Prof. Dr. Hermann Schubert

Mathematische Mußestunden

Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur

Neubearbeitet von

Prof. Dr. F. Fitting

in M.-Gladbach

Siebente Auflage

BERLIN 1941

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Ludendo discimus

Leibniz

Archiv-Nr. 122441
Printed in Germany

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Vorwort
zur ersten Auflage

Die vorliegende Sammlung ist für gebildete Laien bestimmt, denen von der Arithmetik nur die allerersten Elemente bekannt zu sein brauchen. Sie behandelt, ähnlich wie die Sammlungen von Edouard Lucas[1]) und Rouse Ball[2]), historisch und kritisch die wichtigsten von den zur Unterhaltung geeigneten Geduldspielen und Problemen mathematischer Natur. Wenn auch der Verfasser die Sammlungen von Lucas und Ball vielfach benutzt hat, so ist doch der größte Teil der in der vorliegenden Sammlung angestellten Erörterungen aus eigenen Studien des Verfassers hervorgegangen. Von Büchern mit ähnlichem Inhalt aus älterer Zeit ist in erster Linie das von Bachet de Méziriac[3]) zu nennen. Vor Bachet behandelten Unterhaltungsaufgaben Cardano[4]) und

---

[1]) Edouard Lucas, Récréations mathématiques, Paris 1882. Ferner: Lucas, L'Arithmétique amusante, Paris 1895, nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. Delannoy, C. A. Laisant und E. Lemoine.

[2]) W. W. Rouse Ball, Mathematical recreations and problems of past and present times, London 1892.

[3]) Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Erste Auflage: Paris 1612; zweite Auflage: Lyon 1624; dritte und vierte, von Labosne vermehrte und verbesserte Auflage: Paris 1874 und 1879.

[4]) Cardano, De subtilitate libri XXI, Nürnberg 1550.

Tartaglia[5]), nach Bachet Oughtred[6]) und Ozanam[7]). Die in unserem Jahrhundert in Deutschland erschienenen Bücher von Montag[8]), Mittenzwey[9]) und anderen enthalten zwar viele Unterhaltungsaufgaben, geben aber keine mathematische Kritik der Probleme. Nur die vom Verfasser in den Jahren 1893—1895 in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" unter dem Namen „Mathematische Spielereien" veröffentlichten Artikel[10]) enthalten schon eine, wenn auch nicht sehr eingehende, mathematische Kritik der dort behandelten Geduldspiele.

Hamburg, November 1897.

Hermann Schubert.

---

[5]) Tartaglia, Quesiti et inventioni diverse, Venetia 1554; Trattato de numeri e misure, Venetia 1556; Opere, Venetia 1606.

[6]) Oughtred, Mathematical recreations, London 1653.

[7]) Ozanam, Récréations mathématiques et physiques, Paris 1694, mit vielen vermehrten und verbesserten Auflagen, z. B. 1723, 1803, 1840.

[8]) Montag, Die Wunder der Arithmetik, Leipzig.

[9]) Mittenzwey, Mathematische Kurzweil, 3. Auflage, Leipzig 1895.

[10]) Diese Artikel sind auch, in einem Büchlein zusammengefaßt, für sich erschienen unter dem Titel „Zwölf Geduldspiele" Berlin 1895 (jetzt Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin).

Vorwort
zur zweiten Auflage

Von diesen meinen „Mathematischen Mußestunden“, die zuerst 1898 erschienen waren, fertigte ich schon 1899 eine neue, aus drei Bänden bestehende große Ausgabe an, die 1900 erschien und den Umfang verdreifachte. Obwohl diese große Ausgabe viele Freunde fand, so machten sich doch auch Wünsche geltend, die dahin gingen, daß neben der großen Ausgabe auch die kleine Ausgabe fortbestehen möchte. Demgemäß erscheint hier die 1898 erschienene kleine Ausgabe, deren Exemplare vergriffen sind, noch einmal, ohne wesentliche Hinzufügungen.

Zu der beim Vorwort der ersten Auflage angeführten verwandten Literatur sind jetzt zwei Bücher hinzuzufügen. Erstens: W. Große, Unterhaltende Probleme und Spiele, Leipzig 1897. Dieses Buch erschien nur einige Wochen früher als die erste Auflage meiner „Mathematischen Mußestunden“, so daß es in ihr nicht mehr erwähnt werden konnte. Es knüpft vielfach an die Abhandlungen an, die der Verfasser schon früher in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift“ hatte erscheinen lassen, gibt aber auch mancherlei Neues und Interessantes. Das zweite Buch, mathematisch tiefer angelegt als Großes und mein Buch, hat den Mathematiker W. Ahrens zum Verfasser und ist betitelt: „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“, Leipzig 1901. Drittens sei noch erwähnt, daß den „Mathematischen Spielen" auch die Ehre erwiesen ist, in der großen „Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" behandelt zu werden, freilich nur auf 14 Druckseiten. Der Bearbeiter des Enzyklopädieartikels ist der soeben erwähnte Ahrens.

