Mathematische Lehrstunden

von

K. H. Schellbach,
Professor der Mathematik am Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium
und an der Königl. Kriegs-Akademie zu Berlin.

Aufgaben
aus der
Lehre vom Größten und Kleinsten.

Bearbeitet und herausgegeben
von
A. Bode und E. Fischer, Dr. phil.

Mit sechs Figurentafeln.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1860.

Vorwort.

Die Verfasser des vorliegenden Buches hatten als Mitglieder des mathematischen Seminars, welches am hiesigen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium errichtet ist, vielfache Gelegenheit, den mathematischen Unterricht des Herrn Professor Schellbach genauer kennen zu lernen. Sie übernahmen daher gern den Auftrag desselben, die von ihm in der Prima jenes Gymnasiums vorgetragenen und theilweise schon geordneten Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima in seinem Sinne zu bearbeiten und herauszugeben, indem sie hofften, daß diese sowohl an sich interessanten, als in ihrer Behandlung pädagogisch fruchtbaren Probleme auch in weiteren Kreisen ein brauchbares Material für den Unterricht bieten dürften. Diese Aufgaben sind fast sämmtlich, wenn auch mit Hülfe des Lehrers, von den Schülern unseres Gymnasiums aufgelöst worden, und wir haben uns dadurch überzeugt, daß solche Probleme in der That mit Erfolg auf unseren Schulen behandelt werden können. Die Methoden, welche wir angewandt haben, die höheren und transscendenten Gleichungen numerisch aufzulösen, haben es uns möglich gemacht, die Auflösung aller Probleme vollständig durchzuführen, ein Punkt, auf den wir noch besonders aufmerksam zu machen wünschten.

Auch für Studirende der exacten Wissenschaften möchte in diesem Buche Manches enthalten sein, was einerseits zur

Einleitung in die höhere Analysis dienen und andererseits neue Gesichtspunkte für dieselbe darbieten kann. Ferner haben wir einzelne besonders wichtige Probleme, die sich in den meisten Lehrbüchern kaum angedeutet finden, mit einer besonderen Ausführlichkeit durchgeführt.

Leider sahen wir uns aber genöthigt, manche pädagogische Rücksichten fallen zu lassen, um der vorliegenden Sammlung eine wissenschaftlichere Gliederung und einen bessern Abschluß geben zu können. Wir würden z. B. die wenigen im §§. 1 des ersten Capitels zusammengestellten Aufgaben und ebenso die meisten die kürzesten Linien betreffenden Abschnitte zu einer Behandlung auf der Schule nur in seltenen Fällen für ersprießlich halten. Ebenso möchten wir es vorziehen, das im Anfange des dritten Capitels in seinen Principien auseinandergesetzte Rechnungsverfahren nicht zuerst den Schülern vorzutragen, sondern dieselben durch schickliche Behandlung der Aufgaben selbst allmählig in den Gedanken der Methode einzuführen.

Einige, besonders physikalische, Aufgaben haben wir beide den vom Herrn Professor Schellbach behandelten hinzugefügt. Außerdem hatten die Herren F. G. Mehler und Dr. J. W. O. Röthig die Rechnung in einzelnen Nummern bereits früher durchgeführt.

Berlin, Ende März 1860.

A. Bode. E. Fischer, Dr. phil.

Inhaltsverzeichniß.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Einleitung.

Man versteht unter einer Funktion der Größe x eine zweite Größe M, welche von der ersteren auf irgend eine Weise so abhängt, daß ihr Werth bestimmt ist, wenn x bestimmte sonst aber beliebige Werthe annimmt. Man nennt deshalb x die unabhängig und M die abhängig veränderliche (variable) Größe.

Im Folgenden betrachten wir nur solche Funktionen, deren Abhängigkeitsgesetz sich in die Form eines mathematischen Ausdrucks kleiden läßt und stellen uns zur Aufgabe, diejenigen Werthe der unabhängig Veränderlichen x zu finden, welche einer gegebenen Funktion ihre Maximal- oder Minimalwerthe geben. Wir verstehen aber unter denselben diejenigen besondern Werthe der Funktion, welche bei einer stetigen Veränderung von x, im ersteren Falle größer, im andern kleiner sind, als die unmittelbar vorhergehenden und die unmittelbar folgenden. Offenbar fallen die absolut größten und kleinsten Werthe einer Funktion mit unter diese Definition, wenn wir von einigen Ausnahmefällen, die bei den folgenden Aufgaben nicht vorkommen, absehen wollen.

