Mathematische Mussestunden

Eine Sammlung

von

Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur

Von

Dr. Hermann Schubert

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Zweite, stark vermehrte Auflage

Zweiter Band:

Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1900

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Anordnungs-Probleme.

II. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeits-Probleme.

I. Abschnitt.

Anordnungs-Probleme.

§ 1.

Das Problem der 15 Christen und der 15 Türken.

Dieses Problem gab Bachet in der zweiten Auflage seiner „Problèmes plaisants" (Lyon, 1624) in folgender Form auf: „Auf einem Schiffe befanden sich 15 Christen und 15 Türken. Als ein gewaltiger Sturm sich erhoben hatte und das Schiff schon dem Untergang geweiht schien, erklärte der Kapitän, dass, wenn 15 von den 30 auf dem Schiffe befindlichen Personen über Bord geworfen würden, das Schiff und das Leben der übrigen 15 Personen gerettet werden könnte. Diesem Rate wollte man Folge leisten. Man kam überein, diejenigen 15, welche sich für die übrigen opfern sollten, auf folgende Weise zu bestimmen. Alle 30 Personen sollten sich in eine Reihe stellen, dann sollte wiederholt von 1 bis 9 gezählt werden, und immer derjenige über Bord geworfen werden, auf den die Zahl 9 fiel. Dabei sollte der erste als auf den letzten folgend angesehen werden, und nach jedesmaliger Ausscheidung des 9ten sollte bei der in der Reihe zunächst folgenden Person das Zählen von 1 bis 9 von neuem beginnen. Welche Plätze mussten die 15 Christen einnehmen, um zu erreichen, dass sie selbst sämtlich verschont blieben und gerade die 15 Türken ins Meer zu werfen waren?" Dieselbe Aufgabe befindet sich auch vor Bachet bei Tartalea, und später mit verschiedenen Varianten in Zeitschriften, die mathematische Unterhaltungs-Aufgaben enthalten. Die Lösung kann man durch Probieren leicht finden, wenn man sich 30 Striche macht, dann immer von 1 bis 9 zählt, jeden Strich, auf den die Zahl 9 trifft, irgendwie kennzeichnet und beim Weiterzählen nicht versäumt, die so gekennzeichneten Striche zu überspringen. Auf solche Weise findet man die folgende Lösung des Problems:

I I I I T T T T T I I T I I I

T I T T I I T T T I T T I I T

Dies heisst, dass aufeinanderfolgen müssen:

4 Christen, 5 Türken, 2 Chr., 1 T., 3 Chr., 1 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 3 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 1 T. Bachet fügte dieser Lösung auch ein mnemotechnisches Hilfsmittel bei, nämlich den Vers:

Mort, tu ne falliras pas,
En me livrant le trépas!

Achtet man nur auf die Vokale dieses Verses, so hat man die Reihenfolge o, u, e, a, i, a, a, e, e, i, a, e, e, a, wo man für a als den ersten Vokal des Alphabets 1, für e 2, für i 3, für o 4, für u 5 zu setzen hat, um zu erkennen, wieviel Christen und wieviel Türken immer abwechseln müssen. Ozanam gab einen lateinischen Vers, der in derselben Weise die Lösung kennzeichnet, nämlich:

„Populeam virgam mater regina ferebat."

Ball gab in seinen „Recreations" den folgenden englischen Merk-Vers für die Lösung des Problems:

„From numbers' aid and art
Never will fame depart!"

Ein deutscher Merk-Vers lautet:

„Gott schuf den Mann in Amalek,
Der Israel bezwang!"

Tartalea teilte bei seiner Erörterung des Problems auch die Lösungen der Aufgaben mit, die entstehen, wenn man irgend eine der zehn Zahlen von 3 bis 12 statt 9 einsetzt, und zwar gab er jede der zehn Lösungen durch einen italienischen Vers wieder, der, wie die obigen Verse, durch die Nummern der darin auftretenden Vokale die zu bildende Reihenfolge liefert.

Im Laufe der Zeit hat das Problem manche das Wesen der Sache nicht ändernde Varianten erfahren. In Freunds Rätselschatz (Reklam 1885) sind zwei Varianten aufgeführt. Erstens sind an die Stelle der 30 Schiffbrüchigen 30 Deserteure getreten, von denen 15 erschossen und 15 begnadigt werden sollen. Zweitens sind an die Stelle der 15 Christen und 15 Türken 16 Weise und 16 Neger getreten, die auch zusammen Schiffbruch erlitten haben, und von denen die 16 Neger zu opfern sind, und zwar dadurch, dass nicht der jedesmalige Neunte, sondern der jedesmalige Zehnte über Bord geworfen werden soll. Fasst man als das Wesentliche des Problems nur dies auf, dass n Personen so anzuordnen sind, dass bei Entfernung immer desjenigen, der beim Abzählen als d-ter erscheint, gewisse im voraus bezeichnete Personen übrig bleiben, so lässt sich das Problem noch vor Tartalea weiter zurückverfolgen. Es kommt nämlich dann schon in der Schrift des Hegesippus „De bello Judaico" vor, und zwar im 16ten bis 18ten Kapitel des dritten Buches. Dort wird nämlich erzählt, dass nach der Zerstörung Jerusalems der berühmte jüdische Schriftsteller Josephus sich mit 40 andern Juden in einen Keller geflüchtet hatte, von denen alle, ausgenommen Josephus selbst und einer seiner Freunde, sich selbst töteten, und dass dies auf folgende Weise zugegangen sei. Alle, ausser Josephus und seinem Freunde, erklärten, dass sie lieber sterben, als den Siegern in die Hände fallen wollten. Josephus, der sich scheute, seine Absicht, leben zu bleiben, zu offen auszusprechen, schlug vor, dass die Tötung in einer gewissen Ordnung sich vollziehe. Sie möchten sich alle in eine Reihe stellen und dann solle der jedesmalige Dritte sich selbst den Tod geben, wobei der erste als auf den letzten folgend anzusehen sei. Der Vorschlag wurde angenommen und dadurch, dass Josephus sich auf den 31ten Platz und seinen Freund auf den 16ten Platz stellte, rettete er sein eigenes und seines Freundes Leben, weil von den 41 Personen die übrigen 39 sich, dem angenommenen Vorschlage gemäss, schon vorher getötet hatten, ehe die Abzählung unter den letzten beiden zu beginnen hatte. Dies scheint das älteste Vorkommen des Problems zu sein.

Obwohl das Problem unter uns immer wieder von neuem auflebt, indem die Kinder nicht durch Losen, sondern durch Abzählen denjenigen oder diejenigen bestimmen, welche bei irgend einem Spiele eine besondere Rolle spielen sollen, so hat das Problem dennoch niemals eine mathematische Behandlung erfahren, bis der Verfasser dieses Buches eine solche in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" und in den „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg" vor einigen Jahren veröffentlichte. Die wichtigsten Resultate dieser mathematischen Untersuchungen sollen hier Platz finden.

Das Problem lässt sich in verallgemeinerter Form aussprechen, wie folgt:

Auf einer Kreisperipherie liegen n Punkte, die, der Reihe nach, im Sinne eines Uhrzeigers, durch die Zahlen 1, 2, 3, ... n — 1, n bezeichnet sind. Man zählt, mit Punkt 1 beginnend, der Reihe nach die Punkte bis zur Zahl d. Der Punkt, den die Zahl d trifft, wird ausgestrichen. Bei der in der Reihe nächstfolgendem Punkte beginnt man wieder zu zählen, und zwar wieder von 1 bis d. Der Punkt, den jetzt die Zahl d trifft, wird auch ausgestrichen, und so setzt man dieses Verfahren fort, bis alle Punkte ausgestrichen sind, wobei man nie versäume, die ausgestrichenen Punkte beim Zählen zu überspringen. Es soll berechnet werden, welche Nummer der Punkt hat, der als erster, welche, der als zweiter, und überhaupt welche Nummer x der Punkt hat, der als e-ter Punkt ausgestrichen wird. Naturgemäss sind n, d, e positive Zahlen. Auch kann d kleiner, gleich oder grösser als n sein. Die Zahl e kann natürlich nicht grösser als n sein. Fragt man, welcher Punkt als letzter ausgestrichen wird, so hat man $e = n$ zu setzen.