Hamburg, am 18. August 1903.

Hermann Schubert.

Vorwort
zur Neubearbeitung

Gern übernahm der Unterzeichnete die Aufgabe, die Schubertschen Mathematischen Mußestunden neu zu bearbeiten. Verdankte er doch diesem Buche wertvolle Anregungen zu Studien während seiner eigenen Mußestunden, Studien, die ihn in den Stand setzen, verschiedene Fragen, die in dem Schubertschen Buche als noch unerledigt genannt sind, zu beantworten. Er erwähnt in dieser Beziehung seine neue, auf alle denkbaren Fälle erstreckbare Behandlungsweise des Rundreiseproblems, ganz besonders aber die darauf sich aufbauende Lösung der Rösselsprungaufgabe. Eine bereits 1904 erschienene Programmabhandlung des Unterzeichneten über diesen Gegenstand blieb vielleicht bezüglich der Bedeutung, welche sie nach des Verfassers Überzeugung für die Behandlung des Problems hat, nur deshalb unbeachtet, weil er versäumt hatte, mit dem erforderlichen Nachdruck darauf hinzuweisen. Auch der Paragraph: Magische Quadrate, war umzuarbeiten, um an Stelle von Überholtem noch nicht bekannte Entwicklungen und Ergebnisse des Verfassers aufnehmen zu können, Bruchstücke umfangreicherer Abhandlungen, an deren Veröffentlichung heute nicht zu denken ist. Von diesen neuen Zusätzen erfordern einzelne eine sorgfältigere Lektüre. Sie richten sich mehr an den Fachmann und sind durch kleineren Druck kenntlich gemacht. Einer weitgehenden Umarbeitung bedurfte auch der § 6: Umfüllungsaufgaben.

Prof. Dr. Schubert hatte hier bei seinen Betrachtungen einen Nebenumstand übersehen, wodurch sich ein Fehler in die Darstellung eingeschlichen hatte. Der Schubertsche Text war deshalb hier nach den Angaben des Herrn Dr. W. Ahrens zu verbessern, welcher zudem das Verdienst hat, die Schubertschen Ergebnisse erweitert zu haben. In den übrigen Paragraphen glaubte der Verfasser den altbewährten Schubertschen Text möglichst ungeändert lassen zu müssen. Die hieran vorgenommenen Änderungen sind im wesentlichen nur Kürzungen, welche auszuführen waren, um dem Buch den gewünschten geringeren Umfang zu geben. Möge das Buch auch in seiner neuen Form eine günstige Aufnahme finden.

M.-Gladbach, September 1924.

F. Fitting.

Vorwort zur fünften Auflage

Die vorliegende fünfte Auflage bringt im wesentlichen einen Neudruck der vierten Auflage. Hinzugekommen ist ein Kapitel über Sternsechsecke. Für dieses Problem, welches schon in der vierten Auflage kurz berührt war, scheint ein Interesse zu bestehen, da es neuerdings auch von anderer Seite ausführlicher behandelt worden ist. Ferner wurde in einem weiteren Kapitel das Spiel der dreißig bunten Würfel des Majors MacMahon, welches auch in Deutschland wachsende Verbreitung findet, in Kürze besprochen.

M.-Gladbach, 1. Februar 1935.

F. Fitting.

Inhaltsverzeichnis

ERSTER ABSCHNITT

Zahl-Probleme

§ 1

Erraten gedachter Zahlen

Um eine gedachte Zahl zu erraten, lasse man mit derselben beliebige Rechnungen ausführen. Dann lasse man sich das erhaltene Resultat sagen, aus dem man die gedachte Zahl durch Lösung einer Gleichung berechnen kann, nachdem man die ausgeführten Rechnungen in arithmetischer Zeichensprache ausgedrückt hat. In den einfacheren Fällen, wo die gedachte Zahl nur anfänglich einmal den vorgeschriebenen Rechnungen unterworfen wird, kann das Lösen der Gleichung dadurch geschehen, daß man mit dem erhaltenen Resultat umgekehrt verfährt, wie mit der gedachten Zahl, d. h. sowohl die Reihenfolge der Rechnungsarten umkehrt, wie auch die Rechnungsarten selbst, also z. B. subtrahiert statt addiert, multipliziert statt dividiert. Durch arithmetische Umformungen läßt sich jedoch die Berechnung der gedachten Zahl aus dem Resultat kürzer gestalten. Z. B.:

