Sammlung und Auflösung

Mathematischer Aufgaben

von

K. H. Schellbach,
Professor der Mathematik am Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium
und an der Königl. Kriegs-Akademie zu Berlin.

Unter Mitwirkung des Dr. H. Lieber

bearbeitet und herausgegeben

von

E. Fischer, Dr. phil.

Mit acht Figurentafeln.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1863.

Vorwort.

Als früherer Schüler des hiesigen Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium und später als Mitglied des mit dieser Anstalt verbundenen Königlichen mathematischen Seminares, hatte ich Gelegenheit, die Unterrichtsmethode des Herrn Professor Schellbach genauer kennen zu lernen. Ich übernahm daher gern den Auftrag desselben, die wichtigsten mathematischen Probleme, wie sie von ihm in den letzten Jahren in den oberen Klassen des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium vorgetragen wurden oder theilweise erst beim Unterrichte entstanden, in Gemeinschaft mit dem Herrn Dr. Lieber zu bearbeiten und sie auch für weitere Kreise zugänglich zu machen. Der Herr Dr. Lieber indessen, welcher die erste Zusammenstellung der in den Heften des Herrn Professor Schellbach enthaltenen Aufgaben übernahm, trat in Folge eines Rufes an das Gymnasium zu Pyritz aus dem mathematischen Seminare und wurde auf diese Weise verhindert, die Arbeit mit mir zum Abschluß zu bringen.

Die nun von mir vollendete, vorliegende Sammlung möchte für den mathematischen Unterricht vielfach von Nutzen sein können, indem sie zahlreiche Probleme enthält, die sowohl das Interesse der Schüler erwecken und fesseln, als auch bei der Eigenthümlichkeit der Auflösungsmethode die mannigfaltigsten Anwendungen des Erlernten gestatten. Die schon früher von mir bearbeiteten Maximum- und Minimum-Aufgaben*) sind dabei in vieler Beziehung als Ergänzung der vorliegenden Sammlung zu betrachten.

Berlin, im December 1862.

E. Fischer, Dr. phil.

*) Mathematische Lehrstunden von K. H. Schellbach. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearbeitet von A. Bode und E. Fischer, Dr. phil. Berlin bei Georg Reimer, 1860.

Inhaltsverzeichniß.

Erste Abtheilung.

Die quadratischen Gleichungen.

Zweite Abtheilung.

Geometrische und physikalische Aufgaben.

Erste Abtheilung.

Die quadratischen Gleichungen.

---

§. 1. **Ueber die allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichungen.**

Die für den Unterricht zweckmäßigste Auflösung der Gleichungen zweiten Grades ist die, welche auf der Zerlegung des Trinoms:

$$x^2 + 2ax + b$$

in lineare Faktoren beruht. Man hat nämlich identisch:

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + b &= x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + b \\ &= (x + a)^2 - (a^2 - b) \\ &= (x + a + \sqrt{a^2 - b})(x + a - \sqrt{a^2 - b}). \end{aligned}$$

Diese Zerlegung führt nun nicht allein unmittelbar zur Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + 2ax + b = 0,$$

sondern sie liefert unter andern auch sofort den gemeinschaftlichen Faktor, welchen zwei Trinome etwa haben können. Das Aufsuchen dieser gemeinschaftlichen Faktoren ist für den Schüler eine sehr nützliche Uebung und ein Mittel, das oft bei Umformung algebraischer Ausdrücke angewandt werden kann. Hat man z. B. den Bruch:

$$B = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 10x + 24},$$

so ergiebt sich durch Zerlegung des Zählers und Nenners in Faktoren ersten Grades:

$$B = \frac{(x - 6)(x - 2)}{(x - 6)(x - 4)} = \frac{x - 2}{x - 4}.$$

Ebenso findet man:

$$\frac{x^2+7x+6}{x^2+8x+7}=\frac{x+6}{x+7}$$

und:

$$\frac{x^2+2x-15}{x^2-3x-40}=\frac{x-3}{x-8}.$$

Hat man ferner die Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten:

$$(1) \quad x^2+2ax+b=0$$

aufzulösen, so erhält man durch dieselbe Zerlegung der linken Seite aus der gegebenen Gleichung die folgende:

$$(x+a-\sqrt{a^2-b})(x+a+\sqrt{a^2-b})=0.$$

Ein Produkt verschwindet aber, wenn irgend einer seiner Faktoren verschwindet. Um also alle Werthe von x zu erhalten, welche die Gleichung befriedigen, muß man sämmtliche Faktoren einzeln $=0$ setzen. Damit ist aber die Auflösung der einen quadratischen Gleichung auf die zweier Gleichungen ersten Grades zurückgeführt. Man erhält schließlich aus denselben die bekannten Wurzeln:

$$x=-a\pm\sqrt{a^2-b}.$$

Aus diesem Resultate lassen sich nun unmittelbar die Folgerungen ziehen:

