Sammlung Schubert III

Ebene

und

sphärische Trigonometrie

Von

Prof. Dr. F. Bohnert
Direktor der Realschule in St. Georg, Hamburg

Zweite, verbesserte Auflage

Dritter Neudruck

Mit 63 Figuren

Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
1919

Druck
der Spamerschen
Buchdruckerei in Leipzig.

Vorwort.

In einem Lehrbuche der Trigonometrie, das, wie das vorliegende, auch zum Selbstunterricht bestimmt ist, kann im wesentlichen zurzeit nicht von dem allgemein üblichen Lehrgange abgewichen werden, damit nicht dem Leser das Verständnis anderer Schriften ähnlichen Inhalts unnütz erschwert werde. — Strenge Definition der Grundbegriffe, der Hinweis auf die Notwendigkeit, diese Begriffe zu erweitern, eine scharfe Scheidung des logisch Notwendigen vom Konventionellen und die Bemerkungen über die Verwendbarkeit der gewonnenen Begriffe sollen dem Leser ein rasches Eindringen in die Trigonometrie ermöglichen. Gleichem Zwecke dient die Parallelführung des Gedankengangs im ersten und zweiten Teile des Buchs, die Anknüpfung an verwandte Zweige der Geometrie, endlich die äußerliche Hervorhebung alles Wichtigen durch die Disposition und den Druck. Die Beispiele sollen, ohne durch Massenhaftigkeit zu ermüden, den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit der Trigonometrie und ihre daraus sich ergebende Bedeutsamkeit gewähren. —

Den in elementaren Lehrbüchern der Trigonometrie seltenen Hinweis auf den ungleichen Wert verschiedener möglicher Wege zur ziffernmäßigen Berechnung gesuchter Größen verdankt der Verfasser dem „Lehrbuch der Trigonometrie“ von Dr. E. Hammer. In der Auswahl der Aufgaben über goniometrische Gleichungen sind die „Trigonometrischen Aufgaben“ von Lieber und von Lühmann von Einfluß gewesen. Zur Kontrolle der Vollständigkeit, soweit dieselbe im Rahmen der Arbeit beabsichtigt war, haben neben den genannten Büchern das „Lehrbuch der ebenen Trigonometrie“ aus Kleyers Enzyklopädie und das „Lehrbuch der Trigonometrie“ von Spieker gedient.

Abschnitt IV im zweiten Teile durfte sich auf das Notwendigste beschränken, da Band XVI der Sammlung die mathematische Geographie eingehend behandelt. Die Einflechtung historischer Notizen ist unterblieben, da in Band XVIII der Sammlung die Geschichte der Mathematik behandelt werden wird.

Der Verfasser erfüllt schließlich eine angenehme Pflicht, indem er Herrn Dorn, seinem Kollegen an der Oberrealschule vor dem Holstentore, für bereitwillige Hilfe bei der Anfertigung der Zeichnungen für den zweiten Teil, sowie Herrn Dr. Bolte, Oberlehrer an der Navigationsschule zu Hamburg, für freundlichen Rat bei der Aufstellung der Aufgaben im letzten Paragraphen des Buchs aufrichtigen Dank sagt.

Hamburg, Dezember 1899.

Dr. F. Bohnert.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Verbesserungsvorschläge der Kritik sind gewissenhaft geprüft worden. Einzelnen derselben vermag ich nicht zu folgen, viele sind dankbar berücksichtigt. Besonderen Dank schulde ich den Herren Direktor Prof. Dr. Thaer und Dr. J. Schröder in Hamburg für wertvolle Verbesserungen, Herrn Dorn für freundliche Hilfe bei der Neuanfertigung der Figur 49, und den Herren Dr. Körner und Lambert für Unterstützung beim Lesen der Korrektur.

In § 12 sind die Ableitungen eingehender behandelt. Der Anfang von § 28 hat eine kürzere Fassung erhalten. In § 36 sind Text und Figur in Übereinstimmung gebracht. § 44 hat einen wichtigen Zusatz erhalten. In § 51 und § 52 ist die Zahl der numerischen Beispiele vermehrt.

Im zweiten Teile ist Fig. 49 durch eine bessere ersetzt. Der bisherige § 9 (Satz der 5 Stücke) ist beseitigt. Als § 11 ist eine selbständige Ableitung für die Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks hinzugekommen, als § 30 eine Inhaltsvermehrung aus dem Gebiete der mathematischen Geographie. Endlich ist die Zahl der Aufgaben in § 31 von 12 auf 20 gestiegen.