Zunächst ergiebt sich sehr einfach, dass, wenn man die gesuchte Nummer des ausgestrichenen Punktes immer mit x bezeichnet, $x = d$ wird, wenn $e = 1$ und n nicht kleiner als d ist. Wenn ebenfalls $e = 1$, aber $n < d$ ist, so ist x gleich dem Reste, der übrig bleibt, wenn man d durch n dividiert. Dies ist aus der Art des Abzählens unmittelbar ersichtlich. Damit sind für $e = 1$ alle Zahlen x bestimmt. Was die Zahlen für $e = 2$ angeht, so fand der Verfasser, dass dieselben aus denen für $e = 1$ dadurch hervorgehen, dass man die letzteren um d wachsen lässt; wenn man dabei auf eine Zahl stösst, die grösser als n ist, so hat man n einmal oder öfter zu subtrahieren, bis eine Zahl herauskommt, die nicht grösser als n ist. Doch ergiebt sich auf solche Weise aus einer für $e = 1$ richtigen Zahl diejenige für $e = 2$ richtige Zahl, welche sich auf eine um 1 grössere Anzahl von Punkten, also auf $n + 1$ Punkte, bezieht. Z. B. ist für $d = 3$, $e = 1$, $n = 3$ die gesuchte Zahl x auch gleich 3. Aus $x = 3$ folgt nun die auf $d = 3$, $e = 2$, $n = 4$ richtige Zahl, indem man d, also hier 3, hinzufügt. Dies giebt 6.

Da aber 6 grösser als 4 ist, so soll man 4 abziehen, wodurch man die Zahl 2 erhält. Dies heisst, dass, wenn man bei vier Punkten immer von 1 bis 3 zählt, die als zweite ausgestrichene Zahl ursprünglich die zweite Stelle einnahm, was man auch leicht durch den Versuch erkennt. Mathematisch lässt sich das vom Verfasser gefundene Gesetz, das die Zahlen für $n + 1$ und $e + 1$ auf die Zahlen für n und e zurückführt, in folgender Weise aussprechen. Das Funktionszeichen f bezeichne die Abhängigkeit der Zahl x von den Zahlen n, d, e. Ferner bezeichne $a \equiv r \pmod{n}$, dass wenn a durch n dividiert wird, der Rest r bleibt, wo r eine der Zahlen von 1 bis n sein muss. Dann lautet unser Gesetz:

$$d + f(n, d, e) \equiv f(n + 1, d, e + 1) \pmod{n}.$$

Als Beispiel folgen hier alle Zahlen x für $d = 3$, $d = 4$ und $d = 9$ tabellarisch zusammengestellt. Da man immer nur d zu addieren hat und die Summe entweder gar nicht oder um n, oder um 2n u. s. w. zu vermindern hat, so kann man solche Tabellen, ohne Nebenrechnung aus dem Kopfe entwickeln. Die aufeinanderfolgenden Kolumnen beziehen sich auf die Werte von e, die Zeilen auf die Werte von n. Die Addition von d erfolgt in den schrägen Reihen von oben links nach unten rechts. Bei diesen Tabellen beachte man den wichtigen Umstand, dass immer die n Zahlen, die in derselben Zeile mit n stehen, alle Zahlen von 1 bis n umfassen müssen, so dass nie eine solche horizontale Reihe dieselbe Zahl zweimal zeigen kann. Hierdurch ist eine wichtige Kontrolle bei der allmählichen Berechnung der Tabelle gegeben.

Erste Tabelle:

d = 3.

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.
1	1												.
2	1	2											.
3	3	1	2										.
4	3	2	4	1									.
5	3	1	5	2	4								.
6	3	6	4	2	5	1							.
7	3	6	2	7	5	1	4						.
8	3	6	1	5	2	8	4	7					.
9	3	6	9	4	8	5	2	7	1				.
10	3	6	9	2	7	1	8	5	10	4			.
11	3	6	9	1	5	10	4	11	8	2	7		.
12	3	6	9	12	4	8	1	7	2	11	5	10	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Setzt man die dritte Tabelle bis n = 30 fort, so ergiebt die letzte Zeile die Lösung der ursprünglichen Form unseres Problems, bei der n = 30 und e eine der Zahlen 1 bis 15 ist. Man erkennt dann auch, in welcher Reihenfolge die 15 Türken über Bord geworfen werden. Bei Fortsetzung der Tabelle würden nämlich in die Zeile, die sich auf n = 30 bezieht, die folgenden Zahlen kommen:

Zweite Tabelle:

d = 4.

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.
1	1												.
2	2	1											.
3	1	3	2										.
4	4	1	3	2									.
5	4	3	5	2	1								.
6	4	2	1	3	6	5							.
7	4	1	6	5	7	3	2						.
8	4	8	5	2	1	3	7	6					.
9	4	8	3	9	6	5	7	2	1				.
10	4	8	2	7	3	10	9	1	6	5			.
11	4	8	1	6	11	7	3	2	5	10	9		.
12	4	8	12	5	10	3	11	7	6	9	2	1	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23, 11, 29, 17, 10, 2, 28, 25, 1, 4, 15, 13, 14, 3, 20, 21.

Die dritte Tabelle löst alle Fragen, die sich auf d = 9 beziehen. Wenn z. B. in einer Klasse von 14 Schülern derjenige, der irgend ein Amt übernehmen soll, dadurch bestimmt wird, das immer der jedesmalige Neunte ausscheidet und der zuletzt übrig

Dritte Tabelle:

$d = 9.$

n	e = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	.
1	1																	.
2	1	2																.
3	3	1	2															.
4	1	4	2	3														.
5	4	5	3	1	2													.
6	3	1	2	6	4	5												.
7	2	5	3	4	1	6	7											.
8	1	3	6	4	5	2	7	8										.
9	9	1	3	6	4	5	2	7	8									.
10	9	8	10	2	5	3	4	1	6	7								.
11	9	7	6	8	11	3	1	2	10	4	5							.
12	9	6	4	3	5	8	12	10	11	7	1	2						.
13	9	5	2	13	12	1	4	8	6	7	3	10	11					.
14	9	4	14	11	8	7	10	13	3	1	2	12	5	6				.
15	9	3	13	8	5	2	1	4	7	12	10	11	6	14	15			.
16	9	2	12	6	1	14	11	10	13	16	5	3	4	15	7	8		.
17	9	1	11	4	15	10	6	3	2	5	8	14	12	13	7	16	17	.

bleibende Schüler das Amt bekommt, so kann man ersehen, dass es der 6te der Klasse ist, weil die Tabelle für $n = 14$, $e = 14$ die Zahl 6 liefert.

Die bisher auseinandergesetzte Methode, um bei gegebenen Zahlen d, n, e das zugehörige x zu finden, verlangt, dass man erst die Zahlen x für alle Werte, die kleiner als n sind, berechnet, ehe man die auf n selbst bezüglichen x erkennen kann. Es fragt sich nun, ob nicht die Mathematik Mittel liefert, um direkt aus den gegebenen Zahlen d, n, e das zugehörige $x = f(n, d, e)$ zu finden. Dies ist in der That möglich. Um die Lösung des Problems der direkten Ermittelung der Zahl x aus n, d, e verständlich zu machen, müssen wir einige Erklärungen vorangehen lassen. Eine geometrische Reihe ist bekanntlich eine Reihe von Zahlen, bei denen jede folgende aus der unmittelbar vorhergehenden entsteht, indem man diese mit einer und derselben Zahl, dem **konstanten Quotienten** der Reihe, multipliziert. So ist

$$1, 2, 4, 8, 16, 32$$

eine geometrische Reihe, deren Anfangsglied 1 und deren konstanter Quotient 2 ist. So ist ferner

$$16, 20, 25, 31\tfrac{1}{4}, 39\tfrac{1}{16}$$

eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied 16 und dem konstanten Quotienten $\frac{5}{4}$. Ist der konstante Quotient keine ganze Zahl, sondern ein Bruch, so müssen auch die Glieder der Reihe entweder sofort oder später gebrochene Zahlen werden, gleichviel wie das Anfangsglied heisse. Wenn man nun in diesem Falle, sobald ein Bruch entsteht, immer die **nächst grössere ganze** Zahl dafür setzt, und dann auch diese ganze Zahl mit dem konstanten Quotienten multipliziert, um das nächste Glied zu erhalten, so bekommt man eine Reihe von lauter ganzen Zahlen, die natürlich nicht mehr eine genaue geometrische Reihe darstellt, und die wir eine **ganzzahlige Reihe** nennen wollen. Um diese Erklärung zu verdeutlichen, folgen hier einige ganzzahlige Reihen, bei denen immer das Anfangsglied a und der konstante Quotient q genannt ist:

1. $a = 1, q = \frac{4}{3}$ giebt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 15, 20, 27, . .

2. $a = 10, q = \frac{11}{10}$ giebt: 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 27, . .

3. $a = 25, q = \frac{6}{5}$ giebt: 25, 30, 36, 44, 53, 64, 77, 93, . .

Nach Feststellung des Begriffs der ganzzahligen Reihe lässt sich das Resultat des Verfassers bezüglich einer direkteren Ermittelung des Wertes von $x = f(n, d, e)$ aus gegebenen Werten von a, n, d, e darstellen, wie folgt:

„Man subtrahiere e von n, multipliziere die Differenz mit d und addiere dann 1. Die so erhaltene Zahl nehme man als Anfangsglied einer ganzzahligen Reihe, als deren Quotient man $\frac{d}{d-1}$ zu nehmen hat. Dann bestimme man in dieser Reihe das grösste von allen Gliedern, die noch nicht grösser als d mal n sind. Der um 1 vermehrte Unterschied zwischen dem so bestimmten Gliede und dem eben genannten Produkte ist stets die genaue Platznummer x." Hierzu die folgenden Beispiele:

1. $d = 3, n = 14, e = 13$. Man hat also 14 Punkte, zählt immer bis 3 und fragt, welcher Punkt als vorletzter ausgestrichen wird. Das Anfangsglied ist $d(n - e) + 1 = 3.(14 - 13) + 1 = 4$. Der konstante

Quotient ist $\frac{d}{d-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$, das Produkt d . n, das grösser sein muss, als das zu wählende Glied der ganzzahligen Reihe, ist $3 . 14 = 42$. Die Reihe beginnt also mit 4, 6, . . . und ist fortzusetzen, bis 42 überschritten wird, also:

4, 6, 9, 14, 21, 32, 48.

Da 48 schon grösser als 42 ist, so ist 32 das grösste Glied, das d.n nicht überschreitet. Nun ist zu rechnen $n - 32 + 1 = 42 - 32 + 1 = 11$. Also scheidet der 11. Punkt als vorletzter aus. Dies ergiebt sich auch aus der ersten unsrer drei Tabellen, wenn wir dort die schräge Reihe der vorletzten Zahlen fortsetzen. Dort steht 5 für $n = 12$, $d = 11$, also kommt 8 für $n = 13$, $d = 12$ und 11 für $n = 14$, $d = 13$, wodurch unsere Berechnung bestätigt wird.

2. $d = 10$, $n = 8$, $e = 8$. Man hat also in einer Kreis-Peripherie 8 Punkte, zählt von einem Anfangspunkt aus immer bis 10, streicht den bei 10 erreichten Punkt aus, und fährt fort, bis alle Punkte ausgestrichen sind, indem man immer die schon ausgestrichenen Punkte nicht mitzählt. Es wird gefragt, der wievielte von den 8 Punkten zuletzt ausgestrichen wird. Das Anfangsglied $d(n - e) + 1$ ist hier 1, der konstante Quotient $\frac{d}{d-1} = \frac{10}{9}$. Man kann die Reihe hier sofort mit 9, 10 beginnen, da die voraufgehenden Glieder ja kleiner als 9 sein müssen. So erhalten wir:

9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 37, 42, 47, 53, 59, 66, 74, 83, . . .