1) Eine jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, welche entweder beide reell oder beide imaginär sind.
2) Hat man eine quadratische Gleichung in die Normalform (1) gebracht, so ist die Summe ihrer Wurzeln:

$$x_1+x_2=-2a,$$

und das Produkt derselben:

$$x_1\cdot x_2=b.$$

Die letztere Eigenschaft der Wurzeln einer quadratischen Gleichung kann man benutzen, um einige einfachere Gleichungssysteme mit den beiden Unbekannten x und y aufzulösen. Es sei gegeben:

$$x+y=a$$

und:

$$xy=b.$$

Die beiden Größen x und y müssen dann nach dem Vorigen die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$z^2-az+b=0$$

sein, weil dieselben in der That die Eigenschaft besitzen, daß ihre

Summe $= a$ und ihr Produkt $= b$ ist, und sie somit die gegebenen Gleichungen erfüllen, durch welche x und y allein bestimmt waren. Es ist also:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$y = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

wobei aber in jedem zusammengehörigen Werthpaare von x und y der Quadratwurzel entgegengesetzte Vorzeichen zu geben sind.

Die Gleichungen:

$$x - y = a$$

$$xy = b$$

lassen sich ganz ähnlich auflösen, wenn man $-y$ als die eine unbekannte Größe betrachtet.

Man kann die Gleichung (1) auch dadurch auflösen, daß man ihre Wurzeln in der Form von unendlichen Kettenbrüchen darstellt. Allerdings kann hier die Convergenz oder Divergenz des Kettenbruches nicht untersucht werden. In vielen Fällen ist diese Entwicklung auch für die numerische Berechnung nicht ohne Vortheil, indem die unendliche Ausdehnung des Kettenbruches keine größere Schwierigkeiten darbietet, als die ebenfalls unendliche Operation der Berechnung einer irrationalen Quadratwurzel. Man kann sich also in der That der Kettenbruchentwicklung zuweilen bedienen, um schnell die Wurzeln einer quadratischen Gleichung bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit aufzufinden.

Hat man die Gleichung aufzulösen:

$$x^2 - ax - b = 0,$$

so ergiebt sich durch Division mit x:

$$x - a - \frac{b}{x} = 0,$$

oder:

$$x = a + \frac{b}{x},$$

$$= a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}},$$

$$= a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \text{in inf.}}}}$$

Die andere Wurzel ergiebt sich, wenn man die aufzulösende Gleichung auf die Form bringt:

$$x(x - a) - b = 0,$$

oder, wenn man durch $x - a$ dividirt:

$$- x = \frac{b}{a - x},$$

$$= \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \text{in inf.}}}}$$

Hat man z. B. die Gleichung:

$$x^2 - 20x - 2 = 0,$$

so ergiebt sich:

$$x = 20 + \cfrac{2}{20 + \cfrac{2}{20 + 2}},$$

$$= 20 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{20 + \text{in inf.}}}}}$$

Die Näherungsbrüche sind:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{20}{201}, \quad \frac{201}{2020} \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man:

$$x = 20 + \frac{201}{2020},$$

so giebt dieser Werth die Wurzel schon bis auf 7 Decimalstellen genau.

Man überzeugt sich auch durch Vergleichung der gefundenen Werthe leicht, daß dieselben alle Eigenschaften der Wurzeln der quadratischen Gleichung besitzen.

Sind aber in der Gleichung (1) die Coefficienten a und b mehrziffrige Zahlen, wie z. B. irrationale Größen mit vielen Decimalstellen, so ist die algebraische Form der Wurzeln, die wir bisher allein betrachtet haben, nicht für die numerische Berechnung bequem, selbst wenn man sich der Logarithmentafeln bedienen wollte. In diesem Falle ist es vortheilhaft, trigonometrische Funktionen, welche in gewisser Weise von den Coefficienten a und b abhängig sind, als Hülfsgrößen einzuführen.

Hat man nämlich die Gleichung zweiten Grades:

$$(1) \quad x^2 + 2ax + b = 0$$

aufzulösen, so führe man für die Unbekannte x einen unbekannten Winkel φ ein, welcher durch die Gleichung bestimmt ist:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{b} = x.$$

Durch Substitution von φ in (1) ergiebt sich:

$$b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2a\sqrt{b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi + b = 0,$$

oder:

$$-\frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2},$$

$$= \sin \varphi.$$

Ist nun $\sqrt{b} < a$, so ergeben sich aus dieser Gleichung zwei reelle Werthe von φ, welche zwischen 0 und 360° liegen, und welche sich zu zwei Rechten ergänzen, so daß die beiden Wurzeln unter der Form:

$$x_1 = \sqrt{b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$x_2 = \sqrt{b} \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

erscheinen. Ist hingegen $\sqrt{b} > a$, so sind beide Wurzeln imaginär.

