

Zusatz. Wenn man annimmt, daß bei der gegebenen Differenz, die Seite welche dem gegebenen Winkel anliegt, als Minuendus erscheint, die dem Winkel gegenüber liegende Seite aber als Subtrahendus; so wird die Differenz negativ für den Fall, wo die anliegende Seite die kleinere seyn soll. Nun kann man allgemein sagen: wenn man den gegebenen Winkel an die gegebene Seite angetragen hat, so mache man den Schenkel gleich der gegebenen Differenz u. s. w. (wie die Auflösung gelehrt hat). Jetzt versteht es sich von selbst, daß, wenn die Differenz negativ war, dieselbe auch auf den rückwärts verlängerten Schenkel aufgetragen werden muß; welches ganz einfach aus dem Begriffe des Positiven und des Negativen folgt. Unter jener Bedingung also, würde die Auflösung einen allgemeineren Character erhalten.

Anmerk. 1. Vorstehender Zusatz ist von Wichtigkeit; denn, wenn man ohne darauf zu achten, wie der gegebene Winkel liegen soll, die Berechnung der Aufgabe (durch Trigonometrie, wovon hier die Rede nicht weiter seyn kann) anwendet, so ist jene zweideutige Eigenschaft der Differenz von Einfluß.