Nun ist $d.n = 80$. Also ist 74 zu wählen. $80 - 74 + 1 = 7$. Also wird der 7. Punkt zuletzt ausgestrichen.

3. Welchen Platz hatte der Türke, der, gemäss der ursprünglichen Fassung des Problems, zuletzt über Bord geworfen wurde. Hier ist $d = 9$, $n = 30$, $e = 15$. Das Anfangsglied $d\,(n-e)+1$ ist $9.15+1$ oder 136, der konstante Quotient ist $\frac{9}{8}$, das Produkt, bis zu welchem die Reihe fortzusetzen ist, 270. Also:

136, 153, 173, 195, 220, 248, 279.

Daher ist 248 zu wählen und $270-248+1=23$ zu rechnen. Folglich hatte der letzte über Bord geworfene Türke den 23. Platz, was mit der oben für $d = 9$ und $n = 30$ angegebenen Zahlenreihe in Einklang ist.

4. Es sei die oben erwähnte im Rätselschatz von Freund mit No. 269 bezeichnete Aufgabe zu lösen, bei welcher $n = 32$, $d = 10$ und e jede der Zahlen 1 bis 16 ist. Bezeichnet man die Werte von x, die für $e = 1$, 2, 3, . . . 16 herauskommen, mit x_1, x_2, . . . x_{16}, so hat man, um x_1, x_2, . . . x_{16} zu finden, ganzzahlige Reihen aufzustellen, deren konstanter Quotient übereinstimmend $\frac{10}{9}$ beträgt und deren Anfangsglieder die Zahlen

311, 301, 291, 281, . . . 161

sind. Das massgebende Produkt, das von den gewählten Gliedern der Reihe nicht überschritten werden darf, ist 320. Also ist $x_1 = 1 + 320 - 311 = 10$,

$x_2 = 1 + 320 - 301 = 20$, $x_3 = 1 + 320 - 291 = 30$, was auch unmittelbar ersichtlich ist. Um x_4 bis x_{16} zu finden, haben wir die folgenden ganzzahligen Reihen zu betrachten. Zieht man die letzte Zahl dieser Reihen immer von $1 + 320$ ab, so erhält man die Werte von x_4 bis x_{16}.

281, 313	$x_4 = 321 - 313 = 8$
271, 302	$x_5 = 321 - 302 = 19$
261, 290	$x_6 = 321 - 290 = 31$
251, 279, 310	$x_7 = 321 - 310 = 11$
241, 268, 298	$x_8 = 321 - 298 = 23$
231, 257, 286, 318.	$x_9 = 321 - 318 = 3$
221, 246, 274, 305.	$x_{10} = 321 - 305 = 16$
211, 235, 262, 292.	$x_{11} = 321 - 292 = 29$
201, 224, 249, 277, 308	$x_{12} = 321 - 308 = 13$
191, 213, 237, 264, 294	$x_{13} = 321 - 294 = 27$
181, 202, 225, 250, 278, 309 . . .	$x_{14} = 321 - 309 = 12$
171, 190, 212, 236, 263, 293 . . .	$x_{15} = 321 - 293 = 28$
161, 179, 199, 222, 247, 275, 306 .	$x_{16} = 321 - 306 = 15$

Hierdurch ergiebt sich die Stellung der Weissen und der Neger zu einander aus dem folgenden Schema, wo w bezw. n bedeutet, dass den Platz ein Weisser, bezw. ein Neger einzunehmen hat:

w w n w w w w n w n n n n w n n
w w n n w w n w w w n n n n n w.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass, wenn $d = 2$ ist, der konstante Quotient der Reihe $\frac{2}{1} = 2$ wird, sodass eine *wirkliche* geometrische Reihe entsteht, wodurch die Berechnung des Gliedes dieser Reihe, um das $2n + 1$ vermindert werden muss, sehr erleichtert wird. Ist ausser $d=2$, auch $e=n$, so hat man einfach $2n+1$ um die nächst niedere Potenz von zwei zu vermindern. Sind z. B. 100 Personen abzuzählen, indem man immer nur bis 2 zählt, so ergiebt sich die Platznummer desjenigen, der zuletzt allein übrig bleibt, wenn man 201 um die nächst niedere Potenz von 2, also um 128 vermindert. So erhält man, dass der 73te zuletzt übrig bleibt.

Meine obige Lösung des verallgemeinerten Abzähl-Problems veröffentlichte ich auch in den „Mitteilungen der Hamburgischen Mathematischen Gesellschaft". Nachdem sofort Herr E. Busche in Bergedorf einen Beweis des der Lösung zugrunde liegenden zahlentheoretischen Satzes in denselben „Mitteilungen" gegeben hatte, sind noch zwei weitere Abhandlungen über denselben Gegenstand erschienen, nämlich:

1. Ahrens, Über einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert in Schloemilchs Zeitschr., Bd. 40;
2. E. Busche, Über die Schubertsche Lösung eines Bachetschen Problems in den Math. Ann., Bd. 47.

§ 2.

Magische Quadrate.

A. Einleitendes.

Das erste magische Quadrat, das im christlichen Abendlande auftritt, befindet sich als Attribut auf dem „Melancholie“ genannten Holzschnitt von Albrecht Dürer. Dasselbe sieht so aus:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Diese Anordnung der 16 Zahlen von 1 bis 16 hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sich stets dieselbe Summe 34 ergiebt, gleichviel ob man die vier Zahlen addiert, die in jeder der vier horizontalen Reihen stehen oder die vier Zahlen addiert, die in jeder der vier vertikalen Reihen stehen oder endlich die vier Zahlen addiert, die in jeder der beiden diagonalen Reihen stehen. Überhaupt nennt man **magisches Quadrat** ein Quadrat mit n mal n quadratischen Feldern, in denen n mal n aufeinanderfolgende Zahlen, meist die Zahlen von 1 bis n mal n, derartig angeordnet sind, dass die Summe von n Zahlen immer dieselbe ist, gleichviel, ob diese n Zahlen in einer horizontalen, einer vertikalen oder einer diagonalen Reihe zusammenstehen. Wahrscheinlich ist diese auf eine schachbrettartige Figur bezügliche Anordnungs-Aufgabe, sowie das Schachspiel selbst, indischen Ursprungs. Jedenfalls finden wir die Aufgabe bei den Arabern sehr verbreitet, die sie vermutlich von den Indern erhalten haben. Von den Arabern gelangten die magischen Quadrate dann zu den Oströmern. Endlich haben sich seit Albrecht Dürer auch die westeuropäischen Gelehrten mit den Methoden zur Herstellung solcher Quadrate beschäftigt. Das älteste und einfachste magische Quadrat besteht in der quadratischen Anordnung der neun Zahlen 1 bis 9, so dass die Summe in jeder horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihe stets dieselbe, nämlich 15, wird. Dieses Quadrat sieht so aus:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

In der That ist $6 + 1 + 8 = 7 + 5 + 3 = 2 + 9 + 4 = 6 + 7 + 2 = 1 + 5 + 9 = 8 + 3 + 4 = 6 + 5 + 4 = 8 + 5 + 2 = 15$. Man erkennt mathematisch leicht, dass alle magischen Quadrate der Zahlen von 1 bis 9 die Zahl 5 in der Mitte und die geraden Zahlen in den vier Ecken haben müssen, so dass nur 8 solcher magischen Quadrate möglich sind, die jedoch alle aus einem von ihnen hervorgehen, wenn man dasselbe auf alle mögliche Weise dreht und umkippt. Aus dem Dürerschen Quadrate der Zahlen von 1 bis 16 lassen sich noch viele andere magische Quadrate durch methodische Umstellungen ableiten. Auf einfachste Weise bildet man ein magisches Quadrat der Zahlen von 1 bis 16, indem man sich diese Zahlen zunächst in natürlicher Reihenfolge einschreibt, also so:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

und indem man dann die Zahlen in den vier Eckfeldern, also 1, 4, 13, 16, und die Zahlen in den vier Mittelfeldern, also 6, 7, 10, 11 stehen lässt, statt jeder der übrigen Zahlen aber die Zahl schreibt, die man erhält, wenn man sie von 17 subtrahiert, also 15 statt 2, 14 statt 3, 12 statt 5, 9 statt 8, 8 statt 9, 5 statt 12, 3 statt 14, 2 statt 15. So erhält man das folgende magische Quadrat:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Hier erscheint überall die Summe 34 sowohl aus den horizontalen als auch aus den vertikalen und diagonalen Reihen. Dazu kommt noch die besondere Eigenschaft, dass auch immer vier Zahlen, die um die Mitte herum ein Quadrat oder ein Rechteck bilden, die Summe 34 liefern, z. B. 1, 4, 13, 16 sowie 15, 14, 3, 2, sowie 12, 9, 8, 5, sowie 6, 7, 10, 11 oder auch 15, 9, 2, 8 und 14, 12, 3, 5. Dieses Quadrat entsteht aus dem Dürerschen, wenn man die beiden mittleren Vertikalreihen mit einander vertauscht.

B. Ältere Bildungsarten für ungerade Felderzahl.

Schon seit alter Zeit kennt man Vorschriften, um magische Quadrate auch von mehr als dreimal drei oder vier mal vier Feldern zu bilden. Zunächst lässt sich leicht die Summe berechnen, die sich bei einer gegebenen Felderzahl aus jeder Reihe ergeben muss. Sollen die Zahlen von 1 bis n^2 ein magisches Quadrat bilden und ist x die konstante Summe jeder Reihe, so muss $x \cdot n$ die Summe aller Zahlen von 1 bis n^2 sein. Nun findet man aber bekanntlich die Summe aller Zahlen von 1 bis m, indem man m mit der nächstfolgenden Zahl $m + 1$ multipliziert und vom Produkte die Hälfte nimmt. Also ist $x \cdot n = \frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$ oder

$$x = \tfrac{1}{2} n (n^2 + 1),$$

woraus sich $x = 15$ ergiebt, wenn $n = 3$ ist; $x = 34$, wenn $n = 4$; $x = 65$, wenn $n = 5$; $x = 111$, wenn $n = 6$; $x = 175$, wenn $n = 7$; $x = 260$, wenn $n = 8$; $x = 369$, wenn $n = 9$; $x = 505$, wenn $n = 10$; $x = 671$, wenn $n = 11$ ist, u. s. w.

Die als indisch überlieferte Vorschrift für die Herstellung magischer Quadrate mit ungerader Felderzahl in jeder Reihe, lässt sich folgendermassen aussprechen:

„Man schreibe 1 in die Mitte der obersten Reihe, dann 2 als unterste Zahl der rechts daneben befindlichen Vertikalreihe und schreibe dann die weiteren Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge diagonal nach rechts oben so ein, dass man nach Erreichung des rechten Randes, am linken Rande in der darüber befindlichen Reihe fortfährt, und nach Erreichung des oberen Randes am unteren Rande in der rechts daneben befindlichen Reihe die Zählung weiterführt, wobei nur noch zu beachten ist, dass man, wenn man auf ein schon besetztes Feld stösst, statt dessen das Feld ausfüllt, das unter dem zuletzt ausgefüllten sich befindet. Auf diese Weise ist z. B. das folgende magische Quadrat der Zahlen von 1 bis 7 mal 7 gebildet, indem man überall die Summe 175 erkennt.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Eine weitere Förderung der Theorie der magischen Quadrate und der Methoden zu ihrer Herstellung verdanken wir dem Byzantiner Moschopulos im 14. Jahrhundert, ferner noch dem berühmten Rechenmeister Adam Riese und dem Mathematiker Michael Stifel, die beide in der Mitte des 16. Jahrhunderts lebten. Im 17. Jahrhundert beschäftigten sich mit den magischen Quadraten Bachet de Méziriac und Athanasius Kircher. Um 1700 endlich wurde die Theorie derselben durch