Erstes Kapitel.

§. 1.

In vielen Fällen läßt die Form einer Funktion M sofort die Werthe der unabhängig Veränderlichen erkennen, welche dem Maximum oder Minimum entsprechen, oder läßt wenigstens sofort die Gleichungen aufstellen, durch welche dieselbe bestimmt wird. Dies findet unter andern Statt, wenn M eine Summe von Quadraten oder auch Constanten und Quadraten ist, oder sich unter der Form einer einfachen trigonometrischen Funktion darstellt, wie aus den folgenden Problemen ersichtlich ist.

1. Eine gegebene Strecke 2a soll so in zwei Theile getheilt werden, daß das aus beiden Stücken gebildete Rechteck den größtmöglichen Inhalt hat.

Bezeichnet man das eine Stück der gegebenen Strecke mit $a+x$, so ist das andere $a-x$ und der Flächeninhalt des aus beiden gebildeten Rechteckes

$$M = a^2 - x^2.$$

Offenbar hat nun M für $x=0$ seinen größten Werth, so daß das aus der Seite a gebildete Quadrat das gesuchte größte Rechteck ist.

2. Für welche Werthe von x wird die Funktion:

$$M = ax + \frac{b}{x+\alpha}$$

ein Minimum?

Aus der gegebenen Form von M folgt leicht:

$$\begin{aligned} M &= a(x+\alpha) + \frac{b}{x+\alpha} - a\alpha \\ &= a(x+\alpha) + 2\sqrt{ab} + \frac{b}{x+\alpha} - (a\alpha + 2\sqrt{ab}) \\ &= -(a\alpha + 2\sqrt{ab}) + \left\{\sqrt{a(x+\alpha)} + \sqrt{\frac{b}{(x+\alpha)}}\right\}^2. \end{aligned}$$

Man erhält nun offenbar den kleinsten Werth von M, wenn das Quadrat in der letzten Gleichung verschwindet. Die gesuchten x sind also durch die Gleichung bestimmt:

$$\sqrt{a(x+\alpha)} + \sqrt{\frac{b}{x+\alpha}} = 0$$

oder

$$x = -\alpha + \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Der kleinste Werth der Funktion M aber selbst ist

$$M = -(a\alpha + 2\sqrt{ab}).$$

Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß die Wurzel ein doppeltes Vorzeichen haben kann, so daß M zwei Minimalwerthe hat.

3. Es soll das Maximum der Funktion

$$M = \frac{a}{x+\alpha} - \frac{b}{x+\beta}$$

gefunden werden.

Man hat offenbar identisch:

$$M(\alpha-\beta) = (x+\alpha-(x+\beta))\left\{\frac{a}{x+\alpha} - \frac{b}{x+\beta}\right\}$$

oder, wenn man nach Auflösung der Klammern $2\sqrt{ab}$ addirt und subtrahirt:

$$M(\alpha-\beta) = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 - \left\{\sqrt{\frac{a(x+\beta)}{x+\alpha}} - \sqrt{\frac{b(x+\alpha)}{x+\beta}}\right\}^2.$$

Die Maximalwerthe von M sind also durch die Gleichung bestimmt:

$$\sqrt{\frac{a(x+\beta)}{x+\alpha}} - \sqrt{\frac{b(x+\alpha)}{x+\beta}} = 0.$$

Erweitert man mit $\sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}$, so erhält man mit Berücksichtigung der doppelten Wurzelzeichen:

$$x = \frac{\pm\alpha\sqrt{b}-\beta\sqrt{a}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}.$$

Die entsprechenden größten Werthe von M aber sind:

$$M = \frac{(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})^2}{\alpha-\beta}.$$

4. Aehnliche Beispiele ließen sich auch für den Fall aufstellen, daß M eine Funktion mehrerer unabhängig Veränderlicher ist. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} M &= (x-y)\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) \\ &= (\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 - \left(\sqrt{\frac{ay}{x}} \pm \sqrt{\frac{bx}{y}}\right)^2 \end{aligned}$$

ein Maximum, wenn man hat:

$$\sqrt{\frac{ay}{x}} \pm \sqrt{\frac{bx}{y}} = 0.$$

5. Ebenso ist

$$M = a\sqrt{x+\alpha} - b\sqrt{y+\beta}$$

oder

$$M^2 = (a^2-b^2)(x-y+\alpha-\beta) + (a\sqrt{y+\beta} - b\sqrt{x+\alpha})^2$$

ein Minimum, wenn man annimmt, daß

$$x - y$$

immer denselben konstanten Werth behält, und man außerdem

$$(1.) \quad a\sqrt{y+\beta} - b\sqrt{x+\alpha} = 0$$

setzt.

Auf eine Funktion von der vorliegenden Form führt, z. B. das folgende Problem, welches übrigens in Nr. 40 noch einmal behandelt ist. Von welcher Höhe CA = x (Fig. 24) muß eine vollkommen elastische Kugel fallen, damit sie zurückspringend in der kürzesten Zeit einen auf der Vertikale CA liegenden Punkt B wieder erreiche?

Es sei BA = h. Die Kugel fällt von C bis A in der Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Die Zeit τ aber, welche die Kugel gebraucht, um wieder nach B zurückzuspringen, ist ebenso groß als die Zeit, in welcher der von C fallende Körper die Strecke BA zurücklegt. Mithin

$$\tau = \sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{2(x-h)}{g}} \text{ und}$$

$$t+\tau = \sqrt{\frac{2}{g}}\left\{2\sqrt{x} - \sqrt{x-h}\right\}.$$

Es soll nun

$$M = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-h} = 2\sqrt{x} - \sqrt{y}$$

ein Minimum werden. Diese Funktion ist aber mit dem obigen M identisch, wenn man a = 2, b = 1, $\alpha = \beta = 0$ setzt. Da nun in der That x—y stets denselben konstanten Werth h behält, so hat man nach der Gleichung (1.)

$$2\sqrt{x-h} - \sqrt{x} = 0, \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{4h}{3}$$

als die gesuchte Höhe, von welcher die Kugel herabfallen muß. Mithin ist das kleinste $t+\tau = \sqrt{\frac{6h}{g}}$ Sekunden.

§. 2.

Sehr einfach lassen sich ferner die Maxima und Minima auffinden, wenn der zu untersuchende Ausdruck sich in die Form einer einfachen trigonometrischen Funktion bringen läßt.

6. Es sollen auf der schiefen Ebene AB (Fig. 1) Steine von A nach irgend einem Punkte B der senkrechten Wand CE hinabgleiten. Wie ist dieser Punkt B zu bestimmen, damit die Steine den Weg AB in der kürzesten Zeit zurücklegen?

Es sei der Abstand des Punktes A von der Wand CE, $AD = a$, der Winkel $DBA = x$, also $AB = \frac{a}{\sin x}$. Legt aber ein Stein diese Strecke AB in der Zeit t zurück, so hat man auch:

$$AB = \tfrac{1}{2} g t^2 . \cos x.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe von AB erhält man:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \sin x \cos x}} = \sqrt{\frac{4a}{g . \sin 2x}}.$$

Diese Funktion wird aber ein Minimum, wenn $\sin(2x)$ seinen größten Werth hat, d. h. $= 1$ ist. Folglich ist das dem kleinsten t entsprechende $x = 45°$.

7. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch noch auf dieselbe Weise lösen, wenn auf die Reibung Rücksicht genommen wird. Ist nämlich der Reibungskoëfficient $= \operatorname{tg} \alpha$, so ist die in der Richtung der schiefen Ebene wirkende Componente der den Stein bewegenden Kräfte:

$$g(\cos x - \sin x . \operatorname{tg} \alpha),$$

da die Reibung dem Drucke $g . \sin x$ proportional ist. Es folgt also ganz wie vorher:

$$\frac{a}{\sin x} = \tfrac{1}{2} g (\cos x - \sin x . \operatorname{tg} \alpha) t^2 \text{ oder}$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g(\sin x \cos x - \sin^2 x \operatorname{tang} \alpha)}}.$$

Es wird nun t ein Minimum, sobald der Nenner der Wurzel ein Maximum wird. Derselbe nimmt aber leicht die Form an:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sin 2x + \tfrac{1}{2} \cos 2x \operatorname{tg} \alpha - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\sin(2x + \alpha)}{\cos \alpha} - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Dieser Ausdruck nun wird ein Maximum, wenn es

$$\sin(2x+\alpha)$$

wird. Dies geschieht aber, sobald

$$2x+\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{oder}$$
$$x = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha$$

ist. Damit ist denn das dem Minimum entsprechende x gefunden.

8. Es sollen wiederum Steine auf AC (Fig. 2) von A nach irgend einem Punkte C der geneigten Wand BC in der möglichst kurzen Zeit hinübergleiten. Wie ist demgemäß der Punkt C zu bestimmen?

Es sei die vertikale Strecke $AB = a$, der gegebene Winkel $ABC = \beta$. Der veränderliche Winkel $BAC = x$.

Der Kürze halber wollen wir diese Aufgabe sogleich mit Berücksichtigung der Reibung auflösen. Will man übrigens von derselben absehen, so hat man nur in der folgenden Rechnung den Reibungskoëfficienten $\operatorname{tg}\alpha = 0$ zu setzen.

Man hat nun wieder analog wie oben:

$$AC = \tfrac{1}{2}g.t^2(\cos x - \sin x \operatorname{tg}\alpha) = \frac{a.\sin\beta}{\sin(\beta+x)},$$

mithin

$$gt^2\frac{\cos(\alpha+x)}{2\cos\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+x)}$$

also

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{2a\sin\beta\cos\alpha}{g\sin(\beta+x)\cos(\alpha+x)} \\ &= \frac{4a\sin\beta\cos\alpha}{g\{\sin(2x+\alpha+\beta)+\sin(\beta-\alpha)\}}. \end{aligned}$$

Offenbar aber ist t^2 am kleinsten, wenn $\sin(2x+\alpha+\beta)$ am größten, oder

$$x = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist.

9. Ein Viereck, dessen vier Seiten gegeben sind, soll so konstruirt werden, daß sein Flächeninhalt so groß als möglich ist. Es sei ABCD (Fig. 3) irgend eines der Vierecke mit den Seiten a, b, c, d. Die Diagonale AC sei außerdem $= e$. Der Winkel $ABC = \alpha$

und $ADC = \beta$. Man hat alsdann:

$$\triangle ADC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(c+d+e)(c+d-e)(c-d+e)(-c+d+e)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(c+d)^2-e^2}.\sqrt{e^2-(d-c)^2}.$$

Da aber

$$e^2 = (a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + (a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

ist, so hat man:

$$\triangle ADC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(c+d)^2-(a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha-(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}$$
$$\sqrt{(a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-(d-c)^2}.$$

Substituirt man noch

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) = s,$$

so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\triangle ADC = \sqrt{(s-a)(s-b)-a.b.\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}\,\sqrt{(s-c)(s-d)-a.b.\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Setzt man ferner:

$$s-a = a';\quad s-b = b';\quad s-c = c';\quad s-d = d'$$

und außerdem

$$(a)\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{a.b}{a'.b'}} = \sin\varphi;\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{a.b}{c'.d'}} = \sin\psi,$$

so erhält man:

$$(b)\quad \triangle ADC = \cos\varphi.\cos\psi\sqrt{a'b'c'd'}.$$

Ferner folgt aus (a) durch Multiplikation:

$$\sin\varphi.\sin\psi = \frac{\tfrac{1}{2}a.b\sin\alpha}{\sqrt{a'b'c'd'}}$$

oder, da

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}a.b\sin\alpha$$

ist,

$$(c)\quad \triangle ABC = \sin\varphi.\sin\psi\sqrt{a'b'c'd'}.$$

Durch Addition von (b) und (c) erhält man nun sofort das Gesammtviereck

$$M = \cos(\varphi-\psi)\sqrt{a'b'c'd'}.$$

Wir haben damit eine sehr einfache Formel für den Inhalt eines beliebigen Vierecks gefunden, wenn die vier Seiten a, b, c, d und ein Winkel α gegeben sind.

Da ferner $\sqrt{a'b'c'd'}$ konstant ist, so wird M ein Maximum, wenn $\varphi = \psi$ ist. Der gesuchte größte Werth ist also:

$$M = \sqrt{a'b'c'd'}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (a) nun findet man leicht den Winkel α, welcher zum gesuchten größten Vierecke gehört. Man erhält

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{a'b'}{c'd'}},$$

also

$$\tfrac{1}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{a'b'c'd'}}{a'b'+c'd'}.$$

Das zugehörige β folgt offenbar aus derselben Formel, wenn man nur a mit c und b mit d vertauscht. Da sich aber dadurch der letztgefundene Werth von α nicht ändert, so hat man für das größte Viereck

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

oder

$$\alpha+\beta = \pi,$$

da α nicht gleich β sein kann. Sonst wäre nämlich nach einer ganz ähnlichen Rechnung auch Winkel DAB = W. DCB, oder das Viereck ein Parallelogramm, was bei der Verschiedenheit der gegebenen Seiten unmöglich ist.

Von allen Vierecken also, die vier gegebene Seiten haben, ist dasjenige das größte, um welches ein Kreis beschrieben werden kann.

Zweites Kapitel.

Hat die Funktion, deren Maximal- oder Minimalwerthe gefunden werden sollen, die Form eines Ausdrucks zweiten Grades, ist also M (oder auch irgend eine Potenz von M, oder eine einfache trigonometrische Funktion derselben Größe)

$$= ax^2+bx+c,$$

so hat man, wenn diese Gleichung nach x aufgelöst wird, in der Form ihrer Wurzeln ein einfaches Mittel, sofort die größten resp. kleinsten Werthe von M zu finden. Man erhält nämlich

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c-M}{a}}.$$

Da aber x stets reell bleiben soll, also der Ausdruck unter der Wurzel nie kleiner als 0 werden darf, so sind die ausgezeichneten

Werthe von M so zu bestimmen, daß die Wurzel verschwindet. Ob diese Werthe kleinste oder größte sind, läßt sich leicht in den einzelnen Fällen entscheiden.

§. 1.

10. In einen gegebenen Halbkreis soll das Rechteck beschrieben werden, das den größten Flächeninhalt hat.

Im Halbkreise, dessen Mittelpunkt M (Fig. 4), dessen Durchmesser $AB = 2r$ ist, sei zunächst das beliebige Rechteck CEFD beschrieben, und es sei $MD = x$, $DF = y$. Der Flächeninhalt des Rechteckes ist dann nach dieser Bezeichnung:

$$(1) \quad M = 2xy.$$

Da aber die Ecken E und F auf dem Halbkreise liegen sollen, so ist

$$(2) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Quadrirt man nun die Gleichung (1), so folgt nach der Theorie der quadratischen Gleichungen aus (1) und (2), daß x^2 und y^2 Wurzeln der Gleichung sind:

$$t^2 - r^2 t + \tfrac{1}{4}M^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}r^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{r^4 - M^2}, \\ y^2 = \frac{1}{2}r^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{r^4 - M^2}. \end{cases}$$

Der größte Werth also, den M annehmen kann, ist r^2, weil für größere M sowohl x als y imaginär würden. Ist aber

$$M = r^2,$$

so folgt aus (3):

$$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

als Seiten des gesuchten größten Rechteckes. Unter allen Rechtecken also, die einem Quadranten eingeschrieben werden können, hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. Dasselbe gilt offenbar auch vom ganzen Kreise.

11. In ein gegebenes Dreieck soll das größte Rechteck beschrieben werden, dessen eine Seite auf der Basis des Dreiecks liegt.

Die Basis AC (Fig. 5) sei $= a$, die Höhe $BH = h$. DEFG sei irgend ein Rechteck, dessen Basis auf AC liegt, DG sei x, $GF = y$.

Man hat nun aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BEF und BAC die Gleichung:

$$(1) \quad (a-x)h = ay.$$

Der Inhalt des Rechtecks aber ist

$$(2) \quad M = xy.$$

Mithin, wenn man y mit Hülfe von (1) eliminirt

$$x^2 - ax + \frac{M.a}{h} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(3) \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{M.a}{h}}.$$

Der größte Werth von M bestimmt sich also durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{4}a^2 = \frac{Ma}{h} \quad \text{oder}$$

$$M = \tfrac{1}{4}ah.$$

Die entsprechenden Werthe von x und y sind demnach nach (3) und (1)

$$x = \tfrac{1}{2}a \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2}h.$$

12. Auf der horizontalen Ebene, in welcher sich der Thurm AF (Fig. 6) erhebt, sei irgendwie ein Rechteck gegeben. Man lege eine Ebene so durch AF, daß sie zwei Seiten des Rechtecks senkrecht in den Punkten B und C schneidet. Es ist dann $AB = a$ der Abstand des Rechteckes von A und BC seine Breite. In welcher Höhe AD nun erscheint das Rechteck am breitesten, d. h. in welcher Höhe ist der Gesichtswinkel $BDC = M$ am größten?

Es sei $AC = b$, $ADB = \beta$, $AD = x$. Man hat nach dieser Bezeichnung:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg}(ADC - \beta) = \frac{\operatorname{tg} ADC - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg} ADC \operatorname{tg}\beta}.$$

Nun ist aber:

$$\operatorname{tg} ADC = \frac{b}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{x},$$

folglich

$$\operatorname{tg} M = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}, \quad \text{oder}$$

$$x^2 - \frac{b-a}{\operatorname{tg} M}x + ab = 0 \quad \text{und}$$

$$x = \frac{b-a}{2\operatorname{tg} M} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2\operatorname{tg} M}\right)^2 - ab}.$$

Weil nun in unserm Falle M immer kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sein muß, so ist, für das größte M, $\left(\frac{b-a}{2\,\mathrm{tg}\,M}\right)^2$ am kleinsten. Da aber dies Quadrat nie kleiner werden darf als a.b, so findet man den größten Gesichtswinkel M aus der Gleichung:

$$\left(\frac{b-a}{2\,\mathrm{tg}\,M}\right)^2 = a.b \quad \text{oder}$$

$$\mathrm{tg}\,M = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

Die entsprechende Höhe x ist $= \sqrt{a.b}$.

13. Wiederum sei AF ein Thurm, BC = b die Breite eines Gebäudes, dessen Höhe CD = h ist (Fig. 7). AB = a. In welcher Höhe AH erscheint das Gebäude CBD am größten, oder ist der Gesichtswinkel BHD = M ein Maximum?

Es sei AH = x und Winkel AHB = β.

Man hat alsdann, wie oben:

$$\mathrm{tg}\,M = \mathrm{tg}(AHD-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,AHD - \mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,AHD\,.\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Es ist aber

$$\mathrm{tg}\,AHD = \frac{a+b}{x-h} \quad \text{und} \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{a}{x}.$$

Folglich:

$$\mathrm{tg}\,M = \frac{(a+b)x - a(x-h)}{a(a+b)+x(x-h)}, \quad \text{oder}$$

$$x^2-(b\cot M+h)x+a(a+b)-ah\cot M = 0.$$

Mithin

$$x = \tfrac{1}{2}(b\cot M+h) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b\cot M+h)^2+ah\cot M-a(a+b)}.$$

Da nun der von M abhängige Theil unter der Wurzel mit wachsendem M abnimmt, so wird der größte Werth, den M erhalten kann, durch die Gleichung bestimmt:

$$\tfrac{1}{4}(b\cot M+h)^2+ah\cot M = a(a+b) \quad \text{oder}$$

$$\mathrm{tg}\,M = \frac{h(2a+b)\pm 2p\sqrt{a(a+b)}}{4a(a+b)-h^2},$$

wenn man $b^2+h^2 = p^2$ setzt.

Der dem Maximum von M entsprechende Werth von x ist nun aber

$$x = \tfrac{1}{2}(b \cot M + h).$$

Setzt man den soeben gefundenen Werth von tgM in diese Gleichung ein, und erweitert dann mit $h(2a+b) \mp 2p\sqrt{a(a+b)}$, so erhalten Zähler und Nenner der rechten Seite den gemeinschaftlichen Faktor

$$2b(h^2 - 4a(a+b)),$$

hebt man denselben also fort, so findet man schließlich:

$$(1) \qquad x = \frac{1}{b}(-a.h \pm p\sqrt{a(a+b)})$$

zwei Werthe, von welchen der negative einen Punkt bestimmt, welcher von F aus gesehen, über A hinaus liegt.

Ist $h = 0$, so wird $p = b$ und man erhält das Resultat der vorigen Aufgabe.

Ist hingegen $b = 0$, also $p = h$, so erscheint x in der Form des Unbestimmten $\frac{0}{0}$. Man erhält aber durch Erweitern der rechten Seite der Gleichung (1) mit $a.h + p\sqrt{a(a+b)}$

$$x = \frac{(ab + p^2)\sqrt{a}}{h\sqrt{a} + p\sqrt{a+b}},$$

und wenn man $b = 0$, also $p = h$ setzt:

$$x = \frac{h^2\sqrt{a}}{2h\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}h.$$

Um also eine vertikale Wand von irgend einer Linie AF aus am größten zu sehen, muß man sich in der halben Höhe der Wand befinden, wie auch von vorn herein klar ist.

Man könnte übrigens leicht die beiden soeben gelösten Aufgaben in eine einzige zusammenfassen und sie ohne alle Rechnung synthetisch auflösen.

Man denke sich zu diesem Zwecke zwei Punkte C und D und eine beliebige gerade Linie L. Man soll auf dieser geraden Linie diejenigen Punkte F bestimmen, für welche der Winkel CFD ein Maximum wird. Offenbar kann man durch jeden Punkt A der geraden Linie L und durch C und D einen Kreis legen, in welchem der Winkel CAD Peripheriewinkel zu der konstanten Sehne CD ist.