An vielen Stellen habe ich mich bemüht, durch kleine Änderungen die Korrektheit des Ausdrucks zu steigern, die Klarheit der Darstellung zu fördern und dadurch dem Leser das Verständnis zu erleichtern.

Hamburg, April 1906.

Prof. Dr. F. Bohnert.

Inhaltsverzeichnis.

I. Ebene Trigonometrie.

II. Sphärische Trigonometrie.

I. Ebene Trigonometrie.

Geometrische Einleitung.

§ 1. Kongruenz und Ähnlichkeit.

Jede Messung eines Gegenstandes beruht auf einer Vergleichung desselben mit einem anderen gleichartigen. Die Vergleichung wird erleichtert, wenn wenigstens einer der zu vergleichenden Gegenstände beweglich ist und in die Nähe des anderen gebracht werden kann. In der Planimetrie werden ebene Gebilde und ihre Bestandteile verglichen. Zum Zwecke einer Vereinfachung der Betrachtungsweise stellt man sich dabei vor, daß jedes ebene Gebilde beliebige Ortsveränderungen im Raume verträgt, ohne seine Form und seine Größe zu verändern. Auf dieser Vorstellungsweise fußt die

Definition: Ebene Figuren heißen kongruent, wenn man sie so in dieselbe Ebene legen kann, daß sie sich decken.

Aus dieser Definition des Kongruenzbegriffes folgt der Lehrsatz: In kongruenten ebenen Figuren sind in einer bestimmten Reihenfolge 1. die Winkel und 2. die Seiten paarweise gleich.

Seine Umkehrung lautet: Sind in zwei ebenen Figuren 1. die Winkel und 2. die Seiten paarweise in einer bestimmten Reihenfolge gleich, so sind die Figuren kongruent.

Die Aussage: „Dreieck ABC ist kongruent dem Dreieck $A'B'C'$“ ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) ist demnach ein kurzer Ausdruck für die sechs auf die Stücke zweier Dreiecke bezüglichen Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha', & a &= a', \\ \beta &= \beta', & b &= b', \\ \gamma &= \gamma', & c &= c'. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungsweise der Stücke eines Dreiecks erhellt aus der Figur 1.

Die Behauptung: „Dreieck ABC ist kongruent dem Dreieck $A'B'C'$" kann demnach bewiesen werden durch den Nachweis, daß die genannten sechs Gleichungen für die beiden Dreiecke erfüllt sind.

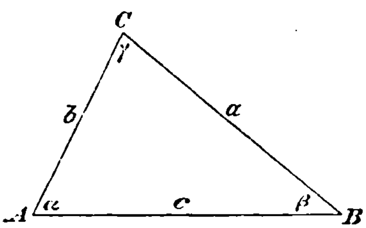

Fig. 1.

Die Planimetrie lehrt, daß die Kongruenz zweier Dreiecke schon erkannt werden kann durch den Nachweis, daß drei passend unter den genannten sechs ausgewählte Gleichungen für die beiden Dreiecke erfüllt sind. Daraus ergibt sich, daß die sechs Stücke $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ eines Dreiecks nicht voneinander unabhängig sein können, sondern daß, allgemein gesprochen, für jedes Dreieck drei Gleichungen existieren, welche diese sechs Stücke untereinander verknüpfen. Eine dieser Gleichungen läßt sich in die Form kleiden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Die Kongruenz zweier Figuren ist ein besonderer Fall einer allgemeineren Beziehung derselben zueinander, nämlich ihrer Ähnlichkeit.

Definition: Zwei ebene Figuren heißen ähnlich, wenn man sie so in zwei parallele Ebenen legen kann, daß sie von einem bestimmten, außerhalb der Ebenen gelegenen Beobachtungspunkte aus gesehen sich decken.

Der besondere Fall der Kongruenz zweier ähnlicher Figuren liegt dann vor, wenn der Beobachtungspunkt, von dem aus gesehen die Deckung der Figuren stattfindet, in unendlicher Entfernung von den beiden parallelen Ebenen liegt.

Die Stereometrie lehrt:

„Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittstrahlen parallel."

„Winkel mit gleichgerichteten parallelen Schenkeln sind gleich groß.“

„Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich zwei Abschnitte eines Schenkels wie die entsprechenden Abschnitte des anderen Schenkels, und die Parallelen verhalten sich wie die in ihnen endigenden, vom Scheitelpunkt aus gerechneten Abschnitte eines Schenkels.“

Aus diesen Sätzen und der Definition des Ähnlichkeitsbegriffes folgt der

Lehrsatz: In ähnlichen ebenen Figuren sind in einer bestimmten Reihenfolge 1. die Winkel und 2. die Seitenverhältnisse paarweise gleich.