1. Die gedachte Zahl werde um 5 vermehrt, die Summe mit 3 multipliziert und vom Produkt 7 subtrahiert. Erfährt man dann das erhaltene Resultat, so hat man dasselbe um 8 zu vermindern und den dritten Teil der erhaltenen Differenz zu nehmen, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Denn $(x+5)\cdot 3 - 7 = p$ ergibt nacheinander $3x + 15 - 7 = p$ oder

$3x + 8 = p$ oder $3 \cdot x = p - 8$ oder $x = (p - 8) : 3$. War z. B. 4 die gedachte Zahl, so erhält man 20 als Resultat, woraus sich die gedachte Zahl durch die Berechnung $20 - 8 = 12$, $12 : 3 = 4$ ergibt.

2. Die gedachte Zahl werde mit 6 multipliziert, vom Produkt 5 subtrahiert, die Differenz mit 3 multipliziert, das Produkt um 1 vermehrt, die Summe durch 2 dividiert und der erhaltene Quotient um 7 vermehrt. Dann ist der neunte Teil des schließlich erhaltenen Resultats die gedachte Zahl. Denn $[(6x - 5) \cdot 3 + 1] : 2 + 7$ läßt sich umformen, wie folgt: $[18x - 15 + 1] : 2 + 7$ oder $[18x - 14] : 2 + 7$ oder $9x - 7 + 7$ oder $9x$. Also ist $9x$ das erhaltene Resultat, daher die gedachte Zahl x gleich dem neunten Teile des Resultats.

Bei der Berechnung der gedachten Zahl aus dem erhaltenen Resultat kann man auch den Umstand verwerten, daß wir in unserer Zifferschrift eine Summe von Vielfachen der Zahlen 1, 10, 100 usw. schreiben, wie folgendes Beispiel zeigt:

3. Die gedachte Zahl werde mit 2 multipliziert, zum Produkt 3 addiert, die Summe mit 5 multipliziert und von dem so erhaltenen Produkte 11 subtrahiert. Dann hat man vom erhaltenen Resultat nur die am Schluß stehende 4 fortzulassen, um die gedachte Zahl zu erhalten. War z. B. 7 die gedachte Zahl, so ergibt sich durch die vorgeschriebenen Rechnungen nacheinander 14, 17, 85, 74. Aus dem Resultat 74 erkennt man die gedachte Zahl 7. Die Begründung des Verfahrens liefert die Umformung: $(2x + 3) \cdot 5 - 11$ oder $10x + 15 - 11$ oder $10x + 4$.

Solche Aufgaben über Erraten von Zahlen finden sich schon in dem 1612 zuerst erschienenen klassischen Werke von Bachet „Problesmes plaisans et délectables“. Da diese Bachetschen Aufgaben, obwohl sie nichts Besonderes bieten, sondern teilweise unnötig kompliziert sind, seit ihrem Erscheinen nicht aufgehört haben, immer wieder ans Tageslicht gezogen zu werden, und dadurch eine gewisse historische Berechtigung erlangt haben, so sollen zwei von ihnen auch in diesem Buche Platz finden:

4. Man lasse jemand eine Zahl sich denken, dieselbe verdreifachen und dann die Hälfte nehmen, falls dies ohne Rest ausführbar ist. Falls dies aber nicht ohne Rest ausführbar ist, lasse man vorher 1 addieren, ehe die Hälfte genommen wird. Die erhaltene Hälfte lasse man mit 3 multiplizieren und sich das so gefundene Resultat sagen. Wenn man dieses durch 9 dividiert und die dabei erhaltenen Ganzen mit 2 multipliziert, erhält man die gedachte Zahl, falls das anfängliche Nehmen der Hälfte ohne Rest geschehen konnte, dagegen 1 weniger als die gedachte Zahl, falls beim Nehmen der Hälfte ein Rest geblieben war. Bei der Begründung dieses Verfahrens hat man zu unterscheiden, ob die gedachte Zahl gerade oder ungerade war. War sie gerade, so kann sie gleich $2 \cdot n$ gesetzt werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dann erhält man durch das angegebene Verfahren nacheinander: $2n \cdot 3 = 6n$, $6n : 2 = 3n$, $3n \cdot 3 = 9 \cdot n$. Die Zahl $9 \cdot n$ ist also gleich der Zahl, die man erfährt. Man rechnet nun für sich weiter $9 \cdot n : 9 = n$, $n \cdot 2 = 2n$, das ist aber die gedachte Zahl. Falls die gedachte Zahl ungerade war, darf man sie gleich $2 \cdot n + 1$ setzen, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Dann ergeben die vorgeschriebenen Rechnungen nacheinander: $(2n + 1) \cdot 3 = 6n + 3$, $6n + 3 + 1 = 6n + 4$, $(6n + 4) : 2 = 3n + 2$, $(3n + 2) \cdot 3 = 9n + 6$. Man erfährt also die Zahl $9 \cdot n + 6$. Dividiert man durch 9, so erhält man die Zahl n als die Ganzen der Division. Durch Multiplikation mit 2 und Addition von 1 erhält man die gedachte Zahl $2 \cdot n + 1$.

Bei der folgenden Aufgabe von Bachet muß man sogar unterscheiden, ob die gedachte Zahl bei der Teilung durch 4 den Rest 0, 1, 2 oder 3 läßt:

5. Man lasse die gedachte Zahl verdreifachen. Dann lasse man von der so erhaltenen Zahl oder von der um 1 größeren die Hälfte nehmen, je nachdem beim Verdreifachen eine gerade oder eine ungerade Zahl erschienen war. Die erhaltene Hälfte lasse man wieder verdreifachen, und von dem Dreifachen oder der um 1 größeren Zahl die Hälfte nehmen, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl erschienen war. Dann lasse man sich die Ganzen sagen, die bei der Division jener Hälfte durch 9 entstehen. Die so erfahrene Zahl hat man mit 4 zu multiplizieren und zu dem erhaltenen Quotienten nichts oder 1 oder 2 oder 3 zu addieren, um die gedachte Zahl zu erhalten. Man hat nämlich nichts zu addieren, falls bei beiden Verdreifachungen gerade Zahlen erschienen waren, 1 zu addieren, falls nur bei der ersten Verdreifachung eine ungerade Zahl erhalten war, 2 zu addieren, falls dies nur bei der zweiten Verdreifachung geschehen war, und 3 zu addieren, falls bei beiden Verdreifachungen ungerade Zahlen gekommen waren. Zum Beweise dieses Verfahrens hat man zu unterscheiden, ob die gedachte Zahl bei der Teilung durch 4 den Rest 0, 1, 2 oder 3 ergibt, d. h., ob sie gleich $4 \cdot n$ oder gleich $4 \cdot n + 1$ oder gleich $4 \cdot n + 2$ oder gleich $4 \cdot n + 3$ zu setzen ist, wo immer n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. a) Aus $4 \cdot n$ entsteht durch die angegebenen Rechnungen nacheinander: $12n$, $6n$, $18n$, $9n$, n, woraus man dann schließt, daß $4 \cdot n + 0 = 4n$ die gesuchte Zahl ist; b) aus $4n + 1$ entsteht: $12n + 3$, $12n + 4$, $6n + 2$, $18n + 6$, $9n + 3$, n, woraus man $4 \cdot n + 1$ für die gedachte Zahl schließt; c) aus $4n + 2$ entsteht: $12n + 6$, $6n + 3$, $18n + 9$, $18n + 10$, $9n + 5$, n, woraus man $4n + 2$ schließt; d) aus $4n + 3$

entsteht: $12n + 9$, $12n + 10$, $6n + 5$, $18n + 15$, $18n + 16$, $9n + 8$, n, woraus man $4n + 3$ schließt.

Ein solches Erraten gedachter Zahlen muß demjenigen, der gar nichts von Algebra versteht, noch rätselhafter erscheinen, wenn man die gedachte Zahl selbst nicht bloß anfänglich, sondern auch nachher noch einmal oder mehrere Male in die Rechnung hineinzieht, wie folgende Beispiele zeigen:

6. Die gedachte Zahl werde um 3 vermehrt, die Summe mit 6 multipliziert, das Produkt um 3 vermindert, die erhaltene Differenz dann aber noch um die anfänglich gedachte Zahl vermindert; endlich werde noch der erhaltene Unterschied durch 5 dividiert, was immer möglich sein muß. Das so erhaltene Resultat lasse man sich sagen. Um aus ihm die gedachte Zahl zu finden, hat man es nur um 3 zu vermindern. Denn der Ausdruck $[(x + 3) \cdot 6 - 3 - x] : 5$ ergibt durch arithmetische Umformung $x + 3$. War z. B. 19 die gedachte Zahl, so erhält man durch die angegebenen Rechnungen nacheinander die Zahlen 22, 132, 129, 110, 22. Erfährt man nun die Zahl 22 als letztes Resultat, so hat man 22 um 3 zu vermindern, um die gedachte Zahl zu erhalten.

7. Das Vierfache der gedachten Zahl lasse man um 3 vermindern, die erhaltene Differenz mit 6 multiplizieren, zu dem erhaltenen Produkte erst 3 und dann noch die gedachte Zahl addieren, die erhaltene Summe durch 5 dividieren und zu dem erhaltenen Quotienten das Dreifache der Zahl addieren, die um 1 größer ist, als die gedachte Zahl. Dann lasse man sich das Resultat nennen. Der achte Teil desselben ist immer die gedachte Zahl. Denn der Ausdruck $[(4x - 3) \cdot 6 + 3 + x] : 5 + 3(x + 1)$ ergibt durch Vereinfachung nacheinander $(25x - 15) : 5 + 3x + 3$ oder $5x - 3 + 3x + 3$ oder $8x$. War z. B. 11 die gedachte Zahl, so erhält man durch die angegebenen Rechnungen nacheinander 44, 41, 246, 249,

260, 52, dann $52 + 3 \cdot (11 + 1) = 52 + 3 \cdot 12 = 52 + 36 = 88$. Dieses Resultat ergibt aber die gedachte Zahl 11, wenn man es durch 8 dividiert.

Wenn der Ratende Arithmetik und Algebra versteht, so kann er es auch demjenigen, der sich die zu ratende Zahl gedacht hat, ganz überlassen, welche Rechnungsarten er nacheinander anwenden will und mit welchen Zahlen er es tun will. Nur muß ihm der, der die Zahl gedacht hat, angeben, welche Zahl er addiert, subtrahiert, multipliziert oder zum Divisor benutzt. Dann wird der Ratende die gedachte Zahl x nennen und aus den gehörten Angaben eine Gleichung zusammenstellen. Durch Lösung derselben erhält er dann die gesuchte Zahl x, die er raten wollte. Dabei darf die gedachte Zahl auch eine negative Zahl oder ein Bruch sein. Ebenso dürfen die zum Rechnen verwandten Zahlen auch negativ oder gebrochen sein. Wenn dann aber die gedachte Zahl mehr als einmal in die Rechnung hineingezogen wird, so kann es kommen, daß die zur Auffindung der gedachten Zahl dienende Gleichung von höherem als dem ersten Grade wird und daher die Lösung der Gleichung schwieriger wird. In einfachen Fällen und bei kleinen Zahlen wird es freilich leicht sein, die Zahl x zu raten, die die entstandene Gleichung richtig macht. Hier nur noch ein Beispiel für den Fall, daß die Gleichung, welche die gedachte Zahl liefert, vom zweiten Grade wird.

8. Man lasse die gedachte Zahl mit der um 1 größeren multiplizieren, vom Produkt die gedachte Zahl subtrahieren und sich den erhaltenen Rest nennen. Die Quadratwurzel aus demselben ergibt die gedachte Zahl. Denn $x(x + 1) - x$

ergibt $x^2 + x - x$, d. h. x^2. War z. B. 29 die gedachte Zahl, so erfährt man die Zahl 841 als Resultat. Die Quadratwurzel aus 841 ergibt 29 als die gedachte Zahl.

9. Derjenige, der sich eine Zahl gedacht hat und dem es ganz überlassen ist, wie er damit rechnen will, gibt an, daß er das Doppelte der gedachten Zahl zu 17 addiert hat, die erhaltene Summe mit der gedachten Zahl multipliziert hat und auf solche Weise zu der Zahl 135 gelangt ist. Der Ratende hat dann anzusetzen: $(17 + 2x)\,x = 135$, woraus er $2x^2 + 17x = 135$ und daraus $4x^2 + 34x = 270$ folgert. Um anfänglich Brüche zu vermeiden, wird er diese Gleichung mit 4 multiplizieren, woraus $16x^2 + 136x = 1080$ folgt. Durch Addition des Quadrats des achten Teils von 136, also der Zahl 17, ergibt sich dann: $(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 17 + 17^2 = 1369$. Die Quadratwurzel aus 1369 ergibt 37, so daß links das Quadrat von $4x + 17$, rechts das von 37 erschienen ist, woraus folgt, daß $4x + 17 = 37$ oder $4x + 17 = -37$ ist. Im ersten Falle ergibt sich 5 als gedachte Zahl. Der zweite Fall ergibt $x = -13\frac{1}{2}$, so daß, wenn auch eine negative gebrochene Zahl gedacht sein könnte, der Ratende zweifelhaft sein muß, ob die Zahl 5 oder die Zahl $-13\frac{1}{2}$ gedacht war.