Die Vortheile, welche die soeben durchgeführte Substitution für die logarithmische Berechnung bietet, liegen auf der Hand, indem die Resultate überall in der Form von Produkten erscheinen.

Die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades läßt sich noch auf die von Gleichungen niederen Grades zurückführen. Es ist aber sehr beschwerlich, Polynome, wie sie in diesen

Gleichungen auftreten, so umzuformen, daß sie, wie die Trinome der quadratischen Gleichungen, unmittelbar in Faktoren ersten Grades zerfallen.

Die Gleichungen fünften und höheren Grades sind sogar überhaupt nicht mehr algebraisch auflösbar, und es ist im Allgemeinen nicht möglich, ein Polynom höheren Grades in ein Produkt von Faktoren niederen Grades zu verwandeln. Es giebt indessen höhere Gleichungen besonderer Art, deren Auflösung durch verschiedene Kunstgriffe auf die Auflösung von Gleichungen zweiten Grades zurückgeführt werden kann, und von denen in den folgenden Paragraphen verschiedene Gruppen behandelt werden sollen.

Bei den Umformungen, welche dabei erforderlich sind, werden bisweilen fremde Faktoren in die Gleichung eingeführt, deren Wurzeln sich dann mit den eigentlich gesuchten vermischen und Werthe ergeben, welche der gegebenen Gleichung nicht genügen. Ein einfaches Beispiel wird dies klar machen. Um z. B. die Gleichung aufzulösen:

$$x - 7 - \sqrt{1 + 2x} = 0,$$

macht man dieselbe rational, indem man sie mit dem Faktor:

$$x - 7 + \sqrt{1 + 2x}$$

multiplicirt. Man erhält dadurch die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 16x + 48 = 0,$$

welche die Wurzeln liefert:

$$x_1 = 12$$

und:

$$x_2 = 4.$$

Der gegebenen Gleichung genügt aber nur die Wurzel $x_1 = 12$, während die andere $x_2 = 4$ durch den Faktor $x - 7 + \sqrt{1 + 2x}$ eingedrungen ist, also keine Bedeutung für die gegebene Gleichung hat, wenn der besondern Natur der Aufgabe nach $\sqrt{1 + 2x}$ als positive Größe betrachtet werden muß. Hätte man nach der gewöhnlichen Methode die Wurzelgröße auf die andere Seite gebracht und dann quadrirt, so wäre offenbar das Resultat ganz dasselbe geblieben. Es ist dies ein für die Auflösung der Gleichungen wesentlicher Punkt, auf den wir in den vorkommenden Fällen aufmerksam machen werden.

§. 2. Gleichungen höherer Grade mit einer Unbekannten, die sich durch Substitution auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.

Zu den einfachsten Gleichungen höherer Grade, deren Wurzeln durch eine einfache Substitution mit Hülfe einer quadratischen Gleichung zu finden sind, gehören die, welche die Gestalt haben:

$$x^{2n} + 2ax^n + b = 0,$$

wo n irgend eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Betrachtet man nämlich nicht x selbst, sondern $x^n = z$ als die zu bestimmende Größe, so hat man für z die Gleichung:

$$z^2 + 2az + b = 0,$$

also:

$$z = x^n = -a \pm \sqrt{a^2 - b},$$

mithin:

$$x = \sqrt[n]{-a \pm \sqrt{a^2 - b}}.$$

Es sind damit die 2n Wurzeln der gegebenen Gleichung gefunden, da, wie aus der Theorie der Wurzeln bekannt ist, jede nte Wurzel auch n verschiedene Werthe hat.

Nach dieser Methode lassen sich die folgenden Gleichungen lösen:

1) $x^4 + 1225 = 74x^2,$
$x = \pm 7$ oder $= \pm 5.$

2) $3x^6 + 42x^3 = 3321,$
$x_1 = \sqrt[3]{27}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{41}.$

3) $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 8 = 0,$
$x_1 = 16, \quad x_2 = 256.$

Allerdings gilt hier der zweite Werth nur, wenn $\sqrt[4]{x}$ als negativ betrachtet wird. Vergleiche darüber den Schluß von §. 1.