Seine Umkehrung lautet: Sind in zwei ebenen Figuren 1. die Winkel und 2. die Seitenverhältnisse in einer bestimmten Reihenfolge paarweise gleich, so sind die Figuren ähnlich.

Die Aussage: „Dreieck ABC ist ähnlich dem Dreieck $A'B'C'$“ ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) ist demnach ein kurzer Ausdruck für die sechs auf die Stücke zweier Dreiecke bezüglichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha', & a:b &= a':b', \\ \beta &= \beta', & b:c &= b':c', \\ \gamma &= \gamma', & c:a &= c':a'. \end{aligned}$$

Die Behauptung: „Dreieck ABC ist ähnlich dem Dreieck $A'B'C'$“ kann demnach bewiesen werden durch den Nachweis, daß die genannten sechs Gleichungen für die beiden Dreiecke erfüllt sind.

Die Planimetrie lehrt, daß die Ähnlichkeit zweier Dreiecke schon erkannt werden kann durch den Nachweis, daß zwei passend unter den genannten sechs ausgewählte Gleichungen für die beiden Dreiecke erfüllt sind. Daraus ergibt sich, daß die sechs Stücke eines Dreiecks α, β, γ, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ nicht voneinander unabhängig sein können, sondern daß, allgemein gesprochen, für jedes Dreieck vier Gleichungen existieren, welche diese sechs Stücke untereinander verknüpfen.

Zwei dieser Gleichungen lassen sich in die Form kleiden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R, \tag{1}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1. \tag{2}$$

§ 2. Aufgabe der Trigonometrie.

Die ebene Trigonometrie beschäftigt sich mit der Aufsuchung der Gleichungen, welche zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks existieren, und mit der Anwendung der gefundenen Beziehungen zur Berechnung von Strecken und Winkeln in ebenen Figuren aus einer hinreichenden Anzahl von Bestimmungsstücken. Sie bedarf dazu der Einführung gewisser Hilfsgrößen, der trigonometrischen Funktionen. Das Studium der Eigenschaften dieser Hilfsgrößen bildet einen Zweig der Trigonometrie, die Goniometrie.

Diejenigen Aufgaben, deren Lösung in der Planimetrie durch Zeichnung gefunden wird, werden in der Trigonometrie durch Rechnung gelöst. Die hervorragende Bedeutung der Trigonometrie macht sich besonders dort geltend, wo es sich entweder um sehr große und sehr kleine Dimensionen der zu bestimmenden, überdies oft unzugänglichen Größen bei einem hohen Grade der Genauigkeit des Resultats handelt, oder wo konstruktive, in der Natur des Zeichnens mit Lineal und Zirkel begründete Schwierigkeiten vorliegen. Astronomie, Feldmessung, gewisse Gebiete der Optik bieten Beispiele der ersten Art, die Behandlung der regelmäßigen Polygone bietet solche der zweiten Art.

§ 3. Besondere Hilfsmittel der Trigonometrie.

In der Geometrie finden sich gelegentlich Sätze, welche auf Größenbeziehungen zwischen den Winkeln und den Längen in einer Figur hinweisen: „Ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks doppelt so groß als die eine Kathete, so betragen die spitzen Winkel des Dreiecks 30° und 60°.“ Ferner: „Ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich dem größeren Abschnitte des stetig geteilten Schenkels, so beträgt der Winkel an der Spitze des Dreiecks 36°." Die Zahl dieser Beispiele läßt sich vermehren. Sie behandeln alle mehr oder weniger spezielle Fälle, und sie gestatten keinen Übergang zu allgemeineren Betrachtungen, also etwa zur ziffernmäßigen Beantwortung der Fragen: „Wie groß sind die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Hypotenuse n mal so groß als die eine Kathete ist?" und: „Wie groß ist der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis gleich dem n-ten Teile des Schenkels ist?"

Die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ist der Planimetrie unmöglich, weil ihr die Mittel zur Vergleichung von Winkeln und Strecken als von inkommensurabeln Größen fehlen. Die Behandlung solcher Aufgaben wird der Trigonometrie möglich durch die Einführung von Hilfsgrößen, von trigonometrischen Funktionen, durch welche eine einfache Zuordnung zwischen Winkelgrößen und Streckenverhältnissen vermittelt wird. Außerdem macht die Trigonometrie ausgiebigen Gebrauch von Tafeln der trigonometrischen Funktionen, in denen die Zuordnung der Winkel zu ihren trigonometrischen Funktionen ziffernmäßig für Winkelwerte dargestellt ist, die nach kleinen Intervallen fortschreiten.

