de Gruyter Lehrbuch

Hornfeck · Lucht · Mathematik

Einführung in die Mathematik

von

Dr. Bernhard Hornfeck
o. Professor an der TU Clausthal

Dr. Lutz Lucht
Assistent an der TU Clausthal

Walter de Gruyter & Co · Berlin 1970

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

 Archiv-Nr. 12 44 70 1 – Satz: IBM-Composer, Walter de Gruyter & Co. – Druck: J. Schönwald KG, Berlin – Printed in Germany

Vorwort

Dieses Buch gibt den Inhalt einer Vorlesung wieder, die seit einiger Zeit in jedem Semester an der Technischen Universität Clausthal gehalten wird. Es wird der Versuch unternommen, zwischen der Schulmathematik und den Grundvorlesungen der ersten Semester eine Brücke zu schlagen, die den Beginn des Studiums der Mathematik als Haupt- oder Nebenfach erleichtert.

Diesem Konzept ist die Stoffauswahl angepaßt. Grundlegende mathematische Sätze und Techniken werden mit ihren Anwendungen ausführlich besprochen. Es handelt sich dabei vielfach um Dinge, die in den anderen mathematischen Vorlesungen zwar ständig gebraucht, aus Zeitmangel aber dort nicht vertieft werden können. Dies betrifft in der Regel Studierende der Mathematik ebenso wie Naturwissenschaftler, die Mathematik als Nebenfach haben.

So wendet sich das vorliegende Buch zunächst an die Studienanfänger. Es kann aber auch von angehenden Abiturienten benutzt werden, die sich auf ihr Studium vorbereiten wollen. Damit sich der Text zum Selbststudium eignet, sind Aufgaben eingefügt und ihre Lösungen am Schluß zusammengestellt.

Wir danken Frau Almut Hornfeck für die Reinschrift des Manuskripts und dem Verlag für die Herausgabe unseres Buches.

B. Hornfeck
L. Lucht

Inhaltsverzeichnis

§1 Grundlagen

(1.1) Zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte bedarf es einer Sprechweise, die die Ungenauigkeiten der normalen Umgangssprache vermeidet. Wir werden also genau darzulegen haben, was wir unter gewissen Begriffen verstehen wollen. Die Notwendigkeit solcher Vereinbarungen zeigt etwa der umgangssprachliche Gebrauch des Wortes „oder". In der deutschen Sprache wird es sowohl in der Bedeutung verwendet, daß genau eine von zwei Möglichkeiten im Sinne des lateinischen aut. . .aut zutrifft, als auch, daß mindestens eine von zwei Möglichkeiten im Sinne des lateinischen vel zutrifft. Mehrdeutigkeiten dieser Art können wir uns nicht leisten; wir werden „oder" stets in der letztgenannten Bedeutung benutzen.

Verabredungen mathematischer Vokabeln bezeichnen wir als *Definitionen.* Jedes sinnvolle sprachliche Gebilde, das entweder falsch oder wahr ist, nennen wir eine Aussage und eine wahre mathematische Aussage einen *Satz.* Um die Richtigkeit einer Aussage festzustellen, bedarf es eines Beweises. Wir sagen von einem Satz, er sei bewiesen, wenn er durch logische Schlüsse auf bereits bekannte Sätze zurückgeführt ist. Offenbar können wir diesen Prozeß nicht unbegrenzt fortsetzen. Deshalb ist es erforderlich, zu Beginn einer mathematischen Theorie ein System von Aussagen als wahr anzunehmen. Solche Aussagen bezeichnen wir als *Axiome.* Axiome gehen als ziemlich willkürliche Setzungen in die Mathematik ein. Sie sind nur dann mathematisch brauchbar, wenn sie widerspruchsfrei sind, das heißt, es darf nicht möglich sein, aus einem vorgelegten Axiomensystem einen Satz und zugleich sein Gegenteil abzuleiten. Solche Untersuchungen sowie die Präzisierung dessen, was wir zum Beispiel in den Begriffen „wahr", „falsch", „logisches Schließen" als intuitiv bekannt vorausgesetzt haben, sind Aufgaben der mathematischen Logik. Wir gehen darauf nicht weiter ein.