4) $x^3 - \sqrt{x^3} = 56,$
$x_1 = 4, \quad x_2 = -\sqrt[3]{49}.$

5) $3x^{4/3} - \frac{5}{2}x^{8/3} = -592,$
$x_1 = 8, \quad x_2 = \sqrt[4]{-\left(\frac{74}{5}\right)^3}.$

$$6)\quad \sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{x^3} = 756,$$

$$x_1 = 243, \quad x_2 = -\sqrt[3]{28^5}.$$

Auch in den folgenden Gleichungen sucht man anfänglich nicht die unbekannte Größe selbst, sondern zunächst eine einfache Funktion derselben, die in der aufzulösenden Gleichung enthalten ist.

$$7)\quad 7 + x + 2\sqrt{7+x} = 15.$$

Substituirt man $\sqrt{7+x} = z$, so erhält man:

$$z = 5 \text{ oder } = -3,$$

also:

$$x_1 = 18, \quad x_2 = 2.$$

Auch hier befriedigt nur die zweite Wurzel die gegebene Gleichung, wie in den beiden folgenden.

$$8)\quad x + 5 = \sqrt{x+5} + 6,$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

$$9)\quad \sqrt{x+12} + \sqrt[4]{x+12} = 6,$$
$$x_1 = 69, \quad x_2 = 4.$$

$$10)\quad x + 16 - 7\sqrt{x+16} + 10 = 0,$$
$$x_1 = 9, \quad x_2 = -12.$$

$$11)\quad x^2 - 2x + 6\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 11.$$
$$x = 1, \quad x = 1 \pm 2\sqrt{15}.$$

$$12)\quad \sqrt{x^2 + x + 6} = \frac{60 - 4\sqrt{x^2 + x + 6}}{\sqrt{x^2 + x + 6}},$$

$$x = 5, \quad x = -6, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}.$$

$$13)\quad \{(x-2)^2 - x\}^2 - (x-2)^2 = 88 - (x-2).$$

Man substituire $(x-2)^2 - x = z$. Alsdann ergiebt sich:

$$z^2 - z = 90$$

und:

$$x = 6, \quad x = -1, \quad x = \frac{5 \pm 3\sqrt{-3}}{2}.$$

$$14)\quad \sqrt[3]{a - x} - \sqrt[3]{b - x} = c.$$

Nachdem man $\sqrt[3]{b - x}$ auf die andere Seite geschafft, erhebt man die Gleichung in die dritte Potenz. Es ergiebt sich auf diese Weise eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $\sqrt[3]{b-x}$, welche das Resultat liefert:

$$x = \frac{1}{2}\left\{a + b \mp \frac{a-b+2c^3}{3c}\sqrt{\frac{4a-4b-c^3}{3c}}\right\}.$$

$$15)\quad \sqrt{1+ax} + \sqrt{1+\frac{b}{x}} = c.$$

Substituirt man, nachdem die Gleichung quadrirt ist:

$$\sqrt{(1+ax)\left(1+\frac{b}{x}\right)} = y,$$

so erhält man leicht:

$$x = \frac{1}{2a}\left\{c^2 \mp 2\sqrt{c^2+ab} \pm c\sqrt{c^2+4\mp 4\sqrt{c^2+ab}}\right\}.$$

$$16)\quad \frac{1}{\sqrt{a+x}} + \frac{1}{\sqrt{b-x}} = c.$$

Nachdem man die Nenner fortgeschafft und quadrirt hat, setze man:

$$\sqrt{(a+x)(b-x)} = y.$$

Man findet dann:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+c^2(a+b)}}{c^2},$$

so daß sich für x eine einfache quadratische Gleichung ergiebt. Analog löst man die folgende Gleichung auf:

$$17)\quad \frac{1}{\sqrt{a+x}} - \frac{1}{\sqrt{b-x}} = c.$$

$$18)\quad \frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{bx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}}.$$

Setzt man $x = \frac{a}{y}$, so ergiebt sich nach Fortschaffung der Nenner:

$$b\sqrt{1+y} + y\sqrt{1-y} = y - b.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$2b\sqrt{1-y^2} = y^2 - b^2 - 2b.$$

Wenn man endlich noch einmal quadrirt, so ergiebt sich unmittelbar eine quadratische Gleichung für y^2. Man erhält daraus folgende vier Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = \frac{\pm a}{\sqrt{b(2-b) \pm 2b\sqrt{1-2b}}}.$$

19) $x(x+a)(x+2a)(x+3a) = b.$

Multiplicirt man die beiden mittleren und äußeren Faktoren mit einander, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$(x^2 + 3ax)(x^2 + 3ax + 2a^2) = b,$$

oder, wenn man $x^2 + 3ax = y$ substituirt:

$$y^2 + 2a^2y - b = 0.$$

Damit ist y und somit auch x leicht zu finden. Es folgen die vier Werthe:

$$x = -\frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2 \pm \sqrt{a^4 + b}}.$$

Wir fügen zu den bisher gegebenen Gleichungen eine Gruppe anderer hinzu, welche die charakteristische Form haben, daß sie aus Summen von Brüchen bestehen, die, paarweise addirt, gemeinschaftliche Faktoren absondern lassen. Indem man also die Faktoren einzeln $= 0$ setzt, zerspaltet man unmittelbar die gegebenen höheren Gleichungen in eine Gruppe niederer, deren Wurzeln sämmtlich Wurzeln der ersteren sind.

