

# Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik

insbesondere für Ingenieure und Naturforscher

Von

**Dr. Gerhard Kowalewski**

o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule  
zu Prag

Zweite Auflage

Mit 40 Figuren



Berlin 1944

**Verlag Walter de Gruyter & Co.**

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung  
Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Alle Rechte, insbesondere das der Über-  
setzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Archiv-Nr. 12 08 44

Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Printed in Germany

# Inhalt.

## Erstes Kapitel.

### Vektorrechnung und Determinantentheorie.

	Seite
§ 1. Rationale und irrationale Zahlen . . . . .	5
§ 2. Punkte und Zahlen . . . . .	7
§ 3. Das Volumprodukt dreier Vektoren . . . . .	13
§ 4. Eigenschaften der Determinanten . . . . .	18
§ 5. Flächenprodukt zweier Vektoren in einer Ebene . . . . .	21
§ 6. Auflösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	23
§ 7. Der allgemeine Determinantenbegriff . . . . .	29
§ 8. Lineare homogene Gleichungen und lineare Formen . . . . .	33
§ 9. Das innere Produkt zweier Vektoren . . . . .	38
§ 10. Das äußere Produkt zweier Vektoren . . . . .	42
§ 11. Drehungen um eine Achse . . . . .	50

## Zweites Kapitel.

### Lehre von den Grenzwerten.

§ 1. Zahlenfolgen . . . . .	53
§ 2. Der Satz von Weierstraß . . . . .	55
§ 3. Sieben Grundeigenschaften der konvergenten Folgen . . . . .	57
§ 4. Aufsteigende und absteigende Folgen . . . . .	58
§ 5. Nullfolgen . . . . .	61
§ 6. Hauptsätze der Grenzwertrechnung . . . . .	65
§ 7. Häufungswerte als Grenzwerte von Teilfolgen . . . . .	68
§ 8. Cauchys Konvergenzkriterium . . . . .	70

## Drittes Kapitel.

### Differential- und Integralrechnung.

§ 1. Veränderliche und Funktionen . . . . .	70
§ 2. Rationale Potenzen von $x$ . . . . .	73
§ 3. Irrationale Potenzen von $x$ . . . . .	78
§ 4. Die Exponentialfunktion . . . . .	80
§ 5. Die Funktion Logarithmus . . . . .	83
§ 6. Kreisfunktionen . . . . .	84
§ 7. Ableitungen und Differentiale . . . . .	89
§ 8. Die Leibnizschen Regeln . . . . .	93
§ 9. Differentiation der Polynome und rationalen Funktionen . . . . .	97
§ 10. Differentiation der Exponentialfunktion, der allgemeinen Potenz und des Logarithmus . . . . .	98

§ 11. Differentiation der Kreisfunktionen . . . . .	107
§ 12. Differentiation einer mittelbaren Funktion . . . . .	109
§ 13. Lückenlos aufsteigende und absteigende Funktionen . . . . .	113
§ 14. Der Mittelwertsatz . . . . .	115
§ 15. Integrale als Grenzwerte von Summen . . . . .	119
§ 16. Integrale stetiger Funktionen . . . . .	121
§ 17. Segmente und Sektoren, ausgedrückt durch Integrale . . . . .	125
§ 18. Bogenlängen, ausgedrückt durch Integrale . . . . .	130
§ 19. Übergang zu einer neuen Integrationsvariablen . . . . .	134
§ 20. Rechtfertigung einer althergebrachten Symbolik . . . . .	135
§ 21. Stieltjessche Integrale . . . . .	137
§ 22. Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe . . . . .	140
§ 23. Eigenschaften der Potenzreihen . . . . .	144
Sachregister . . . . .	154

---

## Vorwort.

Dieses kleine Buch will den jungen Ingenieuren und Naturforschern behilflich sein, die Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik klar zu erfassen. Es stützt sich auf eine fast 40-jährige Lehrerfahrung an Universitäten (Leipzig, Greifswald, Bonn, Prag) und Technischen Hochschulen (Prag, Dresden).

Angesichts der starken Zurückdrängung der Mathematik in den Lehrplänen unserer höheren Schulen ist es an den Hochschulen mehr denn je notwendig, mit allen Mitteln vereinfachender Darstellungskunst dafür zu sorgen, daß wenigstens die Grundkenntnisse der höheren Mathematik fest angeeignet werden, ohne die ein gedeihliches Studium der Technik und Naturwissenschaft undenkbar ist. Hierbei mitzuhelfen fühlte ich mich als alter Diener der mathematischen Lehre verpflichtet.

Dresden, Weißer Hirsch, 1938.

Gerhard Kowalewski

---

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Diese neue Auflage ist ein fast unveränderter Abdruck der ersten. Auf Grund einer sorgfältigen Durchsicht sind alle kleinen Fehler beseitigt.

Prag, Januar 1943.

Gerhard Kowalewski

## Erstes Kapitel.

# Vektorrechnung und Determinantentheorie.

### § 1. Rationale und irrationale Zahlen.

Die positiven und negativen ganzen Zahlen, ebenso die Null, sind jedem etwas ganz Bekanntes. Er weiß z. B. genau, was bei einem Celsiusthermometer 17 Grad oder — 10 Grad oder 0 Grad bedeuten, was es heißt, 100 M oder — 80 M oder 0 M zu besitzen, was eine Höhe von 500 m oder — 20 m oder 0 m über dem Meeresspiegel besagt.

Aber auch die positiven und negativen Brüche, wie  $\frac{3}{4}$  oder  $-\frac{2}{3}$ , sind jedem, der eine Schule durchgemacht hat, geläufig. Er weiß sie anzuwenden und mit ihnen zu rechnen.

Alle diese Zahlen werden als rational bezeichnet. Eine rationale Zahl oder Rationalzahl ist also entweder eine ganze Zahl, wozu auch die Null gehört, oder ein Bruch, positiv oder negativ.