Bisher war immer nur vorausgesetzt, daß eine einzige Zahl gedacht ist. Sind zwei oder mehr Zahlen gedacht, so führt die Auffindung derselben auf ein System von zwei oder mehr Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Sind mehr Zahlen gedacht, als Angaben darüber gemacht werden, so führt die Lösung auf sogenannte diophantische Gleichungen*). Die darauf führenden

*) Die methodische Lösung solcher Gleichungen findet man im ersten Teil von Band V der „Sammlung Schubert“, betitelt „Niedere Analysis“, Leipzig 1902.

Probleme sollen jedoch hier ausgeschlossen bleiben. Dagegen soll hier der Fall erwähnt werden, daß zwei Zahlen gedacht sind und auch zwei Angaben darüber vorliegen, sowie, daß drei Zahlen gedacht sind und drei Angaben darüber vorliegen. Einige Beispiele einfachster Natur folgen hier:

10. Man lasse sich die Summe und die Differenz zweier gedachter Zahlen angeben. Von den beiden Resultaten, die man so erfährt, nehme man die halbe Summe und die halbe Differenz. Dann hat man die gedachten Zahlen. Denn $x + y = a$ und $x - y = b$ ergeben durch Addition $2x = a + b$ oder x gleich der Hälfte von $a + b$. Ferner erhält man durch Subtraktion $2y = a - b$ oder y gleich der Hälfte von $a - b$.

11. Von drei gedachten Zahlen lasse man die erste und zweite, die erste und dritte, sowie die zweite und dritte addieren. Man hört, daß dadurch die Summen 13, 18, 21 erh ten sind. Man setzt dann an: $x + y = 13$, $x + z = 21$, $y + z = 18$. Man addiere alle drei Gleichungen. Dann erhält man $2x + 2y + 2z = 52$ oder $x + y + z = 26$. Subtrahiert man von dieser Gleichung jede der drei angesetzten Gleichungen, so erhält man $x = 8$, $y = 5$, $z = 13$ als die gedachten drei Zahlen. Wenn also überhaupt bei drei gedachten Zahlen die Summe je zweier angegeben wird, so hat man von der Hälfte der Summe der drei angegebenen Resultate jedes einzelne Resultat zu subtrahieren, um die drei gedachten Zahlen zu erhalten.

Für den Laien gestalten sich solche auf Raten von Zahlen bezüglichen Aufgaben dadurch oft fesselnder, daß die Zahlen sich auf Dinge beziehen, die den Ratenden persönlich besonders angehen, wie etwa die Zahl der Geldstücke, die er bei sich hat, die Zahl seiner Zähne, das Datum seines Geburtstages, sein Geburtsjahr, sein Alter, die

Zahlen, die er gewürfelt hat, usw. Von solchen eingekleideten Zahlen-Rate-Aufgaben hier nur ein Beispiel:

12. Man bitte denjenigen, dessen Alter man raten will, von der Zahl, die sein Alter in Jahren ausdrückt, die Quersumme (Summe der Ziffern) anzugeben. Darauf bitte man ihn, die betreffende Zahl umzukehren, d. h. die Zehner zu Einern und die Einer zu Zehnern zu machen, und dann den Unterschied zwischen der ursprünglichen und der umgekehrten Zahl zu sagen. Um aus den beiden so erhaltenen Angaben das Alter zu bestimmen, dividiere man die zu zweit angegebene Zahl durch 9, was immer ohne Rest möglich ist. Den erhaltenen Quotienten hat man dann zur Quersumme zu addieren und von der Quersumme zu subtrahieren. Die Hälfte der in beiden Fällen erhaltenen Resultate stellen die Ziffern der Zahl dar, die das Alter angibt. Erfährt man z. B. 11 als Quersumme und 63 als Differenz, so hat man 63 durch 9 zu dividieren und die erhaltene Zahl 7 zu 11 zu addieren und von 11 zu subtrahieren. So erhält man 18 und 4, deren Hälften 9 und 2 sind. Die Entscheidung, ob das Alter dann 29 oder 92 Jahre beträgt, wird, wenn nicht auf andere Weise, dadurch herbeigeführt, daß man sich sagen läßt, ob die ursprüngliche Zahl oder die durch Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl die größere war.