20) (a) $$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} - \frac{1}{6+x} + \frac{1}{7+x} = 0.$$

Summirt man je zwei von den Enden gleich weit entfernte Brüche, so ergiebt sich:

$$\frac{7+2x}{7x+x^2} - \frac{7+2x}{6+7x+x^2} + \frac{7+2x}{10+7x+x^2} - \frac{7+2x}{12+7x+x^2} = 0.$$

Setzt man also erstens den gemeinschaftlichen Faktor:

$$7 + 2x = 0,$$

so ergiebt sich eine Wurzel:

$$x = -\frac{7}{2}.$$

Substituirt man außerdem $x^2 + 7x = y$, so ergeben sich die andern Wurzeln aus dem zweiten Faktor:

$$(b)\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y+10}-\frac{1}{y+12}=0.$$

Man erhält nämlich nach Fortschaffung der Nenner:

$$y^2+18y+90=0.$$

Daraus folgen denn für x die vier imaginären Werthe:

$$x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{13}{4}\pm 3i}.$$

Es sind also fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung gefunden und in der That erhält man nach Fortschaffung der Nenner aus der Gleichung (a) nur ein Polynom fünften Grades. Indessen ergiebt sich in unserem Falle aus (a) und auch (b) noch unmittelbar die Wurzel $x=\infty$, die in gewissen Fällen für die gegebene Aufgabe eine Bedeutung haben kann.

21) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0.$$

Man erhält durch paarweises Zusammenfassen je zweier gleichweit von den Enden entfernter Brüche:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=0.$$

Setzt man also zunächst wieder den Faktor $2x-5=0$, so ergiebt sich die erste Wurzel:

$$x=\frac{5}{2}.$$

Substituirt man darauf $x^2-5x=y$, so findet man zweitens:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y+4}+\frac{1}{y+6}=0.$$

oder:

$$y=\frac{-10\pm2\sqrt{7}}{3}.$$

Es sind also die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x=\infty,\quad x=\frac{5}{2},\quad x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{35\pm8\sqrt{7}}{12}}.$$

22) $$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}+\frac{c}{x-3}+\frac{b}{x-4}+\frac{a}{x-5}=0.$$

Nach der Addition von je zwei gleichweit von den Enden entfernten

Brüchen folgt eine Gleichung, aus der sich der Faktor $2x-5$ absondern läßt. Setzt man ferner $x^2-5x=y$, so ergiebt sich für y die quadratische Gleichung:

$$y^2(a+b+c)+2y(5a+3b+2c)+24a=0.$$

Es ergeben sich schließlich für x die sechs Wurzeln:

$$x=\infty, \quad x=\frac{5}{2},$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{5a+13b+17c\pm\sqrt{(a-3b-2c)^2+12ab}}{4(a+b+c)}}.$$

$$23) \quad \frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+a+b-c}=0.$$

Es ergiebt sich der gemeinschaftliche Faktor: $2x+a+b$. Setzt man ferner $x^2+(a+b)x=y$, so hat man zweitens:

$$\frac{1}{y+ab}+\frac{1}{y+c(a+b-c)}=0.$$

Man findet aso für x die vier Wurzeln:

$$x=\infty, \quad x=-\frac{a+b}{2},$$

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\{(a+b-2c)^2+(a-b)^2\}}.$$

$$24) \quad \frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+d}$$
$$+\frac{1}{x+a+b-c}+\frac{1}{x+a+b-d}=0.$$

Nach zweckmäßiger Vereinigung je zweier Glieder tritt der Faktor $2x+a+b$ heraus, und man erhält zur Bestimmung von $x^2+x(a+b)=y$ die Gleichung:

$$\frac{1}{y+ab}+\frac{1}{y+c(a+b-c)}+\frac{1}{y+d(a+b-d)}=0.$$

Man findet also, wenn man zur Abkürzung:

$$ab+ac+bc-c^2=m$$

und:

$$ad+bd-d^2=n$$

setzt,

$$y=-\tfrac{1}{3}(m+n)\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{m^2+n^2-mn-3ab(m-ab)}.$$

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also:

$$x = \infty; \quad x = -\frac{a+b}{2}; \quad x = \tfrac{1}{2}\{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4y}\}.$$

$$25) \quad \frac{\alpha}{x+a} + \frac{\alpha}{x+b} + \frac{\beta}{x+c} + \frac{\gamma}{x+d}$$
$$+ \frac{\beta}{x+a+b-c} + \frac{\gamma}{x+a+b-d} = 0.$$