Man kommt bei allen praktischen Messungen, weil es sich dabei immer um eine beschränkte Genauigkeit handelt, mit den Rationalzahlen aus. Eine Messung besteht darin, daß man feststellt, wie oft eine zugrunde gelegte Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, d. h. wie oft sie sich von ihr fortnehmen läßt. Bleibt ein Rest übrig, so teilt man die Einheit in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. in Zehntel, und sieht zu, wie oft die Zehnteinheit in dem vorliegenden Rest enthalten ist. Bleibt auch hier ein Rest übrig, so teilt man die Zehnteinheit nochmals in zehn gleiche Teile. Fährt man in dieser Weise fort, so wird schließlich der Rest unterhalb der Genauigkeitsgrenze liegen. Allen Messungen, wie genau sie auch sein mögen, ist eine natürliche Genauigkeitsgrenze gesetzt, unter die man nicht heruntergehen kann, weil unsere Sinne, auch wenn wir sie durch Instrumente verfeinern, dem Gesetz der Schwelle unterworfen sind. Was unterhalb der Schwelle liegt, entzieht sich der Wahrnehmung.

Den praktischen Messungen stehen die Messungen der reinen Geometrie gegenüber, die absolut genau sein müssen. Bei solchen Messungen hat es sich gezeigt, daß manchmal die Rationalzahlen nicht ausreichen, um das Messungsergebnis auszudrücken. Wenn man z. B. die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite die Längeneinheit ist, absolut genau messen will, so läßt sich in aller Strenge beweisen, daß die Diagonale kein rationales Vielfaches der Seite ist.

Wenn ich die Seite in  $n$  gleiche Teile zerlege, so wird niemals ein solcher Teil in der Diagonale ohne Rest aufgehen, wie ich die ganze Zahl  $n$  auch wählen mag. Zu dieser Erkenntnis gelangte bereits Pythagoras (569—500 v. Chr.). Er stützte sich dabei auf seinen berühmten Satz, daß im rechtwinkligen Dreieck das Hypotenusenquadrat der Summe der Kathetenquadrate gleichkommt. Wäre die Diagonale des Quadrats das  $m$ -fache eines  $n$ -tels der Seite, so müßte nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1 + 1,$$

d. h.  $m^2 = 2n^2$  sein. Nun haben die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... die Eigenschaft, daß ihre Quadrate 1, 9, 25, ... ebenfalls ungerade Zahlen sind, während die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... gerade Quadrate 4, 16, 36, ... liefern. Aus der Gleichung  $m^2 = 2n^2$  sehen wir, daß  $m^2$  gerade ist. Also muß auch  $m$  gerade sein, so daß man  $m = 2m'$  schreiben kann. Setzt man in obiger Gleichung  $m^2 = 4m'^2$ , so folgt  $2m'^2 = n^2$ , woraus zu schließen ist  $n = 2n'$ . Der Bruch  $\frac{m}{n}$  läßt sich also durch Kürzung in  $\frac{m'}{n'}$  überführen. Setzt man voraus, daß  $\frac{m}{n}$  bereits nach Möglichkeit gekürzt war, so liegt offenbar ein Widerspruch vor. Der schon völlig gekürzte Bruch müßte sich noch durch 2 kürzen lassen.

Die alten Griechen drückten dieses Ergebnis so aus, daß sie die Seite und Diagonale des Quadrats für inkommensurabel erklärten. Es gibt kein gemeinsames Maß für beide, d. h. keine Länge, die in beiden aufgeht. Eine sehr wichtige und bemerkenswerte Feststellung.

Will man alle Messungsergebnisse, auch die absolut genauen der Geometrie, durch Zahlen ausdrücken, so ist eine Erweiterung des Zahlbegriffs über die rationalen Zahlen hinaus erforderlich. Die Diagonale des Quadrats von der Seite 1 hat dann eine Länge, die durch eine Irrationalzahl ausgedrückt wird. Rationale und irrationale Zahlen werden zusammen als reelle Zahlen bezeichnet.

Eudoxos, ein Zeitgenosse Platons (429—348 v. Chr.), gab als erster eine wissenschaftliche Theorie der Irrationalzahlen. Als solche ist seine Proportionenlehre anzusehen, die Euklid (um 300 v. Chr.) im fünften Buch seiner Elemente dargestellt hat. Der Grundgedanke dieser Theorie ist derselbe, den in unserer Zeit (1872) Dedekind zur scharfen Erfassung des Irrationalen benutzt hat. Die Irrationalzahl wird festgelegt durch eine Einteilung aller Rationalzahlen in eine Klasse der größeren (obere) und eine Klasse der kleineren (untere Klasse). Überall, wo eine solche Einteilung der Rationalzahlen, ein sog. Schnitt, vorliegt und es nicht gelingt, die beiden Klassen durch eine Rationalzahl gegeneinander abzugrenzen, wird eine irrationale Trennungszahl fingiert, die alle Zahlen der unteren Klasse übertrifft und von allen Zahlen der oberen Klasse übertroffen wird. Diese Einfügung der Irrationalzahlen zwischen die kleineren und die größeren Rationalzahlen ist der

Angelpunkt der ganzen Theorie. Von hier aus wird dann auch das Rechnen mit den neuen Zahlen in absolut einwandfreier Weise begründet, worauf wir aber in dieser einführenden Darstellung nicht eingehen wollen.

§ 2. Punkte und Zahlen.

Descartes, der berühmte französische Philosoph (1596—1650), hat in seiner *Géométrie* (1637) gelehrt, wie man die Zahlen durch die Punkte einer Geraden in einfacher Weise versinnlichen kann. Er wurde dadurch der Begründer der analytischen Geometrie (Geometrie in Zahlen).

Auf einer Geraden kann man in zwei verschiedenen Richtungen fortschreiten. Die eine ist in Fig. 1 durch einen Pfeil markiert und soll die positive heißen. Die entgegengesetzte Richtung nennt man die negative. Eine Bewegung auf der Geraden in positiver Richtung gilt als Vorwärtsbewegung, eine in negativer Richtung als Rückwärtsbewegung. Nun sei  $A_1$  ein erster,  $A_2$  ein zweiter Punkt auf der Geraden,  $d$  die Entfernung beider, gemessen mit einer zugrunde gelegten Längeneinheit (in der Figur mit 1 bezeichnet). Bewegt man sich auf der Geraden von  $A_1$  nach  $A_2$ , so beschreibt man die Strecke  $A_1A_2$ . Hat man sich hierbei vorwärts bewegt, so wird der Strecke  $A_1A_2$  die Maßzahl  $d$  zugeschrieben. Hat man sich rückwärts bewegt, so gilt  $-d$  als die Maßzahl der Strecke  $A_1A_2$ . Die Maßzahl einer Strecke  $A_1A_2$  ist also die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Entfernung der beiden Punkte  $A_1, A_2$ . Dieses Vorzeichen ist das Zeichen  $+$ , wenn man vom Anfangspunkt  $A_1$  zum Endpunkt  $A_2$  durch eine Vorwärtsbewegung gelangt, das Zeichen  $-$ , wenn der Übergang vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Strecke eine Rückwärtsbewegung erfordert. Wir bezeichnen die Maßzahl der Strecke  $A_1A_2$  mit  $\overline{A_1A_2}$ . In Fig. 1 ist z. B.  $\overline{A_1A_2} = 3$ , dagegen  $\overline{B_1B_2} = -1$ .

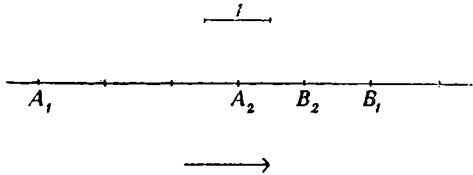


Fig. 1.

Wenn man Anfangspunkt und Endpunkt einer Strecke vertauscht, so kehrt die Maßzahl ihr Zeichen um, d. h. es ist

$$(1) \quad \overline{A_1A_2} = -\overline{A_2A_1}.$$

Wenn wir z. B. durch eine Vorwärtsbewegung von  $A_1$  nach  $A_2$  gelangen, so kommen wir von  $A_2$  wieder nach  $A_1$ , indem wir um dasselbe Stück rückwärts gehen.

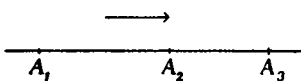


Fig. 2.

Eine wichtige Beziehung besteht zwischen den durch drei Punkte  $A_1, A_2, A_3$  bestimmten Strecken. Liegen die drei Punkte wie in Fig. 2, so sind  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_1A_3}$  die Längen der

Strecken  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_1A_3$  und es ist klar, daß die Summe der beiden ersten gleich der dritten ist. Demnach gilt die Beziehung

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_3}$$

oder mit Rücksicht auf die Eigenschaft (1)

$$(2) \quad \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_1} = 0.$$

Man kann nun zeigen, daß diese Dreipunkteformel auch für jede andere Lage der beteiligten Punkte gilt. Da man zur Lage in Fig. 2 stets durch Ummumerierung der Punkte gelangen kann, so brauchen wir nur festzustellen, daß eine beliebige Vertauschung der Nummern 1, 2, 3 nichts an der Gültigkeit der Formel (2) ändert. Vertauscht man die Nummern zyklisch, d. h. ersetzt man 1, 2, 3 durch 2, 3, 1, so bleibt offenbar die Gleichung (2) erhalten. Durch nochmalige zyklische Vertauschung gelangt man von 2, 3, 1 zu 3, 1, 2. Es bleiben jetzt nur noch die Anordnungen 3, 2, 1 und 1, 3, 2 und 2, 1, 3 zu prüfen, sogar nur die erste, weil die beiden andern durch zyklische Nummernvertauschung aus ihr hervorgehen. Ersetzt man 1, 2, 3 durch 3, 2, 1, so verwandelt sich die linke Seite der Gleichung (2) in

$$\overline{A_3A_2} + \overline{A_2A_1} + \overline{A_1A_3},$$

d. h. in  $-(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_1})$ . Es tritt also nur der Faktor  $-1$  hinzu. Die Gleichung selbst bleibt erhalten. Sie stellt demnach eine für jede Lage der drei Punkte gültige Beziehung fest.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Versinnlichung der Zahlen durch die Punkte einer Geraden, die man die Zahlenlinie nennt, in einfachster Weise durchführen. Wir wählen auf der Geraden (vgl. Fig. 3) einen

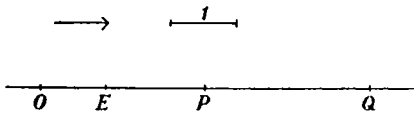


Fig. 3.

festen Anfangspunkt  $O$ . Jedem Punkt  $P$  der Geraden ordnen wir dann die Zahl  $x = \overline{OP}$  zu, also die Maßzahl der Strecke  $OP$ , die vom Anfangspunkt aus nach  $P$  führt. Dieses  $x$  heißt die Abszisse des Punktes  $P$ .

Zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  haben verschiedene Abszissen. Aus  $\overline{OP} = \overline{OQ}$  würde auf Grund der Dreipunkteformel  $\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QO} = 0$  folgen  $\overline{PQ} = 0$ , d. h. die Strecke  $PQ$  hätte die Maßzahl, mithin auch die Länge Null, die Punkte  $P$  und  $Q$  wären also nicht verschieden. Wenn eine Zahl  $x$  gegeben ist, so läßt sich auf der Zahlenlinie stets ein Punkt  $P$  finden, dessen Abszisse den Wert  $x$  hat. Ist  $x = 0$ , so fällt  $O$  mit  $P$  zusammen. Ist  $x$  positiv, so gelangt man von  $O$  nach  $P$  durch eine Vorwärtsbewegung um  $x$ , ist  $x$  negativ, so muß man, um  $P$  zu finden, von  $O$  aus um die Länge  $-x$  nach rückwärts gehen. Bei rationalem  $x$  gibt es hierbei keinerlei Schwierigkeit. Bei irrationalen  $x$  könnten Zweifel darüber entstehen, ob es immer eine Strecke gibt, die eine gegebene irrationale Länge hat. Dies wird allgemein angenommen, ist aber im Grunde nur ein Axiom.



Durch die Formel  $x = \overline{OP}$  wird zwischen den Zahlen  $x$  und den Punkten  $P$  der Zahlenlinie eine Zuordnung hergestellt, die folgende Eigenschaften hat: Jedem Punkt  $P$  entspricht eine Zahl  $x$ , seine Abszisse. Verschiedene Punkte haben verschiedene Abszissen. Jede Zahl  $x$  kommt als Abszisse eines Punktes vor. Eine solche Zuordnung wird als Abbildung bezeichnet. Es ist also gelungen, die reellen Zahlen durch die Punkte einer Geraden abzubilden.

Der Punkt  $E$  mit der Abszisse 1 wird als Einheitspunkt bezeichnet, so wie man  $O$  auch den Nullpunkt nennt. Die Strecke  $OE$  ist die Grundstrecke oder Einheitsstrecke. Diese Einheitsstrecke beherrscht die ganze Abszissenbestimmung. Man kann sogar die Gerade verlassen und jeder Strecke  $AB$  im Raume, die zur Einheitsstrecke  $OE$  parallel ist, eine Maßzahl  $\overline{AB}$  zuschreiben. Sie ist das positive oder negative Längenverhältnis der Strecken  $AB$  und  $OE$ , je nachdem die Strecken  $AB$  und  $OE$  gleichsinnig oder gegensinnig gerichtet sind. Dieses mit einem Vorzeichen versehene Längenverhältnis der parallelen Strecken  $AB$  und  $OE$  bezeichnet man vielfach kurz mit  $\frac{AB}{OE}$ . Offenbar ändert ein solcher Streckenquotient sich nicht, wenn man die Maßeinheit anders wählt. Auch ist er unabhängig von der Festsetzung der positiven Richtung.

Descartes hat auch gezeigt, wie man die Zahlenpaare  $x_1, x_2$  durch die Punkte einer Ebene abbilden kann. Es wird in der Ebene ein Anfangspunkt  $O$  gewählt, von dem zwei Grundstrecken  $OE_1, OE_2$  ausgehen, jedoch so, daß die Punkte  $O, E_1, E_2$  nicht in gerader Linie liegen (vgl. Fig. 4). Wenn nun irgendein Punkt  $P$  der Ebene ins Auge gefaßt wird, so kann man durch ihn Parallelen zu den Grundstrecken ziehen. Jede von ihnen schneidet die andere Grundstrecke oder ihre Verlängerung in einem Punkte. Auf diese Weise gehört zu jedem Punkt  $P$  der Ebene ein Punktepaar  $P_1, P_2$ . Diese beiden Punkte kann man nun nach der Abszissenmethode festlegen und dabei  $OE_1$  und  $OE_2$

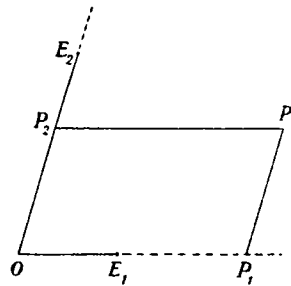


Fig. 4.

als Einheitsstrecken benutzen. Setzt man  $x_1 = \frac{OP_1}{OE_1}$  und  $x_2 = \frac{OP_2}{OE_2}$ , so sind  $x_1, x_2$  die Koordinaten des Punktes  $P$ . Die Geraden  $OE_1$  und  $OE_2$ , auf denen die positiven Richtungen von  $O$  nach  $E_1$  bzw.  $E_2$  laufen, nennt man die Koordinatenachsen. Gewöhnlich wählt man die Grundstrecken so, daß sie senkrecht aufeinanderstehen und spricht dann von rechtwinkligen Koordinaten. Auch gibt man meistens beiden Grundstrecken dieselbe Länge 1. Vielfach wird die eine Achse als Abszissen-, die andere als Ordinatenachse bezeichnet.  $\overline{OP_1}$  ist dann die Abszisse;  $\overline{OP_2}$  oder  $\overline{P_1P}$  die Ordinate (die im Endpunkt der Abszisse aufgerichtete Strecke).

Um eine Abbildung der Zahlentripel  $x_1, x_2, x_3$  durch die Punkte des Raumes zu gewinnen, wählt man im Raume einen Anfangspunkt  $O$ , ferner drei Grundstrecken  $OE_1, OE_2, OE_3$ , die nicht in eine Ebene fallen dürfen. Ist  $P$  irgendein Punkt im Raume, so lege man durch ihn drei Ebenen parallel zu den Ebenen  $OE_2E_3, OE_3E_1, OE_1E_2$ , den sog. Koordinatenebenen. Diese durch  $P$  gelegten Ebenen treffen die Grundstrecken  $OE_1, OE_2, OE_3$  oder ihre Verlängerungen in den Punkten  $P_1, P_2, P_3$ . Die Streckenquotienten

$$x_1 = \frac{OP_1}{OE_1}, \quad x_2 = \frac{OP_2}{OE_2}, \quad x_3 = \frac{OP_3}{OE_3}$$

sind dann die Koordinaten des Punktes  $P$ .