(1.2) Mathematische Sätze werden uns in verschiedenen Aussageformen begegnen. Zu ihrem Verständnis ist es daher unumgänglich, die Formulierungsmöglichkeiten zu kennen. Sie alle beruhen nur auf dem exakten Gebrauch der deutschen Sprache.

Sind A und B beliebige Aussagen, so bedeutet $A \Rightarrow B$ die Aussage „wenn A, so B"; wir sagen dafür auch

$A \Rightarrow B$	wenn A, so B,
	aus A folgt B,
	A ist hinreichend für B,
	B ist notwendig für A,
	A nur wenn B,
	B wenn A.

Wir nennen A die Voraussetzung, B die Behauptung der *Implikation* $A \Rightarrow B$. $A \Rightarrow B$ besagt lediglich, daß jedesmal, wenn A wahr ist, auch B wahr ist. Insbesondere wird in dem Fall, in dem A falsch ist, überhaupt nichts ausgesagt. Es brauchen also weder A noch B wahr zu sein. Anstelle von $A \Rightarrow B$ schreibt man mitunter auch $B \Leftarrow A$; beides bedeutet dasselbe. Ist zum Beispiel A die Aussage $x = 1$, B die Aussage $x^2 = 1$, so gilt $A \Rightarrow B$. Hier ist $A \Leftarrow B$ nicht wahr, denn $x^2 = 1$ besitzt neben $x = 1$ noch die Lösung $x = -1$.

Entsprechend bedeutet $A \Leftrightarrow B$, daß sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $A \Leftarrow B$ gelten. Wir können das auch so ausdrücken:

$A \Leftrightarrow B$	notwendig und hinreichend für A ist B,
	B gilt dann und nur dann, wenn A gilt,
	B gilt genau dann, wenn A gilt,
	B ist gleichwertig mit A.

Aussagen dieser Art sind mathematisch besonders bequem, denn sie gestatten den Austausch der Aussage A gegen B oder umgekehrt. In unserem obigen Beispiel ist, wie schon festgestellt, $A \Leftrightarrow B$ nicht wahr.

Ist A eine Aussage, so erhalten wir durch *Negation* die neue Aussage $\bar{A}$, das heißt „nicht A". Auf Grund unseres Sprachgebrauches ist klar, daß $\bar{A}$ jedesmal dann wahr sein soll, wenn A falsch ist, und daß $\bar{A}$ jedesmal dann falsch sein soll, wenn A wahr ist. Genau eine der beiden Aussagen A, $\bar{A}$ ist also wahr. Es sei erwähnt, daß es eine kleine Gruppe von Mathematikern gibt, die nicht von der Richtigkeit dieser Alternative ausgehen. Die von ihnen vertretene Richtung der Mathematik heißt Intuitionismus.

Wir betrachten nun eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ mit dem Ziel, sie gleichwertig zu kennzeichnen. Wenigstens eine der beiden weiteren Aussagen $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, $\bar{B} \Rightarrow A$ ist wahr. $\bar{B} \Rightarrow A$, $A \Rightarrow B$ können aber nicht zugleich wahr sein, denn die Aussage „$\bar{B}$ und B" ist stets falsch. Daher gilt $[A \Rightarrow B] \Rightarrow [\bar{B} \Rightarrow \bar{A}]$, und die Anwendung dieser Implikation auf die Aussage $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ liefert weiter $[\bar{B} \Rightarrow \bar{A}] \Rightarrow [A \Rightarrow B]$, insgesamt

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\bar{B} \Rightarrow \bar{A}].$$

Die Aussagen $A \Rightarrow B$, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ sind also gleichwertig. Dies ist das wichtige Schema des *indirekten Beweises*: Wollen wir nachweisen, daß B aus A folgt, so dürfen wir stattdessen $\bar{A}$ aus $\bar{B}$ folgern. Mitunter ist das einfacher.

