

**Arbeitsmethoden  
der modernen  
Naturwissenschaften**



# Einführung in die höhere Mathematik

und ihre Anwendungen

Ein Hilfsbuch für Chemiker  
Physiker und andere Naturwissenschaftler

Von

E. ASMUS

Dr. phil. habil., Dipl.-Ing.  
Professor an der Techn. Universität Berlin

3., verbesserte Auflage

Mit 184 Abbildungen im Text



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormalis G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung  
Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1959



Copyright 1952, 1959 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlags  
handlung, J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung, Georg Reimer, Kari J. Trübner, Veit &  
Comp., Berlin W 35. — Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der  
photomechanischen Wiedergabe, der Herstellung von Mikrofilmen und der Übersetzung  
vorbehalten. — Archiv-Nr. 52 8059 — Printed in Germany

Satz: Walter de Gruyter & Co., Berlin — Druck: Rotaprint A. G., Berlin

## VORWORT ZUR 1. AUFLAGE

Das Bändchen „Einführung in die höhere Mathematik und ihre Anwendungen“ der Buchreihe „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“ ist als Niederschlag einer Vorlesung entstanden, die ich seit einer Reihe von Jahren in Marburg für Naturwissenschaftler — vorwiegend Chemiker — gehalten habe und läßt im Aufbau wohl deutlich seinen Ursprung erkennen.

Das Buch verfolgt, genau wie die Vorlesung, aus der es sich entwickelt hat, mehrere Ziele.

Die Studierenden der Chemie haben in ihrer überwiegenden Mehrzahl mehr Interesse für Fragen der organischen und anorganischen als der physikalischen Chemie und verhalten sich fast ausnahmslos ablehnend abstrakt mathematischen Problemstellungen gegenüber. Sie sind daher auch fast nie dazu zu bewegen, ausdauernd eine rein mathematische Vorlesung zu besuchen, obgleich sie eines gewissen Mindestmaßes mathematischer Kenntnisse zum Studium des durch die Diplom-Prüfungsordnung für Chemiker vorgeschriebenen Faches der physikalischen Chemie unbedingt bedürfen. Als Folge der geringen Beschäftigung mit mathematischen Fragen ergibt sich oft ein mangelndes Verständnis der auf mathematischer Grundlage aufgebauten physikochemischen Vorlesungen und damit wiederum eine ungenügende Vertiefung in denjenigen Zweig der Chemie, auf dessen Erkenntnisse sich sowohl der Anorganiker als auch der Organiker heute bei ihrer Arbeit stützen müssen und es auch weitgehend tun.

Eine Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen muß daher für den Chemiker rechtzeitig in den ersten Studiensemestern geschehen und muß sehr behutsam vorgenommen werden. Eine gewisse fast episch anmutende Breite der Darstellung und mehrfach wiederholte Anwendung desselben mathematischen Gesetzes auf verschiedene physikalisch-chemische Probleme ist nach meiner Erfahrung empfehlens-

wertiger als eine knappe Abfassung des Inhaltes. Auch muß eine solche Einführung bewußt einen gewissen eng gezogenen Rahmen nicht überschreiten und stets von einer naturwissenschaftlichen, möglichst chemischen, Fragestellung ausgehen.

Das Buch will daher den Chemiker, noch ehe er physikochemische Vorlesungen gehört hat, auf die Beschäftigung mit mathematischen Fragen dadurch hinweisen, daß es chemische Probleme — die natürlich nur gestreift werden können — mathematisch so behandelt, daß sich die Möglichkeit bietet, zunächst die auf der Schule erworbenen mathematischen Kenntnisse anzuwenden und sie dann bis zu einem gewissen für den Chemiker unbedingt notwendigen Mindestmaße auszuweiten.

Ich bin mir dabei dessen vollauf bewußt, daß es sich nicht um eine in mathematischer Hinsicht erschöpfende Darstellung handeln kann, immerhin wird das Buch vielleicht ein gewisses Maß rechnerischer Fertigkeit dem Leser vermitteln und den interessierteren zum Besuch mathematischer Vorlesungen und zum Durcharbeiten rein mathematischer Bücher anregen können.

Durch die Behandlung vorwiegend physikochemischer Probleme versucht das Buch gleichzeitig den Chemiestudierenden schon in seinen ersten Studiensemestern in Berührung mit dem ihm zunächst fernerliegenden Zweige seiner Wissenschaft zu bringen und ihn für eine Beschäftigung mit seinen Fragenkomplexen zu gewinnen.

Daß auch der Physiker, der natürlich eine weit tiefer gehende mathematische Ausbildung, als es beim Chemiker der Fall ist, erhalten muß, unter denjenigen, für die das Buch bestimmt ist, im Buchtitel gesondert erwähnt ist, hat seinen besonderen Grund. Als Physiker, der sowohl auf der technischen Hochschule als auch auf der Universität studiert und als Assistent gearbeitet hat, weiß ich aus eigener Erfahrung, daß der Durchschnittsstudierende der Physik kein besonderes Interesse für chemische Fragen besitzt. Ja, er neigt sogar dazu, die Chemie als eine nicht exakte Probierrwissenschaft, deren ausschließliches Ziel es ist, Präparate nach bestimmten empirischen Vorschriften herzustellen, anzusehen. Zwischen dem Physiker und Chemiker besteht so ein gewisser Gegensatz, der unbedingt im Interesse der Wissenschaft und Praxis überbrückt werden muß. Gerade der Physiker sollte sich viel mehr der

Schwesterwissenschaft zur Verfügung stellen, denn er kann durch seine tiefergehenden mathematischen und physikalischen Kenntnisse befruchtend auf die Arbeit des Chemikers wirken und ihm vor allem in der Technik durch Hineintragen physikalischer Methoden in die chemischen Arbeiten helfen. Und so will das Buch den jungen Physiker für die Beschäftigung mit chemischen Problemen gewinnen, indem es ihm gewissermaßen im Vorbeigehen zeigt, daß die Chemie viele Probleme kennt, die auch für den Physiker interessant sein können.

Ungünstige Zeitumstände, der Tod des Herausgebers der Buchreihe und die zweimalige vollständige Vernichtung des fertigen Buchsatzes als Folge der Kriegseignisse haben das Erscheinen des schon vor Jahren fertiggestellten Buches lange Zeit verhindert. Ich habe dem Verlage W. de Gruyter & Co. dafür zu danken, daß er sich nicht entmutigen ließ, immer wieder von neuem das Herausbringen des Buches zu versuchen.

Mit Dankbarkeit gedenke ich des verstorbenen Herausgebers der Buchreihe „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“, Herrn Prof. Dr. A. Thiel, auf dessen Anregung ich dieses Buch schrieb und der mich in meinen Bestrebungen, die Studierenden der Chemie für die Beschäftigung mit Mathematik zu gewinnen, in jeder Weise unterstützt hat.

Herrn Dr. J. Reich danke ich für das Lesen einer Korrektur.

Den größten Dank schulde ich meiner lieben Frau, die mit nie ermüdendem Eifer mir bei der Niederschrift des Manuskriptes behilflich gewesen ist, unter den ungünstigsten Umständen mit mir zusammen sämtliche Korrekturen gelesen und mich in stilistischen Fragen bestens beraten hat.

Marburg, im März 1946.

E. Asmus

VORWORT ZUR 3. AUFLAGE

Seit dem Erscheinen der 1. Auflage ist eine Anzahl von Jahren vergangen. Wie nicht anders zu erwarten war, fanden die Kritiker des Buches, je nachdem, ob es sich um Praktiker oder Theoretiker, Chemiker oder Mathematiker handelte, entweder Worte des Lobes und der Anerkennung oder auch in Einzelfällen Ausdrücke der Ablehnung. Da man nicht alle Wünsche und Meinungen berücksichtigen kann und ich auch meine Ansichten über didaktische Fragen nicht geändert habe, hielt ich es für richtig, an der ursprünglichen Fassung des Buches festzuhalten. So gilt auch für die 3. Auflage das im Vorwort zur 1. Auflage Gesagte. Bis auf einige Verbesserungen und Ergänzungen hat sich am Inhalt und grundsätzlichen Aufbau des dargebotenen Stoffes nichts geändert.

Berlin, den 5. 10. 1958

E. Asmus

## INHALT

	Seite
<b>I. Teil. Funktionen einer Veränderlichen . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1. Abschnitt. Differentialrechnung . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1. Kapitel. Allgemeines über Funktionen und ihre Darstellung . . . . .</b>	<b>3</b>
1. Der Funktionsbegriff . . . . .	3
2. Darstellung von Funktionen . . . . .	5
<b>2. Kapitel. Die wichtigsten Funktionstypen . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>A. Potenzfunktionen . . . . .</b>	<b>21</b>
3. Die Konstante . . . . .	21
4. Die Proportionalität . . . . .	24
5. Die lineare Funktion . . . . .	28
6. Die Parabeln $y = x^n$ . . . . .	33
7. Der Begriff des Differentialquotienten . . . . .	34
8. Einige Differentiationsregeln . . . . .	42
9. Das Differential . . . . .	47
10. Umkehrfunktionen und Umkehrregel . . . . .	50
11. Die Funktionen vom Typus $y = \frac{1}{x^n}$ . . . . .	55
12. Die Kettenregel . . . . .	64
13. Extremwert- und Wendepunktsbestimmung . . . . .	71
14. Graphische Differentiation . . . . .	90
<b>B. Die Logarithmusfunktion . . . . .</b>	<b>92</b>
15. Darstellung u. Differentiation der Logarithmusfunktion	92
16. Logarithmische Papiere . . . . .	98
17. Der logarithmische Rechenschieber . . . . .	108
<b>C. Die Exponentialfunktion . . . . .</b>	<b>118</b>
18. Darstellung u. Differentiation der Exponentialfunktion	118
19. Produkt- und Quotientenregel . . . . .	123
20. Die negative Exponentialfunktion . . . . .	128