In Fig. 5 ist aus  $OP_1, OP_2, OP_3$  ein Parallelepipед oder, wie man vielfach sagt, ein Block konstruiert. Mit jeder der drei Grundstrecken laufen

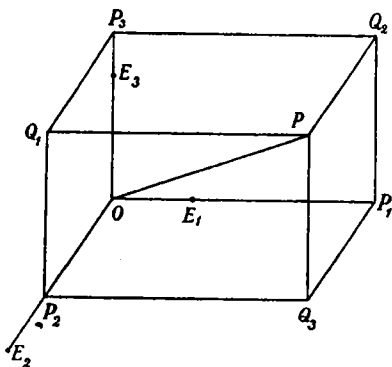


Fig. 5.

vier Blockkanten parallel, von denen eine durch  $O$ , eine durch  $P$  hindurchgeht.  $O$  und  $P$  sind Gegenecken des Blocks, ebenso  $P_1$  und  $Q_1, P_2$  und  $Q_2, P_3$  und  $Q_3$ . Man kann von  $O$  nach  $P$  auf sechs verschiedene Arten längs eines aus drei Kanten gebildeten Weges gelangen. Zum Beispiel kann man zuerst die Kante  $OP_1$  durchlaufen, dann  $P_1Q_3$  und schließlich  $Q_3P$ . Die beiden letzten Strecken entstehen durch Parallelverschiebung aus  $OP_2$  und  $OP_3$ . Sie sind, wie der technische Ausdruck heißt, mit diesen Strecken äquivalent. Man pflegt zu sagen,  $OP$  sei die Summe der Strecken  $OP_1, P_1Q_3, Q_3P$  oder auch der Strecken  $OP_1, OP_2, OP_3$ . Die Streckenaddition vollzieht sich in der Weise, daß man aus den zu summierenden Strecken mit Hilfe von Parallelverschiebungen einen Streckenzug bildet, wo immer im Endpunkt einer Strecke der Anfangspunkt der nächsten liegt. Die Summe ist dann diejenige Strecke, die vom Anfang zum Ende des Streckenzuges hinführt. Jede Strecke im Raum kann als Summe dreier Strecken (Komponenten) dargestellt werden, die parallel zu den drei Grundstrecken sind. Strecken werden vielfach durch einzelne Buchstaben bezeichnet, und zwar durch deutsche. Wenn man die Grundstrecken  $e_1, e_2, e_3$  nennt und, wie üblich,  $OP_1 = x_1e_1, OP_2 = x_2e_2, OP_3 = x_3e_3$  schreibt, so kann man die Komponentenzerlegung der Strecke  $OP$  durch die Formel

$$OP = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

ausdrücken. Man erhält  $OP$ , indem man die Grundstrecken mit passenden Zahlenfaktoren versieht und dann durch Bildung eines Streckenzuges summiert. Die Multiplikation einer Strecke mit einer Zahl bedeutet, daß die Länge der Strecke mit dem absoluten Betrage der Zahl (Zahl ohne Vorzeichen)

multipliziert und, falls die Zahl negativ ist, noch die Richtung der Strecke umgekehrt wird. So ist z. B.  $-3AB$  nichts anderes als  $3BA$  und dies die auf dreifache Länge gebrachte Strecke  $BA$ .

Die Komponenten  $OP_1, OP_2, OP_3$  der Strecke  $OP$  sind die Projektionen von  $OP$  auf die Geraden  $OE_1, OE_2, OE_3$ , wobei die Projektion mit Hilfe von Parallelebenen zu den Koordinatenebenen bewirkt wird.  $x_1, x_2, x_3$  sind die Maßzahlen dieser Projektionen, wobei die Grundstrecken als Einheitsstrecken dienen. Es ist also

$$x_1 = \overline{OP_1}, \quad x_2 = \overline{OP_2}, \quad x_3 = \overline{OP_3}.$$

Auch bei einer beliebigen Strecke  $AB$ , die nicht von  $O$  ausgeht, gibt es eine solche Zerlegung in Komponenten. Um z. B. die erste Komponente von  $AB$  zu gewinnen, muß man durch  $A$  und  $B$  Parallelebenen zur Koordinatenebene  $OE_1E_3$  legen. Diese schneiden die Gerade  $OE_1$  in zwei Punkten  $A_1, B_1$  und  $A_1B_1$  ist die erste Komponente von  $AB$ . Ebenso erhält man die beiden andern Komponenten  $A_2B_2$  und  $A_3B_3$ . Aus ihnen läßt sich durch Parallelverschiebungen ein Streckenzug bilden, der bei  $A$  anfängt und bei  $B$  endet, so daß man schreiben kann

$$AB = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

Wir lassen in diesen Betrachtungen allen Strecken Freiheit zu beliebigen Parallelverschiebungen. Strecken, die diese Freiheit genießen, werden auch als Vektoren bezeichnet. Setzt man  $A_1B_1 = z_1e_1, A_2B_2 = z_2e_2, A_3B_3 = z_3e_3$ , so heißen  $z_1, z_2, z_3$  die Koordinaten von  $AB$ .

Wir wollen noch die Frage erörtern, wie sich die Multiplikation einer Strecke mit einer Zahl und die Addition zweier Strecken auf die Koordinaten auswirkt.

Man überzeugt sich leicht an Hand der Fig. 6 von der Richtigkeit der für zwei Vektoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und eine Zahl  $k$  geltenden Rechnungsregel

$$k(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = k\mathfrak{A} + k\mathfrak{B}.$$

Ist  $\mathfrak{A} = PQ, \mathfrak{B} = QR$ , so muß man den Fall eines positiven und den eines negativen  $k$  gesondert betrachten. Im Fall eines positiven  $k$  sei  $PQ_1 = kPQ$  und  $PR_1 = kPR$ . Die Strecken  $PQ_1$  und  $PR_1$  haben die  $k$ -fache Länge von  $PQ$  und  $PR$ . Dann hat auch  $Q_1R_1$  die  $k$ -fache Länge von  $QR$  und ist zu  $QR$  parallel, so daß man schreiben kann  $Q_1R_1 = kQR$ . Nun ist  $PR_1 = PQ_1 + Q_1R_1$ , also  $kPR = kPQ + kQR$  oder  $k(PQ + QR) = kPQ + kQR$ . Bei negativem  $k$  treten an die Stelle der Punkte  $Q_1, R_1$  die Punkte  $Q_2, R_2$ .

Eine zweite Regel, auf die wir uns stützen werden, bezieht sich auf die zweimalige Multipli-

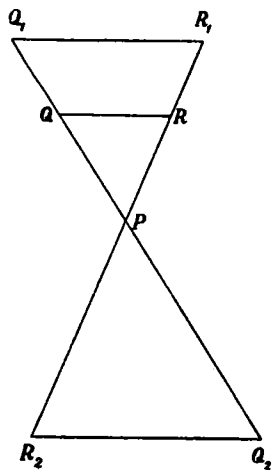


Fig. 6.

kation eines Vektors mit einer Zahl. Wird der Vektor  $\mathfrak{A}$  zuerst mit  $k_1$  und dann mit  $k_2$  multipliziert, so kommt dasselbe heraus, wie bei einmaliger Multiplikation mit  $k_1 k_2$ . Um den Beweis zu führen, braucht man nur an die Bedeutung dieser Art von Multiplikation zu denken. Jedesmal multipliziert sich die Länge des Vektors mit dem absoluten Betrage des Zahlenfaktors. Ist der Faktor negativ, so kehrt der Vektor überdies seine Richtung um. Eine zweimalige Umkehrung der Richtung stellt die alte Richtung wieder her.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir die erste der gestellten Fragen bereits beantworten. Ist

$$AB = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3,$$

so wird es bei Multiplikation mit  $k$  erlaubt sein, diesen Faktor bei den einzelnen Summanden anzubringen, wo man ihn dann mit dem schon vorhandenen Faktor zusammenfassen kann. Es ergibt sich also

$$kAB = (kz_1)e_1 + (kz_2)e_2 + (kz_3)e_3,$$

d. h. die Koordinaten des Vektors  $kAB$  entstehen aus denen des Vektors  $AB$  durch Hinzufügen des Faktors  $k$ . Wird ein Vektor mit einer Zahl multipliziert, so multiplizieren sich seine Koordinaten mit dieser Zahl.

Zur Erledigung der zweiten Frage brauchen wir noch eine dritte Rechnungsregel. Sie findet ihren Ausdruck in der Gleichung

$$k_1 \mathfrak{A} + k_2 \mathfrak{A} = (k_1 + k_2) \mathfrak{A}.$$

Es sei auf der Geraden, die den Vektor  $\mathfrak{A}$  trägt,  $PQ = k_1 \mathfrak{A}$ ,  $QR = k_2 \mathfrak{A}$ . Dann ist  $PR = k_1 \mathfrak{A} + k_2 \mathfrak{A}$ . Benutzt man  $\mathfrak{A}$  als Einheitsstrecke, so ist  $k_1 = \overline{PQ}$ ,  $k_2 = \overline{QR}$ . Aus der Dreipunkteformel  $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 0$  entnimmt man  $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$ , d. h.  $\overline{PR} = k_1 + k_2$ , so daß  $PR = (k_1 + k_2) \mathfrak{A}$  gesetzt werden kann.

Liegen nun zwei Vektoren  $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  und  $y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$  vor, so lautet ihre Summe

$$x_1 e_1 + y_1 e_1 + x_2 e_2 + y_2 e_2 + x_3 e_3 + y_3 e_3$$

oder nach der soeben bewiesenen Rechnungsregel

$$(x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3.$$

In Worten: Wenn man zwei Vektoren addiert, so addieren sich die gleichnamigen Koordinaten.

Wir haben bei der letzten Überlegung außer der früher schon erörterten Vertauschbarkeit der Summanden noch eine zweite Eigenschaft der Vektorenaddition benutzt, wonach man Gruppen von Summanden durch ihre Summen ersetzen darf. Diese Eigenschaft wird sofort evident, wenn man einen Vektorenzug betrachtet. Es ist z. B.

$$P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 = P_1 P_4.$$

Ersetzt man hier  $P_1 P_2 + P_2 P_3$  durch  $P_1 P_3$ , so ergibt sich die richtige Gleichung  $P_1 P_3 + P_3 P_4 = P_1 P_4$ .

Die Koordinaten eines Punktes  $P$  sind zugleich die Koordinaten des Vektors  $OP$ , der vom Anfangspunkt  $O$  nach jenem Punkte hinführt und als Ortsvektor von  $P$  bezeichnet wird. Sind nun zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben, deren Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $y_1, y_2, y_3$  lauten, so müssen sich die Koordinaten  $z_1, z_2, z_3$  der Strecke  $PQ$  durch jene  $x, y$  ausdrücken lassen. Wie lauten diese Ausdrücke? Bedenkt man, daß  $OQ = OP + PQ$  ist und die Koordinaten von  $OP + PQ$ , die gleich denen von  $OQ$  sein müssen,  $x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3$  lauten, so ergibt sich  $x_1 + z_1 = y_1, x_2 + z_2 = y_2, x_3 + z_3 = y_3$ , also

$$z_1 = y_1 - x_1, \quad z_2 = y_2 - x_2, \quad z_3 = y_3 - x_3.$$

Man findet also die Koordinaten einer Strecke  $PQ$  dadurch, daß man von den Koordinaten des Endpunktes  $Q$  die des Anfangspunktes  $P$  subtrahiert. Die Koordinaten einer Strecke sind mit andern Worten die Koordinatenänderungen, die ein Punkt erfährt, wenn er vom Anfang zum Ende der Strecke übergeht.