I. Abschnitt.

Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel.

§ 4. Der Funktionsbegriff.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck, $\angle \gamma = R$.

Jedes Dreieck $A'B'C'$, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist, stimmt mit ihm überein in den Winkeln $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und den Seitenverhältnissen

$$\frac{BC}{CA} = \frac{B'C'}{C'A'}, \quad \frac{CA}{AB} = \frac{C'A'}{A'B'}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

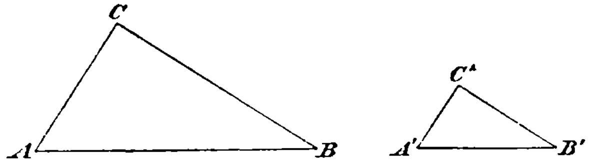

Fig. 2.

Zur Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist, oder — in andrer Ausdrucksweise — zur Konstruktion der **Gestalt** des Dreiecks ABC genügt als Bestimmungsstück einer der beiden spitzen Winkel oder eines der genannten Seitenverhältnisse.

Daraus ergibt sich, daß konstruktiv durch eines dieser fünf Stücke ($\angle \gamma = R$ ist das sechste) die übrigen vier mitbestimmt sind, insbesondere, daß durch einen der beiden spitzen Winkel alle drei Seitenverhältnisse und durch eins der drei Seitenverhältnisse beide spitze Winkel bestimmt sind.

Stehen zwei veränderliche Größen zueinander in der Beziehung, daß durch die Größe der einen die Größe der anderen ein- oder mehrdeutig mitbestimmt ist, so nennt man die eine der Größen eine **Funktion** der anderen. — So ist beispielsweise der Druck einer in einem starren Gefäß eingeschlossenen Gasmasse eine Funktion ihrer Temperatur. Ferner ist die Zeit, innerhalb deren ein Körper eine gegebene Bahn durchläuft, eine Funktion seiner Geschwindigkeit. Endlich ist der Wert des Ausdruckes $x^3 + ax + b$ eine Funktion des Wertes der Veränderlichen x.

Mit Benutzung dieser Ausdrucksweise sagt man: Die Werte der drei Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks sind Funktionen der Größe eines seiner beiden spitzen Winkel.

Umgekehrt ist die Größe jedes der beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck eine Funktion des Wertes irgend eines Seitenverhältnisses in diesem Dreieck.

---

§ 5. Aufgaben zu § 4.

1. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren
a) aus $\angle\alpha = 30^0$, b) aus $\angle\beta = 45^0$, c) aus $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$, d) aus $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, e) aus $\frac{BC}{AC} = 1$.

2. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren
a) aus $\angle\alpha = 18^0$, b) aus $\angle\alpha = 36^0$, c) aus $\angle\beta = 54^0$ d) aus $\angle\beta = 24^0$.

In jedem dieser Dreiecke sollen die Längen der drei Seiten in mm gemessen werden, und die Seitenverhältnisse $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ und $\frac{BC}{AC}$ durch Division der Maßzahlen der Seiten berechnet werden.

3. Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren
a) aus $\frac{BC}{BA} = \frac{3}{5}$, b) aus $\frac{BC}{BA} = 0{,}3$, c) aus $\frac{AC}{AB} = \frac{71}{100}$, d) aus $\frac{BC}{AC} = 2$.

In jedem dieser Dreiecke sollen die spitzen Winkel mit dem Transporteur gemessen werden.

---

§ 6. Die erste Definition der trigonometrischen Funktionen.

Man hat den drei Funktionen, welche die Abhängigkeit der Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks von der Größe eines seiner spitzen Winkel darstellen, Namen gegeben.

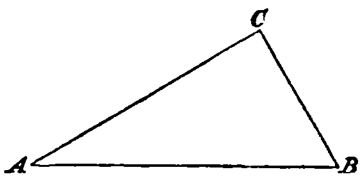

Fig. 3.

Man bezeichnet als **Sinus** des Winkels α den Wert des Verhältnisses $\frac{BC}{AB}$ in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse AB heißt, und in dem $\angle BAC = \angle\alpha$ ist.

Allgemein definiert man, wenn α ein spitzer Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ($\angle ACB = R$) ist,

$$\text{sinus des } \angle\alpha = \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \angle\alpha}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\text{cosinus des } \angle\alpha = \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{Nebenkathete zu } \angle\alpha}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\text{tangens des } \angle\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \angle\alpha}{\text{Nebenkathete zu } \angle\alpha}.$$

Der Vollständigkeit wegen und aus Gründen rechnerischer Bequemlichkeit hat man auch den reziproken Werten der drei genannten Streckenverhältnisse Namen gegeben. Man definiert

$$\text{cosecans des } \angle\alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete zu } \angle\alpha},$$

$$\text{secans des } \angle\alpha = \sec\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Nebenkathete zu } \angle\alpha},$$

$$\text{cotangens des } \angle\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{Nebenkathete zu } \angle\alpha}{\text{Gegenkathete zu } \angle\alpha}.$$

In den Ausdrücken $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ usw. bezeichnet man α als das **Argument** der trigonometrischen Funktionen sinus, cosinus usw.

Nach dem Wesen der gegebenen Definitionen können sich dieselben nur auf Werte von $\angle\alpha$ beziehen, die zwischen 0^0 und 90^0 liegen.

---

§ 7. Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels und seines Komplementwinkels.

Aus den Definitionen des § 6 folgt

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{BC}{AB} = \cos\beta = \cos(90^0 - \alpha)\,,\\
\cos\alpha &= \frac{AC}{AB} = \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha)\,,\\
\mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{BC}{AC} = \mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{cotg}(90^0 - \alpha)\,,\\
\mathrm{cosec}\,\alpha &= \frac{AB}{BC} = \sec\beta = \sec(90^0 - \alpha)\,,\\
\sec\alpha &= \frac{AB}{AC} = \mathrm{cosec}\,\beta = \mathrm{cosec}(90^0 - \alpha)\,,\\
\mathrm{cotg}\,\alpha &= \frac{AC}{BC} = \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(90^0 - \alpha)\,.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man Kosinus, Kotangens, Kosekans bezw. als die Ko-Funktionen von Sinus, Tangens und Sekans, so gilt demnach der Satz:

Jede trigonometrische Funktion eines Winkels ist gleich der Ko-Funktion des Komplementwinkels.

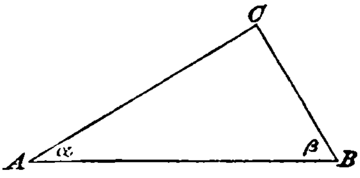

Fig. 4.

Der Ausdruck $\cos\alpha$ ist entstanden aus „complementi sinus", sinus des Komplementwinkels von α.

Bedeutet $\varphi(\alpha)$ irgend eine trigonometrische Funktion des Winkels α und $\mathrm{co}\varphi(\alpha)$ die Ko-Funktion derselben, so ist also

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{co}\varphi(90^0 - \alpha)\,,$$
$$\varphi(90^0 - \alpha) = \mathrm{co}\varphi(\alpha)\,.$$

---

§ 8. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

Aus dem pythagoreischen Lehrsatze

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$

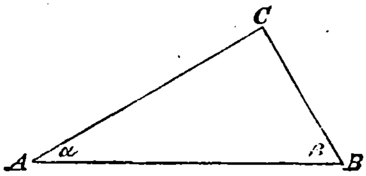

Fig. 5.

folgt

1. durch Division mit $(AB)^2$

$$\text{(I)}\quad 1 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,;$$

2. durch Division mit $(BC)^2$

$$\text{(II)}\quad \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha\,,$$

3. durch Division mit $(AC)^2$

$$\text{(III)}\quad \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + 1 \quad \text{oder} \quad \sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1\,.$$

Aus den Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC} &= 1\,, \\ \frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC} &= 1\,, \\ \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{BC} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{BC}{AB}:\frac{AC}{AB} &= \frac{BC}{AC}\,, \\ \frac{AC}{BC}:\frac{AB}{BC} &= \frac{AC}{AB}\,, \\ \frac{AB}{AC}:\frac{BC}{AC} &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right.$$

folgen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{(IV)}\ \sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = 1\,, \\ &\text{(V)}\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1\,, \\ &\text{(VI)}\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1 \end{aligned}\right\} \text{und} \left\{\begin{aligned} &\text{(VII)}\ \sin\alpha : \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,, \\ &\text{(VIII)}\ \operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cosec}\alpha = \cos\alpha\,, \\ &\text{(IX)}\ \sec\alpha : \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cosec}\alpha\,. \end{aligned}\right.$$