	Seite
21. Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x}}$ . . . . .	139
22. Die Funktionen $y = e^{-x^2}$ und $y = x^2 e^{-x^2}$ . . . . .	147
23. Die Hyperbelfunktionen . . . . .	156
<b>D. Die Kreisfunktionen . . . . .</b>	<b>160</b>
24. Darstellung und Differentiation der Kreisfunktionen	160
25. Zyklometrische Funktionen als Umkehrung der Kreis- funktionen . . . . .	165
<b>3. Kapitel. Näherungsverfahren zur Auflösung von Gleichungen . . . . .</b>	<b>167</b>
26. Das Newtonsche Näherungsverfahren . . . . .	171
27. Das Iterationsverfahren . . . . .	175
<b>4. Kapitel. Reihendarstellung von Funktionen . . . . .</b>	<b>179</b>
28. Der Begriff der Potenzreihe . . . . .	180
29. Die Mac Laurin-Reihe . . . . .	184
30. Die Taylor-Reihe . . . . .	186
31. Konvergenz und Divergenz von Reihen . . . . .	188
32. Das Rechnen mit Reihen . . . . .	189
33. Die binomische Reihe und das Rechnen mit kleinen Größen . . . . .	193
<b>5. Kapitel. Unbestimmte Ausdrücke . . . . .</b>	<b>199</b>
34. Begriff des unbestimmten Ausdrucks . . . . .	199
35. Auswertung unbestimmter Ausdrücke . . . . .	202
<b>2. Abschnitt. Integralrechnung . . . . .</b>	<b>209</b>
<b>1. Kapitel. Allgemeines über Differentialgleichungen und den Integralbegriff . . . . .</b>	<b>211</b>
36. Etwas über Differentialgleichungen . . . . .	211
37. Das unbestimmte Integral . . . . .	217
38. Das bestimmte Integral und sein Zusammenhang mit dem unbestimmten . . . . .	223
<b>2. Kapitel. Integrationsmethoden . . . . .</b>	<b>239</b>
39. Grundintegrale . . . . .	239
40. Die Substitutionsmethode . . . . .	254
41. Partielle Integration . . . . .	266
42. Integration durch Partialbruchzerlegung . . . . .	275
43. Näherungsweise Auswertung von Integralen . . . . .	281

Inhalt	XI
	Seite
<b>3. Kapitel. Graphische, numerische und mechanische Integralauswertung . . . . .</b>	<b>287</b>
44. Mechanische Methoden zur Auswertung bestimmter Integrale . . . . .	289
45. Numerische Näherungsmethoden zur Auswertung be- stimmter Integrale . . . . .	293
46. Ermittlung der Stammfunktion durch mechanische und numerische Methoden . . . . .	300
47. Ermittlung der Stammfunktion durch graphische Integration . . . . .	304
 <b>II. Teil. Funktionen zweier Veränderlichen . . . . .</b>	 <b>309</b>
<b>1. Kapitel. Darstellung von Funktionen zweier Ver-         änderlichen . . . . .</b>	 <b>311</b>
48. Analytische und tabellarische Darstellung . . . . .	311
49. Geometrische Darstellung im räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem . . . . .	315
50. Darstellung durch eine Netztafel . . . . .	321
51. Darstellung durch eine Fluchtlinientafel . . . . .	326
<b>2. Kapitel. Differentiation . . . . .</b>	 <b>341</b>
52. Partielle Differentiation und das totale Differential	341
53. Höhere partielle Differentialquotienten . . . . .	353
54. Ermittlung von Extremwerten . . . . .	356
55. Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	359
<b>3. Kapitel. Integration . . . . .</b>	 <b>365</b>
56. Das vollständige und das unvollständige Differential	365
57. Integration eines vollständigen Differentials . . . . .	370
58. Integration eines unvollständigen Differentials . . . . .	376
 <b>Anhang: Aufgaben . . . . .</b>	 <b>385</b>
Lösungen . . . . .	391
 <b>Namen- und Sachregister . . . . .</b>	 <b>401</b>



I. TEIL  
FUNKTIONEN  
EINER VERÄNDERLICHEN  
1. ABSCHNITT  
DIFFERENTIALRECHNUNG



## 1. KAPITEL

### Allgemeines über Funktionen und ihre Darstellung

#### 1. Der Funktionsbegriff

Bei seiner Arbeit findet der Naturwissenschaftler immer wieder, daß gewisse von ihm beobachtete Größen mit anderen zwangsläufig zusammenhängen. Untersucht er z. B. die Dichte des Wassers, so wird er feststellen, daß sie von der Temperatur abhängt. Ändert der Experimentierende die Temperatur des Wassers willkürlich ab, so wird sich auch dessen Dichte als Folge davon ändern.

Nicht immer ist es so. Vergeblich wird man z. B. nach einem Zusammenhang zwischen der Dichte des Wassers und der Luftfeuchtigkeit des Raumes, in dem die Versuche angestellt werden, suchen. Raumfeuchtigkeit und Dichte des Wassers sind miteinander nicht durch irgendeine Beziehung verknüpft.

Hängen nun zwei Größen nach irgendeinem Gesetz voneinander ab, so sagt man, es bestehe zwischen beiden ein funktioneller Zusammenhang oder auch, daß die eine Größe eine Funktion der anderen sei. In symbolischer Weise deutet man die Abhängigkeit der einen Größe von der anderen durch das Zeichen  $y = f(x)$  (gelesen:  $y$  ist eine Funktion von  $x$ ) an, wobei  $y$  die eine Größe, etwa die Dichte des Wassers,  $x$  die andere, also z. B. seine Temperatur, und  $f()$  die Beziehung zwischen beiden andeuten sollen. Durch dieses Symbol ist selbstverständlich noch nichts Quantitatives über diese Beziehung ausgesagt, es ist nur qualitativ angedeutet, daß überhaupt eine Beziehung besteht. Die Aufgabe des Naturwissenschaftlers ist es, dieses abstrakte und nichtsagende Symbol durch eine konkrete mathematische, in Zahlen auswertbare Gleichung zu ersetzen.

Während der Mathematiker mit Vorliebe seine beiden Veränderlichen oder Variablen, so nennt man die beiden Größen  $y$

und  $x$ , gern mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, tut es der Naturwissenschaftler in der Regel nicht; er pflegt gewöhnlich als abkürzende Bezeichnung seiner Größen die ersten Buchstaben ihres deutschen, lateinischen oder griechischen Namens zu verwenden oder einen Buchstaben, der sich durch historische Überlieferung eingebürgert hat. Die Beziehung zwischen Dichte und Temperatur würde er vielleicht als  $d = f(t)$  oder, wie es nach der Empfehlung des AEF. (Aussschuß für Einheiten und Formelgrößen) heute meistens geschieht, als  $\rho = f(t)$  schreiben. Einzelne Buchstaben werden nun in den verschiedenen Gebieten der Chemie und Physik immer wieder für dieselben Größen verwendet, und es ist erforderlich, sich diese Bezeichnungen zu merken.

Die Größen  $y$  und  $x$  nennt man, wie bereits erwähnt, die Veränderlichen oder Variablen und spricht von  $x$  als der unabhängigen und  $y$  als der abhängigen Variablen. Diese Bezeichnung kann leicht zu Irrtümern Anlaß geben insofern, als man vermuten könnte, beide Größen ständen zueinander im Verhältnis von Ursache ( $x$ ) und Wirkung ( $y$ ). Wohl ist bei unserem Beispiel die Dichteänderung des Wassers die Folge der Temperaturänderung; verfolgen wir jedoch die Dichte  $\rho$  einerseits und die Zähigkeit  $\eta$  des Wassers andererseits, so finden wir, daß auch zwischen diesen ein funktioneller Zusammenhang besteht,  $\eta = F(\rho)$ . Wir schreiben  $F$ , weil der Zusammenhang zwischen  $\eta$  und  $\rho$  ein anderer ist als zwischen  $\rho$  und  $t$ . Dieses Symbol bedeutet, daß mit einer Dichteänderung eine Zähigkeitsänderung verbunden ist. Das kommt aber nur daher, daß sowohl die Dichte als auch die Zähigkeit von der Temperatur abhängen. Wird also die Temperatur des Wassers geändert, so ändern sich  $\eta$  und  $\rho$  einzeln für sich nach bestimmten Gesetzen, und es besteht daher, gekoppelt über die gemeinsame Ursache, eine mathematische Beziehung zwischen der  $\eta$ - und  $\rho$ -Änderung. So ist es auch müßig, zu fragen, ob in diesem Falle  $\eta$  oder  $\rho$  die unabhängige Variable sei. Hängt  $\eta$  von  $\rho$  ab, so wird auch umgekehrt  $\rho$  von  $\eta$  abhängen. Ob die eine oder die andere Veränderliche als abhängig bezeichnet wird, hängt lediglich von der Schreib- oder Darstellungsweise des funktionellen Zusammenhanges ab.

Hängt eine Größe von einer einzigen anderen ab, so spricht man von der Funktion einer unabhängigen Veränderlichen.

Es ist aber auch durchaus möglich, ja, sogar die Regel, daß eine Größe von mehreren anderen gleichzeitig abhängt. So ist z. B. das Volumen eines Gases von drei Größen abhängig: der Temperatur — das Volumen nimmt mit wachsender Temperatur zu —, dem Druck — es nimmt ab bei wachsendem Druck —, und der Molzahl —, mit der zusammen es wächst. Man sagt in einem solchen Fall, das Volumen sei eine Funktion dreier unabhängigen Veränderlichen. Mit dieser Art von Funktionen werden wir uns erst im zweiten Teil des Buches befassen.

## 2. Darstellung von Funktionen

Es wurde bereits hervorgehoben, daß es u. a. das Ziel einer chemischen oder physikalischen Arbeit ist, den quantitativen zahlenmäßigen Zusammenhang zweier Größen zu ermitteln. Die Mathematik gibt uns nun die Hilfsmittel, diesen Zusammenhang in entsprechender Weise darzustellen und aus ihm Schlußfolgerungen verschiedener Art zu ziehen.

Welche Darstellungsarten stehen uns für eine Funktion zur Verfügung?

### Tabellarische Darstellung

Eine der einfachsten Darstellungsarten ist die tabellarische. In Tab. 1 werden so z. B. Dichte und Temperatur des Wassers in ihrer Abhängigkeit dargestellt. Außer der Angabe der Zahlenwerte muß in der Tabelle bei der Darstellung von Größen, die eine Dimension besitzen (benannte Zahlen), diese enthalten sein. In unserem Beispiel sind die Temperaturangaben in Celsiusgraden gemacht, die Dichteeinheit ist das Gramm im Milliliter.

Die Darstellung einer Funktion durch eine Tabelle ist äußerst unübersichtlich. Es ist nicht möglich, durch einen Blick auf diese die speziellen Eigen-

Tabelle 1

$t$ °C	$\rho$ g/ml
0,00	0,99987
1,00	0,99993
2,00	0,99997
3,00	0,99999
4,00	1,00000
5,00	0,99999
6,00	0,99997
7,00	0,99993
8,00	0,99988
9,00	0,99981
10,00	0,99973

schaften der Funktion zu erkennen. Wenn es sich aber um eine empirische Funktion handelt, also eine solche, deren Eigenschaften durch naturwissenschaftliche Versuche erst erforscht werden sollen, so wird in fast allen Fällen die Tabelle der Beobachtungswerte Ausgangspunkt aller weiteren mathematischen Überlegungen sein.

Die Tabelle enthält nur eine begrenzte Zahl von Wertepaaren. Das bedeutet jedoch z. B. nicht, daß das Wasser nur bei  $0^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  usw. eine Dichte besitzt, sondern, daß bei dem durch die Tabelle dargestellten Versuch nur für diese Temperaturen die Dichte bestimmt oder ausgerechnet wurde. Auch für alle Zwischentemperaturen besitzt das Wasser eine meßbare Dichte. Ein solches Verhalten zeigen jedoch nicht alle Funktionen.

### Graphische Darstellung

*Das rechtwinklige Koordinatensystem.* Wesentlich übersichtlicher als eine Tabelle ist die graphische Darstellung einer

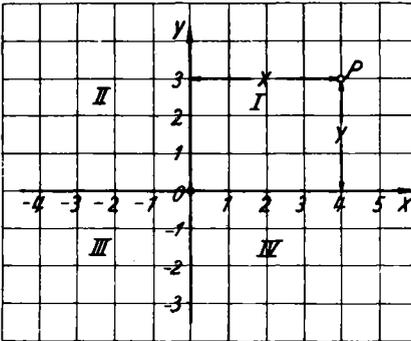


Fig. 1. Rechtwinkliges Koordinatensystem

Funktion. Am gebräuchlichsten ist dabei die Darstellung durch eine Kurve in einem Koordinatensystem, und von diesen ist wiederum ein rechtwinkliges oder kartesisches Koordinatensystem das weitaus übliche.

Zwei senkrecht zueinander gezeichnete Geraden, die sogenannten Koordinatenachsen, teilen die Zeichenebene in die vier Quadranten I, II, III und IV. Von ihrem Schnittpunkt, dem Koordinatenursprung  $O$  aus, werden auf den Achsen, der waagerechten Abszissenachse und der senkrechten Ordinatenachse, Teilungen angebracht, wie es die Fig. 1 zeigt.

Ein Punkt  $P$  wird in seiner Lage in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch Angabe seiner Abszisse ( $x$ -Koordinate)

und seiner Ordinate ( $y$ -Koordinate) bestimmt. So hat der gezeichnete Punkt die Koordinaten  $x = 4$  und  $y = 3$ . Der Punkt  $P$  repräsentiert damit ein Wertepaar. Liegt nun eine Funktion als Tabelle vor, so läßt sich diese Funktion durch eine Kurve derart darstellen, daß man die in der Tabelle zusammengehörenden Wertepaare durch Punkte in einem Koordinatensystem darstellt und dann diese Einzelpunkte durch eine glatte

Tabelle 2

$t$ °C	$p$ Torr
0,0	4,6
5,0	6,5
10,0	9,2
15,0	12,8
20,0	17,5
25,0	23,8
30,0	31,8
35,0	42,2
40,0	55,3

Kurve verbindet. So geschah es in Fig. 2 für die in Tab. 2 dargestellte Funktion „Sättigungsdampfdruck des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur“.

Wenn man die einzelnen Punkte, wie gezeichnet, miteinander verbindet, so drückt man damit stillschweigend aus, man nähme an, daß zwischen den gezeichneten (bei einem Versuch beobachteten) Punkten der Kurvenverlauf wirklich der dargestellte sei. Zu dieser Annahme muß man natürlich berechtigt sein.

So zeigt Fig. 3 den Verlauf der Strahlungsintensität als Funktion der Wellenlänge bei einer mit 35 kV betriebenen Röntgenröhre mit Molybdän-Antikathode. Hätte man nur die durch kleine Kreise gekennzeichneten Intensitätswerte gemessen, so würde man wahrscheinlich unbedenklich den gestrichelt gezeichneten Kurven-

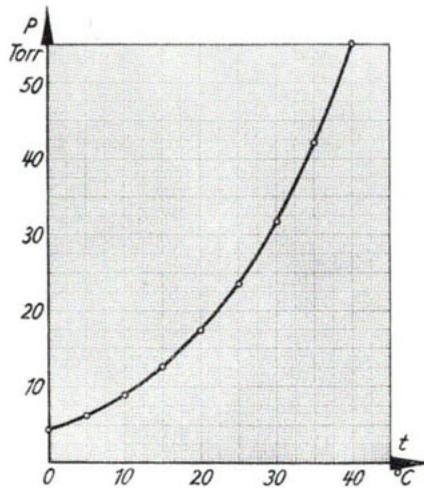


Fig. 2. Sättigungsdampfdruck des Wassers als Funktion der Temperatur

verlauf als richtig annehmen und damit ein vollkommen falsches Bild von der Intensitätsverteilung im Spektrum erhalten.

Eine gezeichnete Kurve läßt mit einem Blick alle wesentlichen Eigenschaften der dargestellten Funktion im gezeichneten Gebiete erkennen. Man sieht sofort, daß der Dampfdruck des Wassers mit steigender Temperatur ebenfalls wächst, und zwar beschleunigt.

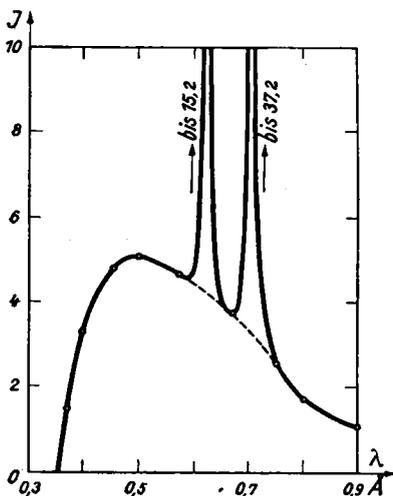


Fig. 3

Zur Darstellung einer Funktion durch eine Kurve im rechtwinkligen Koordinatensystem verwendet man aus Bequemlichkeitsgründen das sogenannte Millimeterpapier, ein Blatt Papier, das mit einem Netz von quadratischen,  $1 \text{ mm}^2$  großen Maschen bedruckt ist, wobei jede fünfte Linie durch etwas stärkeren, jede zehnte durch fetten Druck hervorgehoben ist. Man erkennt das Netz in der Fig. 2.

Die Wahl des Maßstabes auf den Koordinatenachsen ist beliebig. Man wählt ihn so, daß der ganze darzustellende Funktionsbereich auf einem Blatt bestimmten Formates gerade Platz hat. Aus Zweckmäßig-

keitsgründen wird man dabei die Einheitslänge, also die Strecke, die die Einheit (1 Grad, 1 Torr usw.) darstellt, nicht gerade 7,3 mm (oder sonst irgendeine unbequeme Zahl), sondern 10, 20, 50 oder 100 mm lang wählen. Die in Fig. 2 dargestellte Funktion  $p = f(t)$  ist so gezeichnet, daß der Abszissen- und Ordinatenmaßstab gleich sind. 2 mm bedeuten  $1^\circ \text{ C}$  bzw. 1 Torr.

Es ist natürlich nicht notwendig, auf beiden Achsen gleiche Maßstäbe zu wählen, auch ist es für die Übersichtlichkeit der graphischen Darstellung oft von Vorteil, nicht das ganze Koordinatensystem oder nur wenigstens einen ganzen Quadranten, sondern lediglich einen Ausschnitt aus einem solchen darzustellen,

d. h. die Zählung auf den Koordinatenachsen nicht mit Null zu beginnen. Als Beispiel für einen solchen Fall möge die in Tab. 1 dargestellte Funktion  $\rho = f(t)$  dienen. Würden wir hier gleiche Maßstäbe verwenden und würden wir auf der Abszisse 1 Grad durch eine Strecke von 1 cm darstellen, so müßten wir entsprechend auf der Ordinatenachse für 1g/ml die Strecke 1 cm wählen. In diesem Falle würde man aber die Kurve gar nicht in ihren Einzelheiten zeichnen können, da die Dichtewerte sich im dargestellten Bereich nur höchstens um drei Stellen der vierten Dezimalen

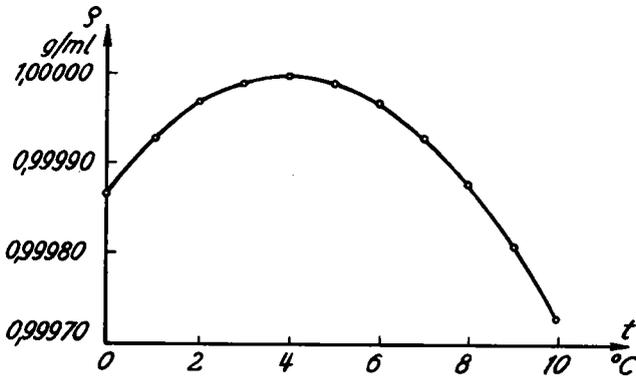


Fig. 4. Dichte des Wassers als Funktion der Temperatur

ändern, was einer Längenänderung der Ordinaten von 0,003 mm entspricht. Daher wird man den Maßstab von vornherein so festlegen, daß er auf der Ordinatenachse um ein Vielfaches größer ist als auf der Abszissenachse. Wir machen ihn 20000mal größer; die Dichte 1 g/ml soll also durch die Strecke von 200000 mm = 200 m dargestellt werden. Da nun aber die ganze Dichteänderung sich doch nur in einem kleinen Bereich abspielt, wäre es unsinnig, eine 200 m lange Ordinatenachse zu zeichnen; wir lassen daher bei der Zeichnung alle Werte unterhalb  $\rho = 0,999970$  g/ml fort und stellen unsere Funktion so dar, wie es Fig. 4 zeigt.

Die Darstellung einer Funktion durch eine Kurve hat gegenüber der tabellarischen den Vorteil, daß man an der Zeichnung, soweit es natürlich die Zeichengenauigkeit zuläßt, jedes beliebige Werte

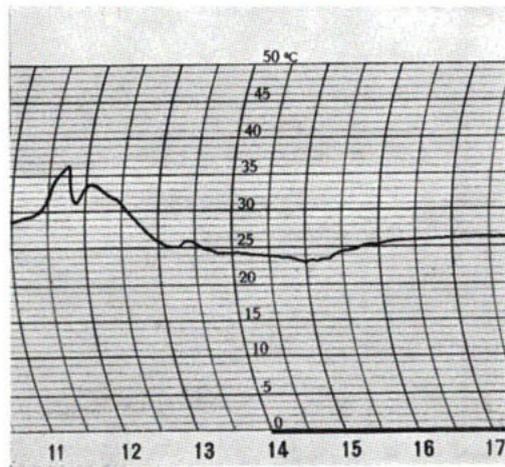


Fig. 5 Registrierstreifen mit gekrümmten Ordinaten

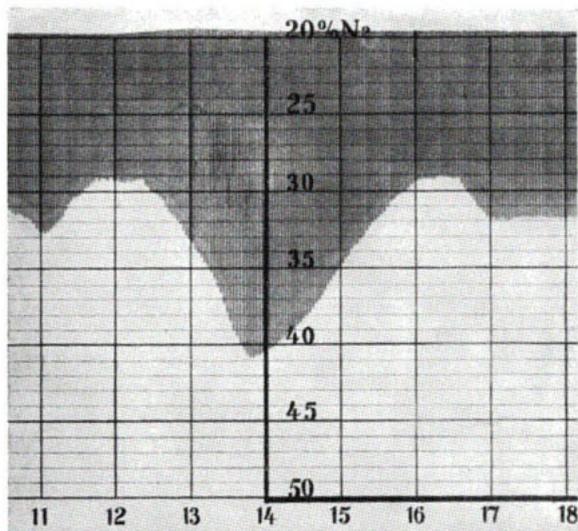


Fig. 6. Darstellung einer Funktion durch die Trennlinie zweier Felder

paar ablesen kann, was bei der Tabelle, die für diskrete Werte aufgestellt ist, nur durch ein Sonderverfahren (die Interpolation) möglich ist. Diesen in der Kontinuität der Aufzeichnung liegenden Vorteil macht man sich zunutze bei der Aufzeichnung von Funktionen durch automatisch arbeitende Geräte. Vor allem in der Großindustrie gibt es solche Apparate, die bestimmte Wertepaare selbsttätig messen und auf einem Registrierstreifen mechanisch oder photographisch in Kurvenform festhalten. Fig. 5 zeigt einen Ausschnitt aus einem solchen Registrierstreifen, bei dem die Temperatur von Ammoniakwasser in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt ist, wobei als eine Besonderheit hervorgehoben werden muß, daß das Koordinatensystem nicht rechtwinklig ist. Die Ordinatenachse ist, bedingt durch die Konstruktion des Meßgerätes, keine Gerade, sondern ein Teil eines Kreisbogens.

Bei automatisch registrierenden Apparaten braucht die Funktion nicht unbedingt durch eine gezeichnete Kurve dargestellt zu werden. Bei dem Gasdichteschreiber, einem Gerät für die technische Gasanalyse, wird der zu registrierende Wert als senkrechter Strich auf dem auf einer Trommel befestigten Registrierstreifen aufgezeichnet. Nach kurzer Zeit dreht sich die Trommel ein wenig und nun wird neben dem ersten Strich ein zweiter gezogen, dessen Länge ein Maß für die Dichte des untersuchten Gases zu diesem Zeitpunkt ist. So reiht sich Strich an Strich und schließlich überdecken diese fortlaufend einen Teil der Papierfläche. Nimmt man nach 24 Stunden den Registrierstreifen ab, so hat er das in Fig. 6 teilweise dargestellte Aussehen. Hier wird also die untersuchte Funktion durch die Trennlinie des schwarzen und weißen Teilfeldes wiedergegeben.

In einem Koordinatensystem können auch gleichzeitig mehrere Kurven dargestellt werden, z. B. dann, wenn zwei Größen von einer dritten abhängen. So kann man Dichte und Zähigkeit des Wassers als Funktion der Temperatur darstellen, wie es Fig. 7 zeigt. Die Ordinatenachse muß in einem solchen Falle natürlich eine doppelte Teilung aufweisen. Diese Darstellungsart wird dann gewählt, wenn es sich darum handelt, festzustellen, ob die beiden zu untersuchenden Größen gewisse Parallelerscheinungen in ihrem Gang aufweisen. Lediglich aus Raumersparnis sollte man nie

mehrere Kurven in dasselbe Achsenkreuz einzeichnen, da sonst die Übersichtlichkeit stark leidet.

Einen anderen Fall, bei dem ebenfalls mehrere Kurven in einem Koordinatensystem eingezeichnet sind, zeigt Fig. 8. Die Kurven stellen die Löslichkeit von  $\text{Na}_2[\text{Sn}(\text{OH})_6]$  (nach Reiff) in Wasser und Natronlauge verschiedener Konzentration als Funktion der Temperatur dar. Durch eine solche Kurvenschar wird einerseits

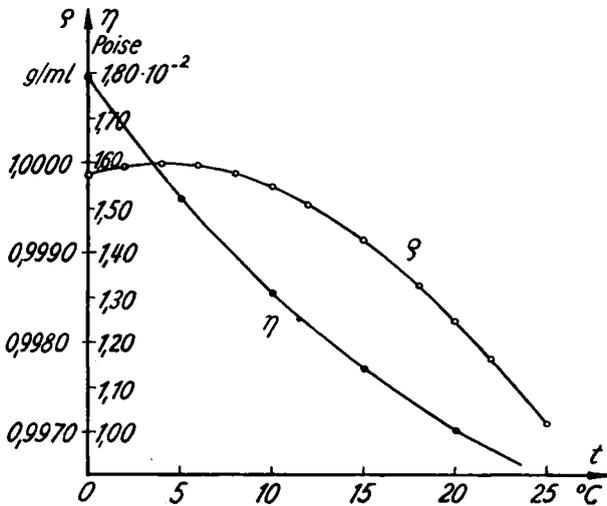


Fig. 7. Dichte und Zähigkeit des Wassers als Funktion der Temperatur

gezeigt, wie sich die Löslichkeit mit der Temperatur ändert, andererseits aber auch, wie sie mit wachsender Konzentration der Natronlauge abnimmt. Jede Kurve gilt für einen bestimmten Prozentgehalt  $p$  der Natronlauge. Man nennt eine solche Größe, die für alle Punkte einer Kurve konstant ist, jedoch von Kurve zu Kurve sich ändert, den Parameter der Kurvenschar.

*Unstetige und mehrdeutige Funktionen.* Die im vorstehenden besprochenen Funktionen waren stetige Funktionen. Sie konnten durch eine Kurve dargestellt werden, die in einem Zuge, ohne Absetzen des Bleistiftes zeichnenbar war. Es bedarf aber wohl kaum

eines besonderen Hinweises darauf, daß diese Eigenschaft nicht das strenge mathematische Kriterium der Stetigkeit ist.

Der Naturwissenschaftler hat es in der Regel mit stetigen Funktionen zu tun. Tritt bei ihm in einer Kurve eine Unstetigkeit auf, so bedeutet das stets, daß bei dem untersuchten Körper etwas

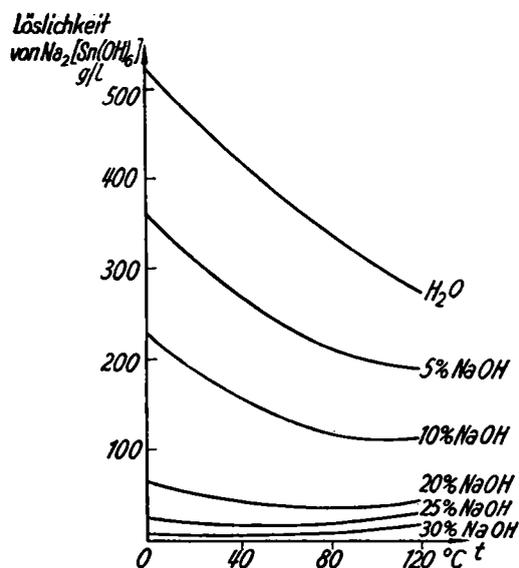


Fig. 8. Graphische Darstellung einer Kurvenschar

Besonderes geschehen ist. Als Beispiel sei die unstetig verlaufende Kurve für die spezifische Wärme der Verbindung  $\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$  angeführt (Fig. 9). Bei  $50,7^\circ\text{C}$  tritt eine Umwandlung der gelben Modifikation des Salzes in die rote ein, und dieser Prozeß macht sich durch einen Sprung in der Kurve bemerkbar.

Wir hatten bis jetzt stillschweigend angenommen, daß jedem Wert der unabhängigen Variablen nur ein einziger Wert der abhängigen Veränderlichen entspricht, daß wir es also mit sogenannten eindeutigen Funktionen zu tun haben. Die reine Mathematik kennt eine große Zahl von mehrdeutigen Funktionen,

also solchen, bei denen zu einem  $x$ -Wert gleichzeitig mehrere  $y$ -Werte gehören. In der Praxis der Chemie und Physik treten

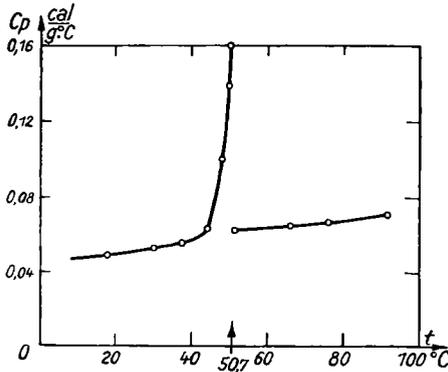


Fig. 9. Bild einer unstetigen Funktion. Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von  $\text{Ag}_2[\text{HgJ}_4]$

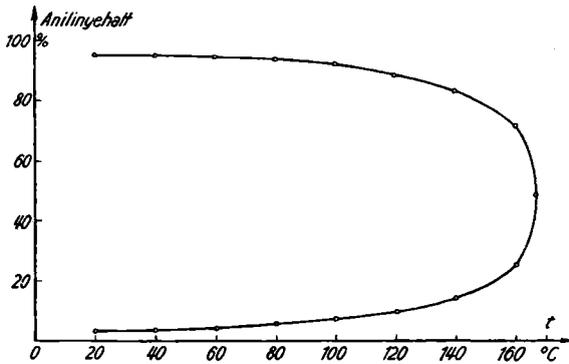


Fig. 10. Bild einer mehrdeutigen Funktion. Mischbarkeit von Anilin und Wasser als Funktion der Temperatur

mehrdeutige Funktionen im allgemeinen nicht auf. Bei Funktionen, die mehrdeutig aussehen, wird sich die Mehrdeutigkeit vielfach durch eine andere Auffassung der Funktion beheben lassen. Fig. 10 zeigt einen solchen Fall.

Mischt man Wasser und Anilin, so läßt sich bei  $80^{\circ}\text{C}$  eine homogene Mischung so lange herstellen, bis der Anteil des Anilins  $5,5\%$  nicht überschreitet. Nimmt man mehr Anilin, so ist eine einzige homogene Phase nicht zu erzielen, es sei denn, daß der Anteil des Anilins  $93,5\%$  überschreitet. Mischungen, die noch mehr Anilin

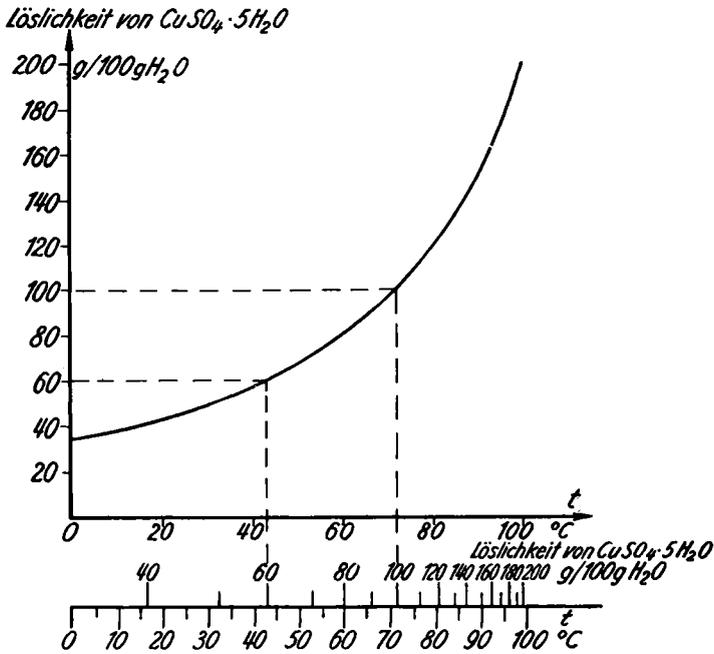


Fig. 11. Entstehung einer Funktionsleiter

enthalten, sind wieder homogen. Es gibt also beim System  $\text{H}_2\text{O}-\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$  eine untere und eine obere Grenze der homogenen Mischbarkeit. Diese Grenzen verschieben sich nun mit der Temperatur. Bei  $167^{\circ}\text{C}$ , der sogenannten kritischen Lösungstemperatur, hat die gezeichnete Kurve ihren weitest nach rechts gelegenen Punkt. Die Mehrdeutigkeit dieser Funktion verschwindet, wenn wir sie aus zwei Ästen zusammengesetzt denken. Der

obere Ast kann aufgefaßt werden als Löslichkeitskurve für Wasser in Anilin, der untere als Löslichkeitskurve von Anilin in Wasser. Beide Teilkurven treffen sich im kritischen Punkt und gehen mit stetiger Krümmung ineinander über.

*Die Funktionsleiter.* Eine besondere Art der graphischen Darstellung einer Funktion, die sich aus der Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten herleiten läßt, ist die sogenannte Funktionsleiter. Begriff und Handhabung der Funktionsleiter lassen sich am einfachsten an einem Beispiel erklären.

Die Löslichkeit von kristallisiertem Kupfersulfat,  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ , in Wasser nimmt stark mit wachsender Temperatur zu, so wie es Fig. 11 zeigt.

Unterhalb der Abszissenachse ist auf einer parallelen Geraden die Teilung der Abszissenachse noch einmal aufgetragen. Überträgt man nun die Teilung der Ordinatenachse in der dargestellten Weise über die Kurve auf diese Gerade, so erhält man zwei nebeneinander liegende Skalen die gemeinsam eine Darstellung der Funktion sind. Auf dieser Doppelskala, der Funktionsleiter, stehen sich jeweils zwei zu einem Wertepaar gehörende Zahlen gegenüber. So liest man z. B. ab, daß bei  $55^\circ\text{C}$  die Löslichkeit des Kupfersulfats 73 g Salz in 100 g Wasser beträgt. Während die eine Skala (*t*-Skala) gleichmäßig geteilt ist, ist die andere nach größeren Werten hin mehr zusammengedrängt als am Anfang.

Solchen ungleichmäßigen Teilungen werden wir später noch bei der Besprechung von Spezialpapieren begegnen.

*Das Polarkoordinatensystem.* Das rechtwinklige Koordinatensystem ist das wichtigste und gebräuchlichste, aber nicht das einzig verwendete. Chemiker und Experimentalphysiker werden in der Regel auf die Anwendung anderer Systeme verzichten können, daher wollen wir sie auch nicht besprechen. Nur auf ein etwas häufiger gebrauchtes wollen wir kurz hinweisen, das Polarkoordinatensystem. Es wird fast ausschließlich zur Darstellung von Größen verwendet, die Funktionen eines Winkels sind. Das Polarkoordinatennetz besteht aus konzentrischen Kreisen, deren Radien von Kreis zu Kreis um den gleichen Betrag zunehmen, und aus Strahlen, die vom Zentrum ausgehen und so die Kreise senkrecht schneiden. Fig. 12 zeigt ein Blatt Polarkoordinaten-

papier. Die Winkelteilung ist bei dem abgebildeten Blatt von zwei zu zwei Grad eingerichtet, die Zehnergrade sind durch fettgedruckte Strahlen hervorgehoben. Bei den Kreisen, deren größter

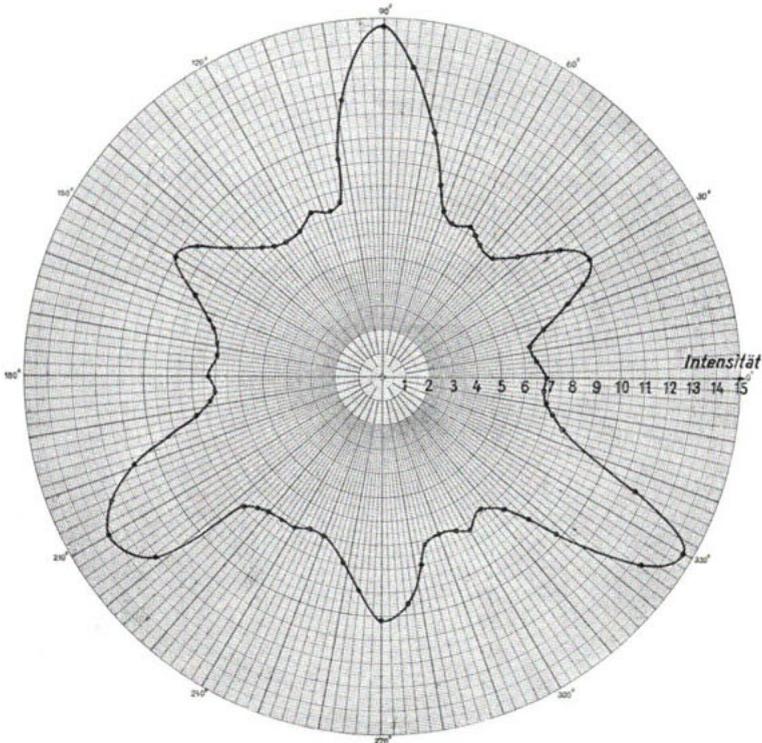


Fig. 12. Darstellung der Streuintensität von Elektronenstrahlen als Funktion des Streuwinkels in Polarkoordinaten

einen Radius von 150 mm besitzt, ist jeder fünfte etwas, jeder zehnte stark durch fetten Druck markiert. Die Winkelskala liegt fest, die Radialskala muß der jeweils darzustellenden Größe angepaßt werden. Die Winkelzählung beginnt wie üblich von der Waagerechten (der Polarachse) aus und schreitet im mathe-

matisch positiven Sinne, also entgegen der Uhrzeigerdrehung, fort. Die Teilung der Radialskala beginnt im Mittelpunkt. Die Skalenwerte nehmen von innen nach außen zu. Die Verwendung von Polarkoordinatenpapier sei an einem Beispiel erläutert.

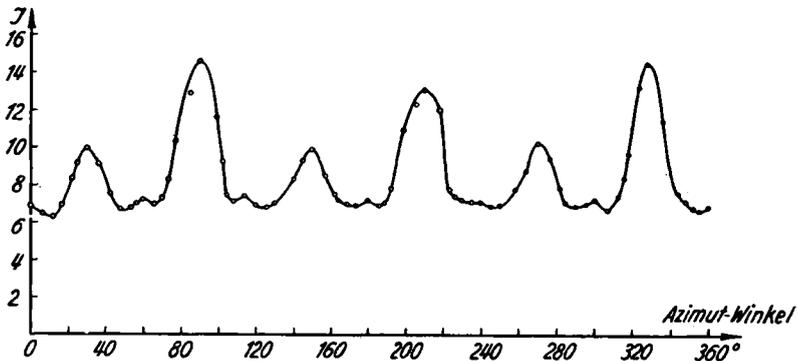


Fig. 13. Darstellung der Streuintensität von Elektronenstrahlen als Funktion des Streuwinkels in rechtwinkligen Koordinaten

Davisson und Germer stellten 1927 Versuche zum Beweise der Wellennatur des Elektrons an und ließen zu diesem Zweck Elektronen auf Nickeleinkristalle fallen, wobei sie dann die Streuintensität der Elektronen als Funktion des Streuwinkels maßen. Stellt man diese Funktion in rechtwinkligen Koordinaten dar, so erhält man Fig. 13. Viel anschaulicher ist jedoch die Darstellung derselben Funktion in Polarkoordinaten (Fig. 12). Die Darstellung ist ohne weitere Erklärungen zu verstehen. Jeder Punkt ist in seiner Lage durch den Schnitt eines Kreises mit einem Radius gegeben.

### Analytische Darstellung

Die analytische Darstellung einer Funktion durch eine Gleichung ist die präziseste und knappste, wenn auch nicht die übersichtlichste.

Man unterscheidet explizite und implizite Funktionen, die man symbolisch als  $y = f(x)$  bzw.  $f(x, y) = 0$  darstellt. Mit dem Zeichen  $y = f(x)$  drückt man aus, daß eine Beziehung zwischen  $x$

und  $y$  besteht und daß speziell diese Beziehung durch eine Gleichung so gegeben ist, daß auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen nur die abhängige Variable selbst, rechts vom Gleichheitszeichen dagegen ein ganzer mathematischer Ausdruck steht, eine Rechenvorschrift, die sich auf die unabhängige Veränderliche bezieht. Mit  $f(x, y) = 0$  ist irgendein mathematischer Ausdruck, der die beiden Veränderlichen und etwaige unveränderliche Größen (Konstanten) enthält, gemeint, der für jedes  $x$  und  $y$  den Wert Null haben soll.

Der Siedepunkt des Schwefels  $t_s$  hängt vom Druck ab, bei dem das Sieden erfolgt, nach der Gleichung

$$t_s = 444,60 + 0,0909 (p - 760) - 0,000048 (p - 760)^2,$$

wenn  $t_s$  in Celsiusgraden und  $p$  in Torr gezählt werden.

Setzt man bei dieser expliziten Funktion für  $p$  Werte ein, so läßt sich zu jedem  $p$  ein  $t_s$  ausrechnen, auf diese Weise eine Tabelle aufstellen und nach der Tabelle eine Kurve, die die Funktion darstellt, zeichnen.

Als typisches Beispiel einer impliziten Funktion sei die van der Waalssche Zustandsgleichung für  $\text{CO}_2$  bei einer absoluten Temperatur von  $273^\circ$  angeführt. Sie lautet

$$\left(p + \frac{3,609}{V^2}\right)(V - 0,04275) = 22,4,$$

wenn  $p$  den Druck in Atmosphären und  $V$  das Molvolumen in Litern bedeuten. Um die Übereinstimmung mit dem Symbol  $f(x, y) = 0$  zu erhalten, kann man die Gleichung auch

$$\left(p + \frac{3,609}{V^2}\right)(V - 0,04275) - 22,4 = 0$$

schreiben, was aber selbstverständlich belanglos ist.

Bei einer solchen impliziten Funktion kann die tabellarische und graphische Darstellung erst erfolgen, wenn man die Gleichung nach der einen Veränderlichen aufgelöst hat, also in die Form

$$p = \frac{22,4}{V - 0,04275} - \frac{3,609}{V^2}$$

gebracht hat.

Wollte man die Gleichung nach  $V$  auflösen, so würde das große Schwierigkeiten machen, weil es sich dann um die Bestimmung

der Wurzeln folgender Gleichung dritten Grades handeln würde:

$$V^3 - \left(0,04275 + \frac{22,4}{p}\right) V^2 + \frac{3,609}{p} V - \frac{0,04275 \cdot 3,609}{p} = 0.$$

In vielen Fällen ist eine implizite Funktion gar nicht explizit darstellbar, so daß eine tabellarische Darstellung nicht möglich ist.

Die expliziten Funktionen sind demnach für den Naturwissenschaftler die weitaus wichtigeren und auch angenehmeren. Leider sind die impliziten nicht ganz zu umgehen, da man auf diese Funktionsart gelegentlich durch theoretische Überlegungen geführt wird.

Die analytische Darstellung einer Funktion ist nicht anschaulich, und es wird meistens das Bestreben des Praktikers sein, von der analytischen zur graphischen Darstellung überzugehen. Das kann auf dem Umweg über die tabellarische Darstellung geschehen. Dieser Umweg läßt sich, vor allem, wenn es sich um eine qualitative Darstellung des Funktionsverlaufes handelt, vermeiden. Voraussetzung dafür ist, daß man die Eigenschaften einer gewissen Gruppe elementarer Funktionen kennt und diese Kenntnisse in geeigneter Weise auszunutzen versteht.

Die Übersetzung der Gleichung in das Kurvenbild unter Umgehung der Tabelle muß natürlich geübt werden, was nicht im Rahmen dieses Buches geschehen kann. An passender Stelle soll jedoch kurz auf die diesbezüglichen Methoden hingewiesen werden.

## 2. KAPITEL

### Die wichtigsten Funktionstypen

#### A. Potenzfunktionen

#### 3. Die Konstante

Die einfachste Funktion, die es gibt, ist die Konstante. Sie wird analytisch durch die Gleichung

$$y = a$$

gegeben. Da  $x$  in der Gleichung nicht vorkommt, hat  $y$  für jeden beliebigen Wert von  $x$  denselben Wert  $a$ . Die Funktion wird durch eine Parallele zur  $x$ -Achse im Abstände  $a$  dargestellt (Fig. 14).

Diese Gerade besitzt weder Anfang noch Ende, sie ist unbegrenzt. Schon an dieser Eigenschaft erkennt man, daß  $y = a$  nur eine mathematische Abstraktion ohne einen physikalischen Sinn ist. Wohl kennt der Naturwissenschaftler Funktionen, die er als Konstanten bezeichnet, er sagt z. B., die elektromotorische Kraft  $E$  eines Akkumulators sei konstant und betrage

2 Volt, oder die Temperatur  $\vartheta$  in einem Thermostaten sei konstant gleich  $25^{\circ}$  C. Im mathematischen Sinne handelt es sich aber nicht um Konstanten, denn der Akku war ja nicht seit aller Ewigkeit geladen, und er behält auch seine Spannung nicht unbegrenzt lange Zeit. Auch der Thermostat mußte einmal angeheizt werden und wird zu gegebener Zeit wieder außer Betrieb gesetzt. Der tatsächliche Verlauf der letzteren Zeitkurve sieht vielleicht so aus (Fig. 15).

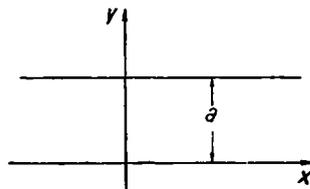


Fig. 14.  
Bild einer Konstanten

Der Thermostat, der mit kaltem Wasser gefüllt ist, hat vielleicht zunächst eine Temperatur von  $10^{\circ}\text{C}$ , wird dann auf  $25^{\circ}$  aufgeheizt, hält diese Temperatur konstant, um nach dem Abschalten wieder abzukühlen. Und wenn wir sagen,  $\vartheta$  sei konstant, so meinen wir damit, daß die wahre, ausgezogen gezeichnete Funktion während der uns interessierenden Zeitdauer, die in Fig. 15 durch zwei Pfeile angegeben ist, durch ein Stück der mathematischen Konstanten ersetzt werden kann. Während dieser Zeit haben wir irgendeinen Versuch angestellt; welche Temperatur der Thermostat vorher und nachher besessen hat, ist für uns ohne Interesse.

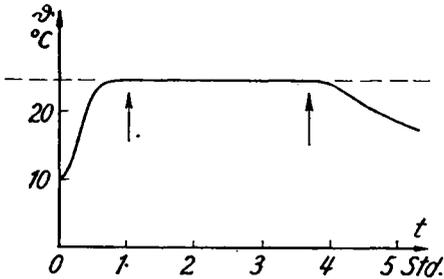


Fig. 15. Temperatur in einem Thermostaten als Funktion der Zeit

So ist es bei den Naturwissenschaften fast immer. Man interessiert sich meist nur für einen speziellen Ast oder einen Teil der mathematischen Kurve, weil nur dieser Teil eine physikalische oder chemische Bedeutung hat. Wir werden solchen Beispielen später noch begegnen.

Aber noch ein weiterer Unterschied besteht zwischen der Ausdrucksweise eines Mathematikers und eines experimentell arbeitenden Chemikers oder Physikers. Folgendes Beispiel möge das erläutern.

Ein Thermostat, der über Stunden oder Tage die Temperatur konstant halten soll, besitzt nie eine wirklich unveränderliche Temperatur. Infolge seiner Konstruktion schwankt vielmehr seine Temperatur in einem engen Bereich von vielleicht einigen tausendstel Grad periodisch um den eingestellten Temperaturwert, so wie es Fig. 16 anschaulich zeigt. Diese Schwankungen können beobachtet werden, wenn man zur Temperaturmessung ein Beckmann-Thermometer mit einer in tausendstel Grad geteilten Skala verwendet. Nimmt man jedoch nur ein die Zehntelgrade anzeigendes Thermometer, so wird man von den Schwankungen nichts bemerken und den konstanten Temperaturwert  $25,0^{\circ}\text{C}$  messen.

Während also der Mathematiker nur die Fälle „konstant“ oder „nicht konstant“ kennt, ist für den Naturwissenschaftler noch der Zusatz „innerhalb der Meßgenauigkeit“ von Bedeutung. Für den Praktiker, der mit einem Zehntelgradthermometer arbeitet, ist eben die Temperatur im Thermostaten (innerhalb seiner Meßgenauigkeit) konstant, auch wenn der Mathematiker hier anderer Meinung ist.

Daher ist es für den Praktiker auch nicht dasselbe, ob z. B. als Ergebnis einer Temperaturmessung der Wert  $25,00^{\circ}$  oder  $25^{\circ}$  an-

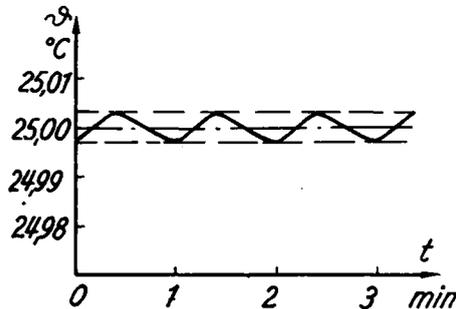


Fig. 16. Schwankungen der Temperatur in einem Thermostaten

gegeben wird. Abstrakt mathematisch gesehen, sind beide Zahlenwerte zwar gleich, für den Praktiker bedeuten sie aber etwas total Verschiedenes. Die Zahlenangabe  $25,00^{\circ}$  sagt im Gegensatz zu  $25^{\circ}$  aus, daß die Zehntel- und Hundertstelgrade gemessen wurden und daß die Abweichungen vom angegebenen Wert nur in der letztangeschriebenen Dezimalen liegen können. Bei der zweiten Angabe wird also durch die Schreibweise angedeutet, daß bei der Temperaturmessung nur die ganzen Grade berücksichtigt worden sind.

Hat man es mit größeren Zahlen zu tun, so wählt man gern die Zehnerpotenzschreibweise, wenn man beim Anschreiben einer Zahl auch ihre Genauigkeit zum Ausdruck bringen will. So bedeutet  $2,78 \cdot 10^5$  im Gegensatz zu 278000, daß die angegebenen Tausender nicht mehr ganz sicher sind, während man bei 278000 nur an der Richtigkeit der letzten Ziffer, der Einer, zweifeln darf.

#### 4. Die Proportionalität

##### Begriff und Darstellung

Läßt man linear polarisiertes, gelbes Natriumlicht bei 20° C durch eine 10 cm lange Schicht einer Rohrzuckerlösung von der Konzentration  $c$  g/cm<sup>3</sup> hindurchtreten, so wird die Polarisations-ebene um den Winkel

$$(1) \quad \alpha_{20}^D = 66,5 c$$

gedreht.

Eine Funktion dieses Typus, in allgemeiner Schreibweise

$$y = a x,$$

bei der eine Verdoppelung von  $x$  zu einer Verdoppelung von  $y$ , eine Verdreifachung von  $x$  zu einer Verdreifachung von  $y$  usw. führt, nennt man eine Proportionalität. In unserem Beispiele ist  $\alpha_{20}^D$  proportional  $c$ , aber umgekehrt ist auch

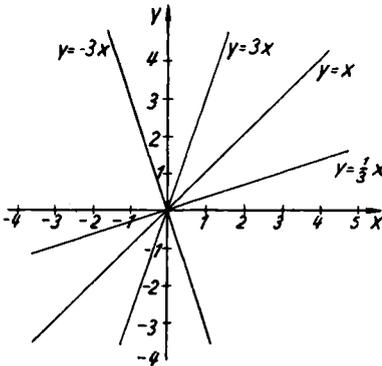


Fig. 17. Graphische Darstellung der Proportionalität

$c$  proportional  $\alpha_{20}^D$ , denn nach  $c$  aufgelöst, lautet die Gleichung:

$$(2) \quad c = 0,0150 \cdot \alpha_{20}^D.$$

So kann man durch die Messung von  $\alpha_{20}^D$  die Konzentration der Zuckerlösung ermitteln (Saccharimetrie).

Die Funktion  $y = a x$  wird graphisch durch eine Gerade durch den Koordinatenursprung dargestellt. Ist  $a$  gleich 1, also  $y = x$ , so verläuft die Gerade bei gleichen Maßstäben auf der  $x$ - und  $y$ -Achse unter einem Winkel von 45° zur positiven Richtung der  $x$ -Achse. Ein Faktor  $a$  vergrößert jede Ordinate oder verkleinert sie, je nachdem, ob  $a$  größer oder kleiner als 1 ist. Dadurch wird der Verlauf der Geraden steiler oder flacher. Ist  $a$  negativ, so verläuft die Gerade im zweiten und vierten Quadranten, so wie es Fig. 17 zeigt.

Man erkennt leicht, daß  $a = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$  ist. Man nennt den Faktor  $a$  das Steigungsmaß oder die Neigung der Geraden.

Wir hatten an den beiden Gleichungen (1) und (2) gesehen, daß die begriffliche Vertauschung der unabhängigen und der abhängigen Variablen den Typus der Funktion nicht ändert; das

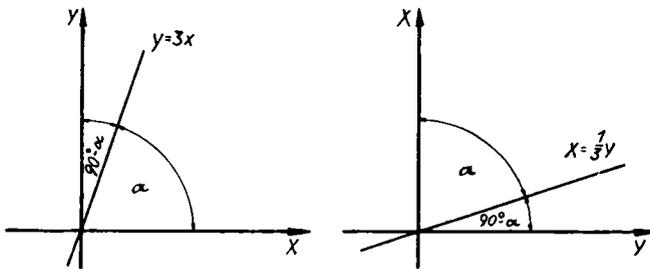


Fig. 18. Die Vertauschung der Koordinatenachsen führt bei einer Geraden zu keiner Änderung des Kurventypus

bedeutet, daß in einem Koordinatensystem mit vertauschten Achsen die Kurve wiederum eine Gerade ist, was eigentlich selbstverständlich und an den Figuren in Fig. 18 direkt ablesbar ist.

#### Die experimentell ermittelte Proportionalität

Die Kapazität eines Kondensators beliebiger Form ist gegeben durch die Gleichung

$$C = C_0 \cdot \varepsilon;$$

dabei ist  $C_0$  die Kapazität, die der Kondensator im Vakuum besitzen würde, und  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante.  $C_0$  ist eine durch die Konstruktion gegebene feste Größe, die durch den Versuch bestimmt werden soll,  $\varepsilon$  ist von Substanz zu Substanz verschieden.

Bei einem Versuch wird nun der Kondensator bei  $18^\circ \text{C}$  in verschiedene Flüssigkeiten eingebettet und seine Kapazität gemessen. Es ergeben sich folgende in Tab. 3 zusammengestellte Werte.

Tabelle 3

Substanz	Formel	$\epsilon$	C cm	$\frac{C}{\epsilon}$ cm
Toluol . . . . .	$C_6H_5CH_3$	2,3	45	19,58
Äthylacetat . . . . .	$CH_3COOC_2H_5$	6,1	89	14,60
Essigsäure . . . . .	$CH_3COOH$	9,7	131	13,51
Aceton . . . . .	$(CH_3)_2CO$	21,5	320	14,89
Äthylalkohol . . . . .	$C_2H_5OH$	26,0	402	15,47
Nitrobenzol . . . . .	$C_6H_5NO_2$	36,4	525	14,42
Ameisensäure . . . . .	$HCOOH$	58,0	860	14,81

Die gemessenen Werte tragen wir in ein Koordinatensystem ein (Fig. 19). Wegen der verschiedenen Größenordnung der Werte  $\epsilon$

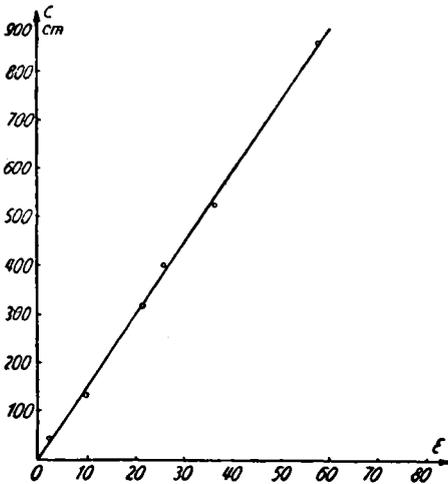


Fig. 19. Kapazität eines Kondensators in Abhängigkeit vom Dielektrikum

und  $C$  müssen wir die Maßstäbe auf den Koordinatenachsen verschieden wählen. Die Länge der Einheit auf der Abszissenachse  $l_\epsilon$  machen wir 2 mm, die Einheitslänge  $l_c$  auf der Ordinatenachse 0,2 mm groß. Nach Einzeichnung der Meßwerte erkennt man sofort, daß eine gerade Linie sich durch die gezeichneten Punkte nicht hindurchlegen läßt. Der Grund dafür ist, daß die Werte  $\epsilon$  wegen mangelhafter Reinheit der Substanzen nicht streng richtig und die Werte  $C$  mit Meßfehlern behaftet sind.

Da man aber weiß, daß die Kurve eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Steigungsmaß  $C_0$  sein muß, legt man durch die Punkte eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade — man nennt sie die Ausgleichsgerade — so, daß

die Meßpunkte in ihrer Gesamtheit möglichst gleichmäßig oberhalb und unterhalb der Geraden liegen. Diese graphische Ausgleichung nach Augenmaß ist natürlich nicht ganz frei von Willkür. Wir werden im zweiten Teil des Buches ein objektives rechnerisches Ausgleichsverfahren (Methode der kleinsten Quadrate) kennenlernen.

Nun läßt sich  $C_0$  direkt an der Zeichnung ablesen. Es ist selbstverständlich nicht identisch mit  $\operatorname{tg} \alpha$ , weil die Maßstäbe auf den Achsen verschieden sind. Ist der Abstand eines auf der Geraden gelegenen Punktes von der Abszissenachse  $p$  mm, derjenige von der Ordinatenachse  $q$  mm, so repräsentieren diese Strecken einen

Wert  $C = \frac{p}{l_c}$  und  $\varepsilon = \frac{q}{l_\varepsilon}$ . Der gesuchte Wert  $C_0$  ist damit

$$C_0 = \frac{C}{\varepsilon} = \frac{p}{q} \cdot \frac{l_\varepsilon}{l_c} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{l_\varepsilon}{l_c}.$$

Wie man an der Figur ablesen kann, ist  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{146,8 \text{ mm}}{100,0 \text{ mm}}$ . Damit wird

$$C_0 = 1,468 \cdot \frac{2}{0,2} = 14,68.$$

Praktisch denselben Wert erhalten wir auch, wenn wir für irgendeinen Punkt nicht seine Abstände von den Achsen ausmessen, sondern seinen  $C$ - und seinen  $\varepsilon$ -Wert an den Teilungen ablesen und diese Werte ins Verhältnis setzen. Für  $\varepsilon = 40$  finden wir auf der Geraden  $C = 585$ ; damit wird

$$C_0 = \frac{585}{40} = 14,63.$$

Das erste Verfahren, das zunächst etwas umständlich erscheint, hat dann eine besondere Bedeutung, wenn die Teilungen auf den Achsen ungleichmäßig sind, so wie wir sie in Nr. 16 bei den logarithmischen Papieren kennenlernen werden.

Der Wert  $C_0$  läßt sich auch rein rechnerisch bestimmen, da  $C_0 = \frac{C}{\varepsilon}$  ist. Die Werte  $\frac{C}{\varepsilon}$ , die aus den Versuchsdaten erhalten werden, sind in der letzten Spalte der Tabelle 3 aufgeführt. Würde man aus den sieben angegebenen Zahlen einfach den Mittelwert bilden, so käme man zu einem falschen Wert für  $C_0$ . Der für Toluol gefundene Wert  $\frac{C}{\varepsilon}$  ist ganz offensichtlich durch eine ungenaue Messung, — er weicht von den anderen zu stark ab, — unsicher

und muß bei der Mittelwertbildung verworfen werden. Aus den anderen sechs Zahlen ergibt sich als Mittel  $C_0 = 14,62$  cm.

Die in Fig. 19 dargestellte Gerade hat also die Gleichung  $C = 14,64 \cdot \varepsilon$ . Wir wollen bei dieser Gleichung noch etwas verweilen, um uns noch einmal den Gegensatz zwischen reiner und angewandter Mathematik vor Augen zu halten. Die Gleichung  $C = 14,64 \cdot \varepsilon$  bedeutet eine unbegrenzte Gerade, die im dritten und ersten Quadranten verläuft. Bei gedankenloser Anwendung der Gleichung würde man z. B. finden, daß  $C$  für  $\varepsilon = -10$  den Wert  $-146,4$  hat. Das ist zwar mathematisch richtig, hat aber keinen physikalischen Sinn, denn es gibt keinen Stoff, der eine negative Dielektrizitätskonstante besitzt. Aber auch  $\varepsilon$ -Werte zwischen 0 und  $+1$  sind für unsere Stoffe auszuschließen, da das Vakuum den kleinsten Wert der Dielektrizitätskonstante besitzt, nämlich  $\varepsilon = 1$ . So hat also unsere Gleichung und die dargestellte Gerade nur einen Sinn für  $\varepsilon$ -Werte größer als 1. Wie weit die Gerade nach oben reicht, kann man nicht von vornherein sagen, denn es lassen sich neuerdings Stoffe herstellen, bei denen man durch geeignete Zusammensetzung  $\varepsilon$  recht groß machen kann.

Es zeigt sich also, daß der Naturwissenschaftler mit der obigen Gleichung etwas anderes als der Mathematiker meint, nämlich nur ein Stück der mathematischen Geraden.

## 5. Die lineare Funktion

### Gleichung einer Geraden

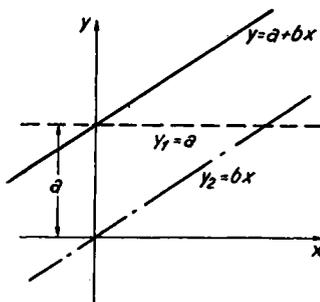


Fig. 20. Zusammensetzung der linearen Funktion aus zwei Anteilen

Eine lineare Funktion wird in allgemeiner Form analytisch dargestellt durch die Gleichung

$$y = a + b x .$$

Sie setzt sich aus zwei Anteilen additiv zusammen:  $y_1 = a$  und  $y_2 = b x$ . Die graphische Darstellung dieser Teilfunktionen ist uns bereits bekannt. Um  $y = a + b x$  graphisch darzustellen (Fig. 20), müssen die zu gleichen Abszissenwerten gehörenden Ordinatenwerte der Teilfunktionen addiert oder überlagert werden, und so erhält

man eine gerade Linie, die die Ordinatenachse im Abstände  $a$  von der  $x$ -Achse schneidet und dieselbe Steigung wie die Gerade  $y_2 = b x$ , also  $b$ , besitzt. Je nach dem Vorzeichen von  $a$  und  $b$  erhält die Gerade eine verschiedene Lage. In Fig. 21 sind die Geraden  $y = 1 + x$ ,  $y = 1 - x$ ,  $y = -1 + x$  und  $y = -1 - x$  dargestellt.

Eine besondere, gelegentlich gebrauchte Form einer Geradengleichung ist die sogenannte **Abschnittsform**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wie man sich leicht an Hand der Fig. 22 überzeugt, sind  $a$  und  $b$  hier die Abschnitte, die die Gerade auf den Koordinatenachsen abschneidet, denn es ist ja  $y = b$  für  $x = 0$  und  $y = 0$  für  $x = a$ .

Die lineare Funktion ist eine der wichtigsten Funktionen, mit denen es der Naturwissenschaftler zu tun hat, und zwar deswegen, weil jede Kurve auf einem kurzen Stück in erster Näherung durch eine Gerade ersetzt werden kann. Viele lineare naturwissenschaftliche Gesetze sind nur als Näherungsgesetze aufzufassen.

Wir wollen nun eine praktische lineare Funktion besprechen.

Läßt man durch eine Silbernitratlösung zwischen zwei Elektroden einen Gleichstrom von der konstanten Stromstärke  $i$  Amp. eine Zeit  $t$  Sek.

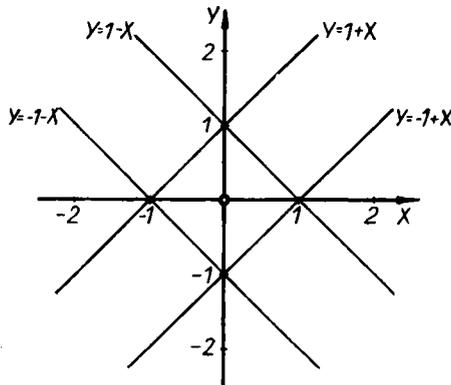


Fig. 21. Abhängigkeit der Lage einer Geraden vom Vorzeichen der Zahlen  $a$  und  $b$

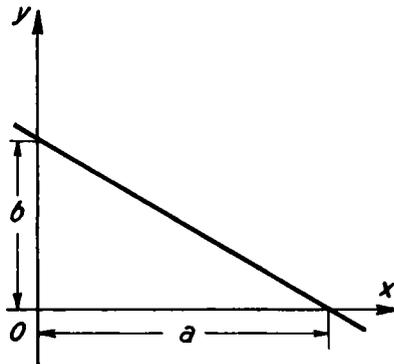


Fig. 22.

hindurchgehen, so scheidet sich auf der Kathode nach Faraday eine Silbermenge  $m$  mg,

$$m = 1,118 \cdot i \cdot t,$$

ab. Ist die Anfangsmasse der Kathode 20,346 g und beträgt die Stromstärke  $i = 100 \text{ mA} = 0,1 \text{ A}$ , so ist die Gesamtmasse der Kathode  $M$  (in g) von der Zeit abhängig nach der Gleichung

$$M = 20,346 + 1,118 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot t = 20,346 + 1,118 \cdot 10^{-4} t.$$

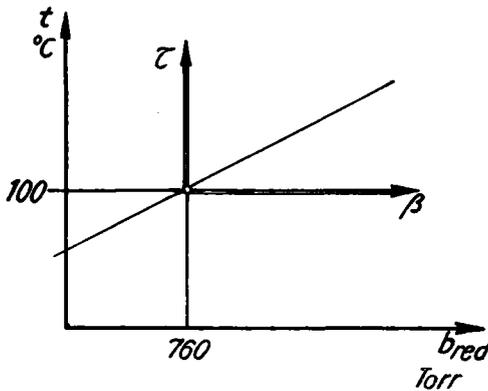
Diese Funktion wird durch eine gerade Linie dargestellt, die auf der Ordinatenachse die Strecke, welche 20,346 g darstellt, abschneidet und so ansteigt, daß auf je  $10^4$  Sekunden eine Massenzunahme von 1,118 g erfolgt.

### Koordinatentransformation

Ein weiteres Beispiel bietet uns die Funktion, welche die Siedetemperatur des Wassers (in  $^{\circ}\text{C}$ ) in Abhängigkeit vom reduzierten Barometerstand (in Torr) darstellt. Die Gleichung lautet

$$(3) \quad t = 100 + 0,0375 (b_{\text{red}} - 760).$$

Um die diese Gleichung darstellende Gerade zeichnen zu können,



müßten wir die Gleichung auf die Form  $y = a + bx$  bringen. Das wäre aber ungeschickt und umständlich. Statt dessen formen wir die Gleichung etwas um:

$$(4) \quad t - 100 = 0,0375 (b_{\text{red}} - 760).$$

Nennen wir  $t - 100$  jetzt  $\tau$  und  $b_{\text{red}} - 760$  jetzt  $\beta$ , so geht Gl. (4) über in

$$\tau = 0,0375 \beta.$$

Fig. 23. Durchführung einer Koordinatenkreuzverschiebung

Wir haben eine sogenannte Koordinaten-

transformation durchgeführt, und in dem neuen  $\beta$ ,  $\tau$ -Koordinatensystem (Fig. 23) ist  $\tau = 0,0375 \beta$  eine Gerade durch den

Koordinatenursprung, die sofort, da ihre Neigung bekannt ist, gezeichnet werden kann. Das Ziel war aber, die Funktion als Gerade im  $b_{\text{red}}, t$ -System darzustellen. Wegen

$$\tau = t - 100 \quad \text{und} \quad \beta = b_{\text{red}} - 760$$

liegt der Koordinatenursprung des  $\beta, \tau$ -Systems ( $\beta = 0, \tau = 0$ ) bei  $t = 100$  und  $b_{\text{red}} = 760$ , so daß wir um das  $\beta, \tau$ -Koordinatensystem mit der Geraden das eigentliche  $b_{\text{red}}, t$ -Koordinatensystem herumzeichnen können, womit wir die Darstellung der Gl. (3) erhalten. Das  $\beta, \tau$ -Koordinatensystem spielte bei der ganzen Überlegung nur eine Hilfsrolle.

Im übrigen sei bemerkt, daß Gl. (3) ein Beispiel für ein Näherungsgesetz darstellt. Nur in unmittelbarer Umgebung des Punktes  $b_{\text{red}} = 760, t = 100$ , stellt sie das tatsächliche Verhalten der Siedetemperatur dar.

### Etwas über absolute und relative Fehler

Kennt man die Neigung einer geraden Linie und die Koordinaten eines ihrer Punkte, so lassen sich die Koordinaten aller anderen Punkte berechnen.

Es sei  $P_0$  ein Punkt mit den bekannten Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$ . Vergrößert man die Abszisse um  $\Delta x$  (siehe Fig. 24), so hat der auf der Geraden liegende Punkt  $P$ , der die Abszisse  $x = x_0 + \Delta x$  besitzt, eine Ordinate, die um das Stück  $\Delta y$  gegenüber  $y_0$  geändert ist. Man liest an der Figur ab, daß

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \alpha = b$$

ist. Somit ist die Ordinate des Punktes  $P$  gegeben als

$$y = y_0 + \Delta y = a + b(x_0 + \Delta x) = a + b x_0 + b \cdot \Delta x.$$

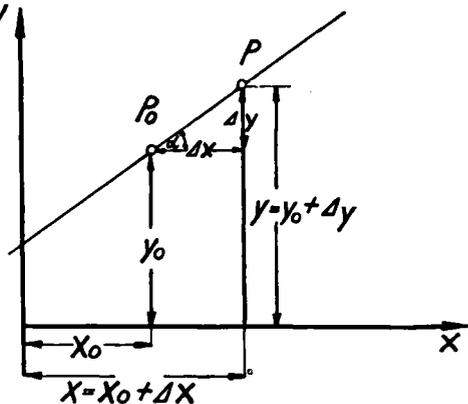


Fig. 24