### § 3. Das Volumprodukt dreier Vektoren.

Wir betrachten drei Vektoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ , die wir uns nach demselben Ursprung  $O$  verschoben denken, so daß

$$\mathfrak{A} = OA, \quad \mathfrak{B} = OB, \quad \mathfrak{C} = OC$$

ist. Als Volumprodukt der Vektoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  bezeichnen wir den Inhalt des durch  $OA, OB, OC$  bestimmten Blocks, genommen mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem die drei Strecken ein Rechtstripel oder ein Linkstripel bilden. Ein Rechtstripel liegt vor, wenn  $OA, OB, OC$  so zueinander liegen, wie das rechte Bein, das linke Bein und der Oberkörper eines breitbeinig sitzenden Menschen. Denkt man sich  $OC$  als eine Person, deren Füße in  $O$  und deren Kopf in  $C$  liegt, so sieht diese Person, wenn sie auf die Ebene  $OAB$  blickt, im Falle eines Rechtstripels die Strecke  $OA$  zur Rechten, die Strecke  $OB$  zur Linken. Im Falle eines Linkstripels wird der personifizierte Vektor  $OC$  feststellen, daß  $OA$  zur Linken und  $OB$  zur Rechten liegt. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand bilden ein Rechtstripel. Bei der linken Hand stellen sie ein Linkstripel dar.

Wenn man in einem Rechtstripel zwei Strecken vertauscht, so entsteht ein Linkstripel und umgekehrt. Man überzeuge sich, daß aus dem Rechtstripel „Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand“ ein Linkstripel wird, wenn man die Reihenfolge durch Vertauschung zweier Glieder des Tripels abändert, d. h. man stelle fest, daß an der rechten Hand folgende Tripel Linkstripel sind:

Zeigefinger, Daumen, Mittelfinger,  
Mittelfinger, Zeigefinger, Daumen,  
Daumen, Mittelfinger, Zeigefinger.

Es kommt darauf an, zu bestätigen, daß jedesmal der dritte Finger des Tripels als Person gedacht, den ersten zur Linken, den zweiten zur Rechten

liegen sieht. Der Leser wolle die kleine Mühe nicht scheuen, diese Feststellungen wirklich durchzuführen.

Wechselt man in den beiden ersten Linkstripeln die beiden letzten Glieder aus, so entstehen die Anordnungen

Zeigefinger, Mittelfinger, Daumen,  
Mittelfinger, Daumen, Zeigefinger,

die ebenso wie die Anordnung

Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger

Rechtstripel darstellen. Hiermit sind alle sechs Anordnungen, die es bei drei Dingen gibt, erschöpft. Mit den drei ersten Fingern der rechten Hand lassen sich also drei Rechtstripel und drei Linkstripel bilden. Vertauscht man zwei Glieder, so geht jedes Rechtstripel in ein Linkstripel über und umgekehrt. Führt man mehrere dieser Zweiervertauschungen durch, so bleibt jedes Rechtstripel ein Rechtstripel und jedes Linkstripel ein Linkstripel, wenn es sich um eine gerade Anzahl solcher Zweiervertauschungen handelt. Ist die Anzahl ungerade, so geht jedes Rechtstripel in ein Linkstripel über und umgekehrt. Man kann jede Vertauschung oder Permutation durch wiederholte Zweiervertauschungen herstellen. Ist die Anzahl dieser Zweiervertauschungen gerade, so spricht man von einer geraden Permutation, ist sie ungerade, von einer ungeraden Permutation.

Bezeichnet man das oben erklärte Volumprodukt der drei Vektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  mit  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ , so wird

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

sein, weil  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  gerade Permutationen von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  sind. Ebenso wird die Doppelgleichung

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$$

gelten, dagegen

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}] = - [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

sein, weil die Tripel  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  verschiedenen Charakter haben.

Man sieht, daß das Volumprodukt  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$  bei allen möglichen Vertauschungen der drei Vektoren nur zwei Werte annimmt. Der eine ist das positive, der andere das negative Volumen des von den Vektoren gebildeten Blocks. Jeder Wert wird dreimal angenommen.

Wenn man in dem Volumprodukt  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$  einen der drei Vektoren mit einem Zahlenfaktor  $k$  versieht, so multipliziert sich das Volumprodukt mit diesem Faktor. Da  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ ,  $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$ ,  $[\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$  denselben Wert haben, genügt es, die behauptete Eigenschaft bei dem dritten Vektor zu bestätigen, also festzustellen, daß

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, k\mathfrak{C}] = k[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

ist. Bei positivem  $k$  hat das Tripel  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $k\mathfrak{C}$  denselben Charakter wie  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ . Beide Seiten der behaupteten Gleichung haben also dasselbe Zeichen. Außerdem ist klar, daß sich das Volumen des Blocks  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  mit  $k$  multipli-

ziert, wenn man der dritten Strecke  $OC$  die  $k$ -fache Länge gibt. Man kann nämlich das aus  $OA, OB$  gebildete Parallelogramm als die Basis des Blocks betrachten und das von  $C$  auf die Ebene  $OAB$  gefällte Lot  $CH$  als seine Höhe. Die Basis bleibt, wenn man von  $OC$  zu  $OC_1 = kOC$  übergeht, dieselbe, und die Höhe  $CH$  geht in  $C_1H_1 = kCH$  über.

Um auch den Fall eines negativen  $k$  zu erledigen, bemerke man zunächst, daß die Tripel  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  von verschiedenem Charakter sind aber inhaltgleiche Blöcke bilden, so daß die Gleichung

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

stattfindet. Da nun  $-k$  positiv ist, so hat man nach den bereits gefundenen Ergebnissen

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, k\mathfrak{C}] = -k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -\mathfrak{C}] = k[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Beim ersten Schritt wurde  $k$  als Produkt aus  $-k$  und  $-1$  oder  $k\mathfrak{C}$  als Produkt aus  $-k$  und  $-\mathfrak{C}$  betrachtet.

Eine weitere leicht feststellbare Eigenschaft der Volumprodukte ist folgende: Wenn in einem solchen Produkt einer der drei beteiligten Vektoren eine Summe ist, so zerlegt sich das Produkt dementsprechend in Summanden. Auch hier genügt es, mit dem dritten Vektor zu arbeiten und zu zeigen, daß

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2]$$

ist. Würden  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  oder  $OA$  und  $OB$  in eine Gerade fallen, so wären alle drei Volumprodukte gleich Null, die Gleichung also bewiesen. Nehmen wir an, daß dieser Fall nicht vorliegt, so können wir  $OA$  und  $OB$  zusammen mit einem dritten Vektor  $OC$  als Grundvektoren im Raume benutzen und  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$  in der Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 &= a_1\mathfrak{A} + b_1\mathfrak{B} + c_1\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{C}_2 &= a_2\mathfrak{A} + b_2\mathfrak{B} + c_2\mathfrak{C}\end{aligned}$$

schreiben, woraus nach den oben bewiesenen Rechnungsregeln

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = (a_1 + a_2)\mathfrak{A} + (b_1 + b_2)\mathfrak{B} + (c_1 + c_2)\mathfrak{C}$$

folgen würde. Nach Einsetzung dieser Ausdrücke haben wir es dann mit Volumprodukten von der Form

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}]$$

zu tun. Wir denken uns alle Vektoren nach dem Ursprung  $O$  verschoben, so daß  $\mathfrak{A} = OA, \mathfrak{B} = OB, x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C} = OP$  ist. Nun entsteht  $OP$  aus dem Vektor  $z\mathfrak{C} = OQ$  dadurch, daß man an den Endpunkt  $Q$  den Vektor  $x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}$  ansetzt, der parallel zur Ebene  $OAB$  ist. Betrachtet man wieder das aus  $OA, OB$  gebildete Parallelogramm als die Basis, so haben die mit  $OA, OB, OP$  und  $OA, OB, OQ$  gebildeten Blöcke gleiche Basis und gleiche Höhe. Da sich  $OP$  und  $OQ$  auf derselben Seite der Ebene  $OAB$  befinden, so werden die Tripel  $OA, OB, OP$  und  $OA, OB, OQ$  von gleichem Charakter sein. Es wird daher die Gleichung

$$[OA, OB, OP] = [OA, OB, OQ]$$

gelten oder

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, z\mathfrak{C}] = z[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Hiernach ist nun

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1] &= c_1[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2] &= c_2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \\ [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2] &= (c_1 + c_2)[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \end{aligned}$$

also das dritte Volumprodukt gleich der Summe der beiden ersten.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Aufgabe herantreten, ein Volumprodukt durch die Koordinaten der beteiligten Vektoren auszudrücken. Es handle sich um die drei Vektoren  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ , die wir auf die Grundvektoren  $e_1, e_2, e_3$  beziehen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + x_{13}e_3, \\ \mathfrak{B}_2 &= x_{21}e_1 + x_{22}e_2 + x_{23}e_3, \\ \mathfrak{B}_3 &= x_{31}e_1 + x_{32}e_2 + x_{33}e_3. \end{aligned}$$

Bei der Bezeichnung der Koordinaten haben wir nach dem Vorbilde von Leibniz (1646—1716) Doppelindizes benutzt. Der erste Index gibt die Nummer des Vektors, der zweite die Nummer der Koordinate. Wenn man nun die zuletzt bewiesene Eigenschaft in Betracht zieht, die sich unmittelbar auf mehrgliedrige Summen überträgt, so kann man schreiben

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = \sum [x_{1r}e_r, x_{2s}e_s, x_{3t}e_t].$$

Die rechte Seite ist eine 27-gliedrige Summe, da jeder der drei Indizes  $r, s, t$  die Werte 1, 2, 3 annimmt. Auf Grund der Faktoreigenschaft der Volumprodukte kann man  $x_{1r}, x_{2s}, x_{3t}$  vor die Klammer setzen und erhält auf diese Weise

$$\sum x_{1r}x_{2s}x_{3t} [e_r e_s e_t].$$

Sobald  $r, s, t$  nicht alle verschieden sind, verschwindet das Volumprodukt  $[e_r e_s e_t]$ . Man braucht also die Summation nur über die sechs Permutationen  $r, s, t$  von 1, 2, 3 zu erstrecken. Ist  $r, s, t$  eine gerade Permutation von 1, 2, 3, also eine der drei Anordnungen 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, so wird  $[e_r e_s e_t] = [e_1 e_2 e_3]$ , ist  $r, s, t$  eine ungerade Permutation, also eine der Anordnungen 1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1, so wird  $[e_r e_s e_t] = -[e_1 e_2 e_3]$  sein. Wir wollen hier ein Symbol einführen, das sich als sehr bequem erweist. Dieses Symbol lautet  $\text{sgn}(r, s, t)$ , gelesen signum  $r, s, t$ , und soll die positive oder negative Einheit bedeuten, je nachdem  $r, s, t$  eine gerade oder eine ungerade Permutation ist. Dann gilt in beiden Fällen die Gleichung

$$[e_r e_s e_t] = [e_1 e_2 e_3] \text{sgn}(r, s, t).$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, so lautet unser Ergebnis

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = [e_1 e_2 e_3] \sum \text{sgn}(r, s, t) x_{1r} x_{2s} x_{3t}.$$

Das Volumprodukt der Vektoren  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$  unterscheidet sich von dem festliegenden Volumprodukt der Grundvektoren um den Faktor

$$\sum \text{sgn}(r, s, t) x_{1r} x_{2s} x_{3t},$$