TAFELN DER FUNKTIONEN COSINUS UND SINUS

MIT DEN NATÜRLICHEN SOWOHL REELLEN ALS REIN IMAGINÄREN ZAHLEN ALS ARGUMENT

(KREIS UND HYPERBELFUNCTIONEN)

VON

DR. CARL BURRAU.

BERLIN

VERLAG VON GEORG REIMER

1907

MEINEM VEREHRTEN LEHRER UND FREUND

HERRN

PROFESSOR DR. T. N. THIELE

GEWIDMET

Es tritt bei den wissenschaftlichen und technischen Rechnern in den letzten Jahrzehnten eine immer stärkere Tendenz zur Anwendung von Rechentafeln und Rechenmaschinen und damit zusammenhängend eine geringere Anwendung von Logarithmen deutlich hervor. Da jedoch eine große Menge der besten Tafelwerke nicht die Funktionswerte selbst sondern ihre Logarithmen gibt, muß die erwähnte Tendenz notwendiger Weise die Herausgabe von Tafeln der Funktionswerte selbst hervorrufen. Die vorliegende Tafel ist als ein Glied dieser Bestrebungen aufzufassen. Unter den für den wissenschaftlichen Rechner wichtigsten Funktionen nehmen die Cosinus- und Sinus-Funktionen eine hervorragende Stelle ein, und um eine vollkommene rechnerische Verwertung dieser Funktionen zu erzielen, genügt es keineswegs die Argumente auf die reellen Zahlen zu beschränken.

Vorliegende Tafel ist deshalb auch auf rein imaginäre Argumente ausgedehnt. Diese Erweiterung bringt zwar die Unbequemlichkeit mit sich, daß die Tafel, um vollständig zu sein, bis zum Unendlichen ausgedehnt werden müßte. Die Unmöglichkeit diese Forderung zu erfüllen, führt zur Notwendigkeit einen Punkt zu fixieren, wo die Tafel aufhören soll. Derselbe ist hier so gewählt, daß die beiden Funktionen von diesem Punkte aus und für noch größere Argumente einander gleich sind und mit einer dritten Funktion, der Exponentialfunktion, verschmelzen.

Wenn man bei der hier gewählten Genauigkeit ($5^1/_2$ Ziffern) stehen bleibt, kann man bei $\psi = 8$ aufhören. Seite 8, 9, 10 und 44 habe ich einen frei gebliebenen Raum dazu benutzt, die Funktion e^{ψ}

mit derselben Genauigkeit für die Werte von $\psi = 8$ bis $\psi = 9.8$ zu geben. Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß die Exponentialfunktion für kleinere Argumente auch durch die Summen resp. Differenzen zweier Tafelwerte bestimmt ist, nämlich durch die Formeln

$$e^{\psi} = \cos i\,\psi + \frac{1}{i} \sin i\,\psi$$

$$e^{-\psi} = \cos i\,\psi - \frac{1}{i} \sin i\,\psi$$

Die vorliegende Tafel ist für eine größere von mir in Angriff genommene, etwa 5-stellige Genauigkeit fordernde Rechenarbeit (das Dreikörperproblem betreffend) nötig, und hierdurch ist auch die Stellenanzahl der Tafel bestimmt worden, wenigstens was den Teil mit rein imaginären Argumenten betrifft. Dem Teil mit reellen Argumenten habe ich noch eine Stelle hinzugefügt, und zwar weil es möglich war, auf den kleinen Raum von kaum sieben Seiten eine $6^1/_2$-stellige Tafel zusammenzudrängen, worin noch (unter Bezugnahme nur auf die ersten Differenzen) interpoliert werden kann. Wenn man sich erinnert, daß z. B. die Jordansche Ausgabe des „Opus Palatinum"*) mit nur 7-stelliger Genauigkeit 270 Seiten in Anspruch nimmt, scheint mir diese kondensierte Tafel einiges Interesse darzubieten.

Unter den vielfachen Tabulierungen der Cosinus- und Sinus-Funktionen für reelle Argumente gibt es meines Wissens keine, welche als Argument die Reihe der natürlichen Zahlen gewählt hat, wenigstens keine mit nur der ersten Differenz interpolierbare.

Die Erklärung hierzu ist wohl darin zu suchen, daß, wenn man die Argument-Einheit im rationalen Verhältnis zur Peripherie annimmt, also z. B. den Grad oder den Quadranten als Einheit wählt, die beiden Funktionen sich mit derselben Tafel tabulieren lassen. Auf diese Bequemlichkeit muß man zwar verzichten, wenn man die natürlichen Zahlen als Argument haben will, aber es gibt doch viele Gelegenheiten, wo eine Tafel wie die vorliegende nützlich sein kann, und da mir eben bei der oben erwähnten

*) Opus Palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10'' zu 10''. Herausgegeben von Dr. W. Jordan. Hannover und Leipzig 1897. 270 + VII Seiten.

Rechenarbeit eine solche Tafel fast ganz unentbehrlich war, habe ich ihre Herausgabe unternommen.

Eine kleine Verbesserung, die wohl künftig auch den Weg in andere Tafeln finden wird, erscheint hier meines Wissens zum ersten Male. Die Verbesserung betrifft die Abrundung und treibt die Genauigkeit, welche bei einer vorausgewählten Stellenanzahl erreicht werden kann, etwas weiter als es mit dem gewöhnlichen Abrundungsprinzip möglich ist. Die letzte Stelle tritt in der Tafel entweder mit oder ohne einen hinzugefügten Punkt auf. Der Punkt zeigt an, daß die folgenden Stellen einen Wert zwischen 0.25 und 0.75 der Einheit der letzten Tafelstelle haben. Was unter 0.25 liegt, wird weggelassen und was über 0.75 ist, gibt zur Erhöhung der letzten Tafelstelle Anlaß. Mit dem Punkte wird g e r e c h n e t wie mit der Ziffer 5 der ersten weggelassenen Tafelstelle. Ohne Vergrößerung des Umfanges einer Tafel wird hierdurch eine „halbe Stelle“ gewonnen.

Die Einführung dieser Verbesserung verdanke ich Herrn Professor T. N. Thiele. Man muß sich darüber wundern, daß diese einfache Verbesserung nicht allgemein in Tafeln angewandt wird, umsomehr als etwas ähnliches (aber nicht ebenso gutes) mehrmals versucht worden ist. Der Schrönsche „Strich“*) ist z. B. bei den Rechnungen ziemlich schwierig zu berücksichtigen, wogegen man mit dem (0.5 bedeutenden) hier benutzten Punkte leicht und mit minimalem Mehraufwand von Arbeit rechnet. Unter den zahlreichen Rechnern, die in den verflossenen Jahren das wissenschaftliche Rechnen bei Herrn Prof. Thiele gelernt haben, gibt es mit einer einzigen Ausnahme niemand, der nicht dasselbe Wohlbehagen wie ich bei dem Rechnen mit dem Punkt fühlt.

---

*) Dr. Ludwig Schrön: Siebenstellige Logarithmen. 14. Stereotyp-Ausgabe. Braunschweig 1875. Vorrede Seite III, Zeile 13.

Dasselbe Abrundungsprinzip wie bei Schrön ist auch in den großen achtstelligen Logarithmentafeln des französischen Generalstabs angewendet. Der Punkt nach der letzten Tafelstelle bedeutet also dort $\div$ 0.25, wogegen zu allen nicht mit den Punkten versehenen Tafelstellen der Addent 0.25 hinzuzufügen ist.