Vereinigt man die Glieder mit gleichem Zähler, so ergiebt sich der gemeinschaftliche Faktor $2x + a + b$ und zur Bestimmung von $y = x^2 + x(a+b)$ die Gleichung:

$$\frac{\alpha}{y+ab} + \frac{\beta}{y+c(a+b-c)} + \frac{\gamma}{y+d(a+b-d)} = 0,$$

also, wenn man dieselben Abkürzungen wie unter Nr. 24 einführt und

$$\frac{m(\alpha+\gamma) + n(\alpha+\beta) - ab(\alpha-\beta)}{2(\alpha+\beta+\gamma)} = P$$

setzt:

$$y = -P \pm \sqrt{P^2 - \frac{mn\alpha + m\gamma ab - nab(\alpha-\beta) - \gamma\alpha^2 b^2}{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind endlich:

$$x = \infty; \quad x = -\frac{a+b}{2}; \quad x = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4y}}{2}.$$

$$26) \quad \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{a+x} + \frac{\gamma}{2a+x} - \frac{\delta}{3a+x} - \frac{\delta}{4a+x}$$
$$+ \frac{\gamma}{5a+x} - \frac{\beta}{6a+x} + \frac{\alpha}{7a+x} = 0.$$

Faßt man wiederum die Glieder, welche denselben Zähler haben, paarweis zusammen, so läßt sich $7a + 2x$ als gemeinschaftlicher Faktor absondern, und man erhält die Wurzel: $x = -\frac{7a}{2}$. Setzt man außerdem $x^2 + 7ax = y$, so liefert der andere Faktor die folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha}{y} - \frac{\beta}{y+6a^2} + \frac{\gamma}{y+10x^2} - \frac{\delta}{y+12a^2} = 0.$$

Dieselbe reducirt sich nun im Allgemeinen auf den dritten Grad und wird nur quadratisch, wenn $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ ist. In diesem Falle nämlich wird der Coefficient von $y^3 = 0$, so daß man eine Wurzel $y = \infty$ erhält, während die andern sich aus der übrig bleibenden quadratischen Gleichung ergeben.

§. 3. Reciproke Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Sind die reciproken Wurzelwerthe einer Gleichung ebenfalls Wurzeln der Gleichung, so heißt dieselbe reciprok. Die reciproken Gleichungen sind dadurch erkennbar, daß die Coefficienten der gleichweit von der Mitte abstehenden Glieder dieselben sind. Bei Gleichungen ungeraden Grades können allerdings diese Coefficienten auch entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Es lassen sich nun alle reciproken Gleichungen nten Grades durch eine einfache Substitution auf Gleichungen niederen Grades zurückführen und zwar auf den $\frac{n}{2}$ten, wenn n gerade und auf den $\frac{n-1}{2}$ten, wenn n ungerade ist. Dividirt man nämlich, wenn n gerade ist, die gegebene Gleichung mit $x^{\frac{n}{2}}$, so folgt aus der charakteristischen Form der reciproken Gleichungen, daß alle Gliederpaare mit den Potenzen x^ν und $\frac{1}{x^\nu}$ denselben Coefficienten haben. Substituirt man aber $x + \frac{1}{x} = y$, so kann man $x^\nu + \frac{1}{x^\nu}$ als ein Polynom νten Grades von y darstellen, so daß man also eine Gleichung erhält, welche in Beziehung auf y vom $\frac{n}{2}$ten Grade ist. In der That folgt, wenn man die Definitionsgleichung:

$$(1)\quad x + \frac{1}{x} = y$$

quadrirt und das Product wieder mit derselben Gleichung multiplicirt und so fortschreitet:

$$\text{a)}\quad\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2, \\ x^3 + \dfrac{1}{x^3} = y^3 - 3y, \\ x^4 + \dfrac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2, \\ x^5 + \dfrac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Etwas ganz Aehnliches gilt von reciproken Gleichungen, deren Grad ein ungrader ist.

Hat man aber y gefunden, so setzt man den erhaltenen Werth in die Gleichung (1) ein und erhält auf diese Weise eine einfache quadratische Gleichung für die gesuchte Größe x.

$$1)\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Durch Division mit x^2 ergiebt sich:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man ferner $x + \dfrac{1}{x} = y$, so findet man nach den Gleichungen (a):

$$y^2 - 2 + ay + b = 0,$$

oder, wenn man $\sqrt{a^2 - 4b + 8} = R$ substituirt:

$$y = x + \frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\{-a \pm R\}.$$

Folglich die vier Wurzeln:

$$x = \tfrac{1}{4}(-a \pm R) \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2 - 4b - 8 \mp 2aR},$$

$$2)\quad x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0.$$

Durch Division mit $x^{\frac{3}{2}}$ erhält man:

$$x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + a\left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Setzt man $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = y$, so erhält man nach den Gleichungen (a):

$$y\{y^2 - 3 + a\} = 0,$$

oder:

$$y = 0, \quad y = \pm\sqrt{3 - a}.$$

Mithin ergeben sich, wenn man quadrirt, für x die beiden Gleichungen:

$$x + \frac{1}{x} + 2 = 0,$$

oder:

$$x = -1$$

und:

$$x + \frac{1}{x} + a - 1 = 0,$$

oder:

$$x = \tfrac{1}{2}\{1 - a \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}\}.$$