§ 2

Vorauswissen erhaltener Resultate

Wenn man jemand, der sich eine Zahl gedacht hat (vgl. § 1), vorschreibt, wie er mit der Zahl weiter rechnen soll, so läßt es sich so einrichten, daß die gedachte Zahl sich bei der Berechnung forthebt, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß man die gedachte Zahl nicht allein anfänglich, sondern auch nachher noch mindestens einmal in die Rechnung hineinzieht. Die Berechnung des entstandenen Ausdrucks, der außer der sich forthebenden gedachten Zahl x nur noch bestimmte Zahlen enthält, führt dann zu einem Resultate, das derjenige, der sich die Zahl gedacht hat, auch erhalten haben muß, so daß man ihm sein Resultat sagen kann, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Man lasse die gedachte Zahl verdreifachen, zu dem Dreifachen 2 addieren, die Summe mit 4 multiplizieren, zum Produkte 4 addieren, die Summe durch 12 dividieren und vom Quotienten die gedachte Zahl subtrahieren. Dann weiß man, daß der, der sich die Zahl gedacht hat, die Zahl 1 erhalten haben muß, gleichviel, welche Zahl er sich gedacht hat. Denn $(3x + 2) \cdot 4 + 4$ ergibt $12x + 8 + 4$ oder $12x + 12$, dies durch 12 dividiert ergibt $x + 1$. Subtrahiert man aber x von $x + 1$, so muß immer 1 herauskommen, gleichviel, wie groß x ist. War z. B. 7 die gedachte Zahl, so wurden nacheinander folgende Zahlen erhalten: 21, 23, 92, 96, 8, 1. War 9 die gedachte Zahl, so ergab sich: 27, 29, 116, 120, 10, 1.

2. Die gedachte Zahl werde um 5 vermehrt, die Summe mit 18 multipliziert, vom Produkte das Dreifache der gedachten Zahl subtrahiert, die Differenz durch 15 dividiert und vom Quotienten die gedachte Zahl subtrahiert, so ergibt sich immer 6, gleichviel welche Zahl gedacht war. Denn $[(x+5)\cdot 18 - 3x] : 15 - x = [18x + 90 - 3x] : 15 - x = [15x + 90] : 15 - x = x + 6 - x = 6$. War z. B. 13 die gedachte Zahl, so ergab sich nacheinander: 18, 324, 285, 19, 6. War 45 die gedachte Zahl, so erhielt man: 50, 900, 765, 51, 6.

3. Die beiden Zahlen, von denen die eine um 3, die andere um 4 größer ist, als die gedachte Zahl, lasse man miteinander multiplizieren, das Produkt vervierfachen und zu diesem Vierfachen 1 addieren. Aus der erhaltenen Summe lasse man die Quadratwurzel ziehen und von derselben das Doppelte der gedachten Zahl subtrahieren. Dann erhält man immer 7. Denn $4(x+3)(x+4)+1$ ergibt $4x^2 + 28x + 49 = (2x+7)^2$. Also liefert die Quadratwurzel-Ausziehung $2x + 7$. Subtrahiert man aber $2 \cdot x$ von $2 \cdot x + 7$, so bleibt immer 7 übrig, gleichviel wie groß x war. War etwa 96 die gedachte Zahl, so hat man zu rechnen: $99 \cdot 100$, also 9900, woraus dann durch Vervierfachung 39600 hervorgeht. Dann ist die Quadratwurzel aus 39601 zu ziehen. Dieselbe ergibt 199. Wenn man dann von diesem Resultat das Doppelte der gedachten Zahl, also 192 abziehen läßt, wird in der Tat die Zahl 7 erhalten.

§ 3

Merkwürdige Zifferfolgen

Die Welt der Zahlen birgt mannigfache Eigenschaften, die dem Laien wie ein Wunder erscheinen müssen, während sie dem Arithmetiker, weil er diese Eigenschaften beweisen kann, selbstverständlich erscheinen. Hier sollen einige Eigenschaften behandelt werden, bei denen die Reihenfolge der aufeinanderfolgenden Ziffern maßgebend ist.

Die sechsziffrige Zahl

142857

hat die merkwürdige Eigenschaft, daß die Reihenfolge ihrer Ziffern sich nicht ändert, wenn man sie mit 2, 3, 4, 5 oder 6 multipliziert, wobei man die erste Ziffer als auf die letzte folgend ansehen muß. In der Tat gibt das

Zweifache: 285714; Vierfache: 571428;
Dreifache: 428571; Fünffache: 714285;
Sechsfache: 857142.

Nimmt man weiter das Siebenfache, so erhält man eine Zahl, die aus lauter Neunen besteht. Multipliziert man mit einer Zahl, die größer als 7 ist, so erhält man eine Zahl, die aus mehr als sechs Ziffern besteht. Wenn man dann die Zahl, die den sechs letzten Ziffern vorangeht, zu der Zahl addiert, die aus den sechs letzten Ziffern besteht, so erhält man wiederum dieselbe Zifferfolge wie oben, also immer eine der sechs Zahlen 142857 oder 428571 oder 285714 oder 857142 oder 571428 oder 714285. Beispielsweise multiplizieren wir die ursprüngliche Zahl 142857 mit 24, so erhalten wir 3428568.

Die den letzten sechs Ziffern vorangehende Zahl ist 3. Addieren wir dieselbe zu der Zahl 428568, die aus den sechs letzten Ziffern besteht, so ergibt sich 428571, also eine Zahl, die dieselbe Zifferfolge hat, wie die ursprüngliche Zahl 142857, wenn man die erste Ziffer 1 als auf die letzte 7 folgend ansieht. Nur wenn man mit einem Vielfachen von 7 multipliziert, erhält man auf dieselbe Weise eine Zahl, die sich aus sechs Neunen zusammensetzt. Multipliziert man z. B. mit 42, so erhält man zunächst 5999994, und da diese Zahl sieben Ziffern hat, soll man die, von rechts gerechnet, siebente Ziffer 5 zu 999994 addieren, was in der Tat auf 999999 führt.

Diese wunderbare Eigenschaft der Zahl 142857 erkennt man als sehr natürlich, wenn man daran denkt, daß 142857 die .Periode der Dezimalbruchentwicklung des Bruches $\frac{1}{7}$ ist. Entwickelt man $\frac{1}{7}$ in einen Dezimalbruch, so erscheinen nacheinander die Reste 3, 2, 6, 4, 5, 1, die man immer mit zehn zu multiplizieren hat, um den folgenden Quotienten zu erhalten. Dadurch erscheinen 4, 2, 8, 5, 7, 1 als Quotienten. Folglich muß der Bruch $\frac{3}{7}$ die Periode 428571, $\frac{2}{7}$ die Periode 285714, $\frac{6}{7}$ die Periode 857142 usw. haben. Nun ist aber anderseits $\frac{3}{7}$ das Dreifache von $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ das Zweifache von $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$ das Sechsfache von $\frac{1}{7}$ usw. Hiermit ist aber die erwähnte Eigenschaft der Zahl 142857 als natürlich nachgewiesen, für den Fall, daß der Multiplikator kleiner als 7 ist. Multipliziert man $\frac{1}{7}$ mit 7, so erscheint die Zahl 1; 1 ist aber anderseits gleich dem periodischen Dezimalbruch, der aus lauter Neunen besteht. Wie zu verfahren ist, wenn der Multiplikator größer als 7 ist, geht aus dem folgenden Beispiel hervor, wo 24 als Multiplikator gewählt ist. Daß der Bruch $\frac{1}{7}$ einem periodischen Dezimalbruch gleich ist, dessen Periode 142857 ist, läßt sich arithmetisch so ausdrücken:

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \frac{142857}{10^{18}} + \cdots$$

Multipliziert man nun mit 24, so erhält man:

$$3\frac{3}{7} = 3 + \frac{428568}{10^6} + \frac{3}{10^6} + \frac{428568}{10^{12}} + \frac{3}{10^{12}} + \cdots$$

Man sieht also, daß man die den letzten sechs Ziffern voranstehende 3 zu der Zahl, die aus den letzten sechs Ziffern besteht, addieren muß, um wiederum eine Zahl mit derselben Zifferfolge zu erhalten.

Aus der voranstehenden Begründung geht hervor, daß die merkwürdige Eigenschaft der Zahl 142857 jeder $(p-1)$-ziffrigen Zahl zukommen muß, die die Periode der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$ ist, wo p Primzahl ist. Um weitere solche Zahlen zu finden, müssen wir also Primzahlen p von der Eigenschaft bestimmen, daß der Dezimalbruch, der gleich $\frac{1}{p}$ ist, eine Periode mit $p-1$ Ziffern hat. Die kleinste von solchen Zahlen ist 7, dann folgen 17 und 19. Die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{17}$ ergibt eine Periode von 16 Stellen, nämlich:

0588235294117647.

Betrachtet man diese Periode als eine Zahl für sich, so hat dieselbe die nämliche Eigenschaft, wie 142857, falls man die 0, mit der die Periode beginnt, mit zur Zahl hinzurechnet, so daß die Zahl also nicht als fünfzehnziffrig, sondern als sechzehnziffrig betrachtet wird. Man kann dann die Zahl mit einem ganz beliebig gewählten Multiplikator multiplizieren, immer wird eine Zahl mit derselben Zifferfolge wiedererscheinen. Multipliziert man z. B. mit 4, so erhält man:

2352941176470588.

Multipliziert man mit 17, so erscheinen wieder lauter Neunen. Multipliziert man mit einer Zahl, die größer als 17 ist, so hat man die den 16 letzten Ziffern voranstehende Zahl zu