(1.3) Unter einer *Menge* verstehen wir die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen auch Elemente der Menge. Wir schreiben $m \in M$, wenn m ein Element der Menge M ist, und sagen auch, m liegt in M oder m gehört zu M. Andernfalls schreiben wir $m \notin M$. Wir geben eine Menge M explizit an, indem wir ihre Elemente in geschweiften Klammern aufzählen oder deren Gesamtheit durch Eigenschaften beschreiben. Beispielsweise enthält $M = \{1, 2, 3\}$ die Elemente 1, 2, 3; $N = \{(x, y) : x, y \text{ reell}, x^2 + y^2 = 1\}$ ist die Menge aller Punkte (x, y) des Einheitskreises. Auf die Reihenfolge, in der die Elemente aufgeführt werden, kommt es nicht an. Enthält eine Menge überhaupt keine Elemente, so heißt sie leer. Wir bezeichnen die leere Menge mit $\mathbf{L}$; üblicher ist allerdings $\emptyset$ oder einfach O. Auch für einige andere Mengen, die wiederholt auftreten werden, wählen wir feste Bezeichnungen: Es seien

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$ die Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen, aufgefaßt als Dezimalbrüche.

Diese Mengen sowie das Rechnen in ihnen setzen wir als bekannt voraus.

Die Anzahl der Elemente einer Menge M sei $|M|$. Bei unendlichen Mengen schreiben wir $|M| = \infty$; sonst ist $|M|$ eine nichtnegative ganze Zahl und speziell $|\mathbf{L}| = 0$.

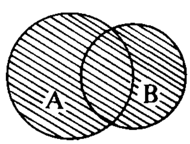
Ist jedes Element der Menge A auch Element der Menge B, so heißt A *Teilmenge* von B, in Zeichen: $A \subset B$. Wir sagen auch, A ist in B enthalten oder B umfaßt A. Für jede Menge M gilt speziell $M \subset M$ und $\mathbf{L} \subset M$. Zwei Mengen heißen einander gleich, wenn sie aus denselben Elementen bestehen:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } B \subset A.$$

Wollen wir ausdrücken, daß $A \subset B$, aber $A \neq B$ gilt, so sagen wir, A ist *echte Teilmenge* von B.

Unter der *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A, B verstehen wir die Menge aller Elemente aus wenigstens einer der Mengen A oder B:

$$A \cup B =_{\mathrm{Df}} \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

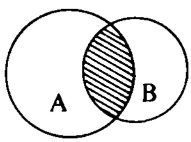


$A \cup B$ ist schraffiert dargestellt.

Durch das Zeichen „$=_{\mathrm{Df}}$" (lies: definitionsgleich) weisen wir darauf hin, daß die linke Seite nur eine andere Bezeichnung für die rechte ist oder umgekehrt.

Den *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A, B definieren wir durch

$$A \cap B =_{\mathrm{Df}} \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$



$A \cap B$ ist schraffiert dargestellt.

Gilt $A \cap B = \mathsf{L}$, so heißen A, B *elementefremd* oder *disjunkt*.

Zur Bestätigung der folgenden Rechenregeln zeigt man jeweils die elementweise Übereinstimmung der Mengen beiderseits des Gleichheitszeichens. Das ist eine Sache des exakten Umganges mit „und", „oder".

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\} \text{Assoziativgesetze}$$

$$(2) \quad \left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\} \text{Kommutativgesetze}$$

$$(3) \quad \left.\begin{array}{l} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\} \text{Absorptionsgesetze}$$

$$(4) \quad \left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\} \text{Distributivgesetze}$$

Die Assoziativgesetze erlauben das klammerfreie Aufschreiben von Vereinigung bzw. Durchschnitt beliebig vieler Mengen. Wir setzen abkürzend

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu$$

und lassen durch $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ auch die Vereinigungs- bzw. Durchschnittsbildung unendlich vieler Mengen zu.

Eine ganz andersgeartete Verknüpfung zweier Mengen A, B ist das *cartesische Produkt* $A \times B$ (*R. Descartes,* 1596–1650):

$$A \times B =_{Df} \{(a, b): \ a \in A, \ b \in B\};$$

es besteht also aus allen Paaren (a, b), deren erste Komponente a aus A und deren zweite Komponente b aus B stammt; $(a, b) = (a', b')$ gilt genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$ ist. Entsprechend wird das cartesische Produkt mehrerer Mengen definiert. Anschaulich bedeutet $\mathbf{R}^2 =_{Df} \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ die Menge aller Punkte der Ebene.

(1.4) Eine Vorschrift f, die jedem Element a einer Menge A genau ein Element b einer Menge B als Bild zuordnet, heißt eine *Abbildung* (Funktion) von A in B. Wir schreiben $f: A \to B$ und bezeichnen das Bild $b \in B$ von $a \in A$ mit $b = f(a)$. Beispiele für Abbildungen sind

1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vermöge $f(x) = \sin x$ für jedes $x \in \mathbf{R}$,
2) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vermöge $f((x, y)) = x$ für jedes $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
3) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vermöge $f(x) = \operatorname{arctg} x$ für jedes $x \in \mathbf{R}$,
4) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vermöge $f(x) = x^3$ für jedes $x \in \mathbf{R}$.

Wie die Beispiele 1) und 3) zeigen, braucht zu vorgelegtem $b \in B$ kein $a \in A$ mit $b = f(a)$ zu existieren. Eine Abbildung $f: A \to B$, bei der jedes $b \in B$ als

Bild auftritt, heißt Surjektion, *surjektive Abbildung* oder *Abbildung* von A *auf* B. Die Abbildungen f aus den Beispielen 2) und 4) sind surjektiv. Gibt es zu vorgelegtem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, so muß es nicht eindeutig bestimmt sein; jedes a mit $f(a) = b$ heißt ein *Urbild* oder *Original* von b. Eine Abbildung $f\colon A \to B$, bei der jedes $b \in B$ höchstens einmal als Bild auftritt, für die also aus $f(a) = f(a')$ stets $a = a'$ folgt, heißt Injektion, *injektive Abbildung* oder *eineindeutige Abbildung* von A in B. Die Abbildungen f aus den Beispielen 3) und 4) sind injektiv, die anderen hingegen nicht. Eine eineindeutige Abbildung $f\colon A \to B$ von A auf B, also eine Abbildung, die sowohl surjektiv als auch injektiv ist. nennt man auch *bijektiv* oder *umkehrbar eindeutig.*

Es sei f eine Abbildung von A in B und $M \subset A$; dann heißt

$$f(M) =_{Df} \{f(x)\colon x \in M\}$$

das Bild der Menge M. Offenbar ist f genau dann surjektiv, wenn $f(A) = B$ ist. Ist $N \subset B$, so nennen wir

$$f^{-1}(N) =_{Df} \{x\colon x \in A, f(x) \in N\}$$

die Urbildmenge von N.

Dann und nur dann besitzt jedes $b \in B$ genau ein Urbild $a \in A$ mit $f(a) = b$, wenn f bijektiv ist:

$$a =_{Df} f^{-1}(b);$$

die so definierte Abbildung $f^{-1}\colon B \to A$ heißt die *Umkehrabbildung* von $f\colon A \to B$.

In naheliegender Weise nennen wir zwei Abbildungen $f_1\colon A \to B$, $f_2\colon A \to B$ einander gleich, in Zeichen: $f_1 = f_2$, wenn $f_1(a) = f_2(a)$ für jedes $a \in A$ gilt: Die Abbildungen f_1, f_2 haben auf jedes $a \in A$ die gleiche Wirkung.

(1.5)

Aufgabe 1: A und B seien Aussagen. Man beweise

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(A \text{ und } \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}].$$

Aufgabe 2: Man beweise die Gültigkeit der Distributivgesetze aus (1.3): Sind A, B, C Teilmengen einer Menge R, so gilt

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Aufgabe 3: A, B, C seien Teilmengen einer Menge R; dann gilt

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Beweis?

Aufgabe 4: A, B, C seien endliche Teilmengen einer Menge R. Man zeige

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

und leite daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her.