Will man die Rechnung mit den gebrochenen Potenzen vermeiden, so substituire man in der gegebenen Gleichung:

$$x = u^2.$$

Alsdann erhält man durch Division mit u^3:

$$u^3 + au + \frac{a}{u} + \frac{1}{u^3} = 0,$$

oder wenn man $u + \frac{1}{u} = y$ setzt:

$$y^3 + (a-3)y = 0,$$

dieselbe Gleichung, wie die oben gefundene.

3) $x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

Setzt man auch hier $x = u^2$ und dividirt alsdann mit u^5, so ergiebt sich:

$$u^5 + \frac{1}{u^5} + a\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) + b\left(u + \frac{1}{u}\right) = 0,$$

oder, wenn man $u + \frac{1}{u} = y$ substituirt:

$$y\{y^4 - 5y^2 + 5 + a(y^2 - 3) + b\} = 0.$$

Somit ist entweder:

$$y = 0,$$

oder:

$$y^2 = \tfrac{1}{2}\{5 - a \pm \sqrt{5 + 2a + a^2 - 4b}\}.$$

Es ist also $x = -1$, während sich die andern vier Wurzeln aus der Gleichung ergeben:

$$x + \frac{1}{x} = y^2 - 2.$$

Wir schließen an diese reciproken Gleichungen noch einige andere von einem ungeraden Grade an, deren gleich weit von beiden Enden entfernte Glieder gleich große aber entgegengesetzte Coefficienten haben. Dieselben ließen sich auch unmittelbar auf die vorhergehenden zurückführen, wenn man $x = -y$ substituirte.

4) $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0.$

Setzt man wieder $x = u^2$ und dividirt alsdann mit u^3, so folgt:

$$u^3 - \frac{1}{u^3} + a\left(u - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Man setze:

$$u - \frac{1}{u} = y,$$

dann wird, wenn man diese Gleichung mit sich selbst und das Product wieder mit derselben Gleichung multiplicirt und so fortschreitet:

$$\text{b)} \begin{cases} u^2 + \dfrac{1}{u^2} = y^2 + 2, \\[2mm] u^3 - \dfrac{1}{u^3} = y^3 + 3y, \\[2mm] u^4 + \dfrac{1}{u^4} = y^4 + 4y^2 + 2, \\[2mm] u^5 - \dfrac{1}{u^5} = y^5 + 5y^3 + 5y \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Relationen nimmt also die aufzulösende Gleichung die Form an:

$$y\{y^2 + 3 + a\} = 0,$$

also entweder:

$$y = 0$$

oder:

$$y = \pm i\sqrt{3 + a}.$$

Daraus folgt endlich, wenn man berücksichtigt, daß:

$$x + \frac{1}{x} = y^2 + 2,$$

$$x = 1 \quad \text{und:}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\{1 + a \pm \sqrt{(a+3)(a-1)}\}.$$

5) $x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0.$

Durch dieselbe Substitution und durch Division mit u^5 erhält man:

$$u^5 - \frac{1}{u^5} + a\left(u^3 - \frac{1}{u^3}\right) + b\left(u - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Setzt man wiederum $u - \frac{1}{u} = y$, so ergiebt sich entweder:

$$y = 0$$

oder:

$$y^4 + (5 + a)y^2 + 3a + b + 5 = 0.$$

Hat man also y gefunden, so erhält man schließlich die Werthe von x aus der Gleichung:

$$x + \frac{1}{x} = y^2 + 2.$$

Aehnlich läßt sich auch die folgende Gleichung auflösen, obgleich ihre Gestalt wesentlich von der der reciproken Gleichungen abweicht.

$$6) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0.$$

Durch Division mit x^2 findet man:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x - \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man also $x - \frac{1}{x} = y$, so erhält man:

$$y^2 + ay + b + 2 = 0$$

oder:

$$y = -\tfrac{1}{2}\{a \mp \sqrt{a^2 - 4b - 8}\}.$$

Die vier Werthe von x folgen endlich aus der Gleichung:

$$x^2 + \tfrac{1}{2}\{a \mp \sqrt{a^2 - 4b - 8}\}x - 1 = 0.$$

$$7) \quad \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}} + \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} = \frac{x^2}{a}.$$

Substituirt man $x^2 = a^2y$, so verschwindet der Coefficient a aus der Gleichung und man erhält nur:

$$\sqrt{y - \frac{1}{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y}} = y.$$

Bringt man alsdann $\sqrt{1 - \frac{1}{y}}$ auf die rechte Seite, so ergiebt sich, wenn man quadrirt:

$$2y\sqrt{1 - \frac{1}{y}} = y^2 + 1 - y,$$

oder, wenn man noch einmal quadrirt:

$$y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat aber im Wesentlichen die Form der unter Nr. 6 behandelten. Dividirt man mit y^2 und setzt $y - \frac{1}{y} = u$, so ergiebt sich:

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

oder:

$$u = 1,$$

also:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

oder:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

§. 4. Quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

Hat man ein System von n Gleichungen mit n unbekannten Größen aufzulösen und eliminirt man nach den gewöhnlichen Methoden $n - 1$ dieser Unbekannten, so erreicht die resultirende Gleichung in der Regel einen so hohen Grad, daß ihre Auflösung mit vielen Schwierigkeiten verknüpft ist. Man wird also, wenn es irgend möglich ist, bei der Auflösung solcher Gleichungen zu Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen müssen, welche je nach der verschiedenen Gestalt des aufzulösenden Gleichungssystemes verschieden sind.

Bei den Gleichungen N. 1 bis Nr. 13 z. B. würde man schließlich auf quadratische Gleichungen geführt werden, wenn man die eine der unbekannten Größen einfach eliminirte. Es ist aber bequemer, zuerst das Verhältniß der beiden unbekannten Größen, oder den Bruch $\frac{x}{y}$ zu bestimmen und mit dessen Hülfe diese Größen selbst zu berechnen.

1) $\frac{x+y}{y} = \frac{7}{4}, \quad xy = 12.$

$x = \pm 3, \quad y = \pm 4.$

2) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b}, \quad xy = c^2.$

$$x = \pm c\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad y = \pm c\sqrt{\frac{a-b}{a-b}}.$$

3) $\frac{x+y}{x} = \frac{7}{5}, \quad xy + y^2 = 126.$
$x = \pm 15, \quad y = \pm 6.$

4) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{25}{7}, \quad xy^2 = 36.$
$x = 4, \quad y = \pm 3.$

5) $x^2 + xy = 24, \quad xy + y^2 = 40.$
$x = \pm 3, \quad y = \pm 5.$

6) $x^2 - xy = 48, \quad xy - y^2 = 12.$
$x = \pm 8, \quad y = \pm 2.$

7) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \frac{234}{109}, \quad xy^2 = 175.$
$x = 7, \quad y = 5.$

8) $\frac{x+2y}{y} = \frac{12}{5}, \; 10x + 5y = \frac{343 - 7x^2}{x+y}.$
$x = \pm 2, \quad y = \pm 5.$

9) $\frac{x^3-y^3}{x^2y - xy^2} = 3, \quad x + y = 6.$
$x = 3, \quad y = 3.$

10) $18\frac{x}{y} = \frac{8y}{x}, \quad 3xy + 2x + y = 485.$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 15, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{97}{9} \\ y = -\frac{97}{6}. \end{cases}$$

11) $x^2 - xy = 24y, \quad xy - y^2 = \frac{3}{2}x.$

Durch Division findet man zunächst $\frac{x}{y} = \pm 4$. Also:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

12) $4x^2 + \frac{5}{2} = \frac{x^2}{y} + 10y, \quad x^2 + 3y = 55.$

$$\begin{cases} x = \pm 5 \\ y = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{217} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

13) $x^2 + axy + by^2 = c,$

$x^2 + \alpha xy + \beta y^2 = \gamma.$

Dividirt man die beiden gegebenen Gleichungen durch einander und setzt alsdann $y = xz$, so verschwindet auch x aus der resultirenden Gleichung und man findet für z die beiden Werthe:

$$z = \frac{c\alpha - a\gamma \pm \sqrt{(c\alpha - a\gamma)^2 - 4(\gamma - c)(b\gamma - c\beta)}}{2(\beta\gamma - c\beta)}.$$

Ferner ist:

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{1 + az + bz^2}}$$

und:

$$y = \pm z \sqrt{\frac{c}{1 + az + bz^2}}.$$

Bisweilen gestattet die Form der Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, daß man zunächst die Summe, resp. Differenz und das Produkt derselben berechnen und darauf nach den im §. 1 gemachten Bemerkungen die Unbekannten selbst bestimmen kann. Dahin gehören die Systeme von 14- 44.

14) $x^2 + y^2 = a$

$x + y = b.$

$$x = \tfrac{1}{2}(b \pm \sqrt{2a - b^2})$$

und:

$$y = \tfrac{1}{2}(b \mp \sqrt{2a - b^2}).$$

15) $x^3 + y^3 = a$

$x + y = b.$

Indem man die zweite Gleichung in die dritte Potenz erhebt und dann die erste subtrahirt, ergiebt sich für xy eine Gleichung ersten Grades, welche das Resultat liefert:

$$xy = \frac{b^3 - a}{3b}.$$

Es ist also: