Gustav Feichtinger · Richard F. Hartl
Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse

Gustav Feichtinger · Richard F. Hartl

Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse

Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1986

Prof. Dr. Gustav Feichtinger
Dr. Richard F. Hartl
Institut für Ökonometrie und Operations Research
Technische Universität Wien
Argentinierstraße 8
A-1040 Wien

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Feichtinger, Gustav:
Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse :
Anwendungen d. Maximumprinzips in d. Wirtschaftswiss. / Gustav Feichtinger ; Richard F. Hartl. –
Berlin ; New York : de Gruyter, 1986.
ISBN 3-11-010432-6
NE: Hartl, Richard F.:

Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau. – Bindung: Dieter Mikolai, Berlin.
Einbandentwurf: Hans-Bernd Lindemann, Berlin

It's astounding
Time is fleeting.
Madness takes its toll.
But listen closely.
(Not for very much longer.)
I've got to keep *control.*

Riff Raff in „Doing the Time warp"
The Rocky Horror Picture Show

Vorwort

Nach einem Ausspruch des großen österreichischen Ökonomen *Joseph Schumpeter* ist eine Vernachlässigung des dynamischen Elements bei wirtschaftlichen Planungsaufgaben vergleichbar mit einer Aufführung von Shakespeares Hamlet ohne den Prinzen von Dänemark. Das geeignete Instrumentarium zur Behandlung dynamischer, d. h. sich im Zeitablauf verändernder Systeme ist die *optimale Kontrolltheorie* bzw. ihr Vorläufer, die Variationsrechnung. Sie beschäftigt sich mit der Optimierung eines Leistungsmaßes in einem Zeitintervall, wobei die Systemdynamik durch eine Differentialgleichung beschrieben wird und gewisse Nebenbedingungen einzuhalten sind.

Die Übersetzung des englischen Begriffes *optimal control theory* mit *(optimaler) Kontrolltheorie* ist allerdings als eher unglücklich anzusehen. Das deutsche Wort „Kontrolle" bedeutet meist ein Überwachen, während im vorliegenden Fall mit ‚control' ein aktives Eingreifen in den dynamischen Prozeß gemeint ist. In diesem Sinne wäre „Theorie der optimalen Steuerung" bzw. „Optimalsteuerung" eine zutreffendere Bezeichnung. Da sich aber in den Wirtschaftswissenschaften die Bezeichnung „Kontrolltheorie" weitgehend durchgesetzt hat, schließen wir uns diesem Gebrauch an.

Die notwendigen – und unter gewissen Zusatzvoraussetzungen auch hinreichenden – Optimalitätsbedingungen für Kontrollprobleme bilden das sogenannte *Pontrjaginsche Maximumprinzip.* Sie bilden ein dynamisches Analogon zu den Kuhn-Tucker-Bedingungen der (statischen) nichtlinearen Programmierung. Ziel des Buches ist eine Einführung in die vielfältigen Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften. Wir sind davon überzeugt, daß das Verständnis für intertemporale Entscheidungsprobleme und deren Lösungsmöglichkeiten in Wirtschaft, Technik und Verwaltung von zunehmender Bedeutung ist. Die aktuellen Thematiken der Umwelterhaltung und der Ausbeutung erschöpfbarer Ressourcen sind ebenso wie klassische Probleme der Unternehmensplanung typische Kontrollprobleme.

Um den Rahmen nicht zu sprengen, haben wir uns auf deterministische Modelle und einen Entscheidungsträger beschränkt, wobei die stetige Betrachtungsweise gewählt wurde. Unser Bestreben war es dabei, eine für den Anwender nützliche Theorie geschlossen darzustellen. Erweiterungen und Varianten (stochastische sowie diskrete Kontrollprobleme, Spielsituationen u.a.) werden in den Anhängen behandelt.

Das vorliegende Buch richtet sich primär an Betriebs- und Volkswirte, angewandte Mathematiker und Operations Researcher. Ferner ist es für Vertreter von Disziplinen von Interesse, in denen mit dynamischen Modellen gearbeitet wird, wie Ingenieure, Biologen etc. Der Leser sollte über Grundkenntnisse der Analysis, insbesondere über gewöhnliche Differentialgleichungen[1], und lineare Algebra verfügen.

Das Buch ist sowohl als Lehrbuch gedacht als auch als Nachschlagewerk für ökonomische Anwendungen der Kontrolltheorie, in dem wesentliche Teile der existierenden Literatur einheitlich dargestellt sind. Diese Zielsetzung erklärt auch den Umfang des Buches. Dem heterogenen Leserkreis und dem Anwendungscharakter des Buches entsprechend sind die verwendeten mathematischen Methoden so einfach wie möglich gehalten. Allerdings waren wir stets um mathematische Exaktheit bemüht; die Resultate werden entweder bewiesen oder es wird Literatur angegeben, in welcher man Beweise findet.

Im Unterschied zu den existierenden Lehrbüchern über ökonomische Anwendungen der optimalen Kontrolltheorie werden hier *Pfadrestriktionen* umfassend behandelt. Zur Analyse von Modellen mit reinen Zustandsnebenbedingungen verwenden wir einheitlich die „direkte Methode“, da sie uns am handlichsten und ökonomisch am besten interpretierbar erscheint. Ferner wählen wir stets die einfachste Modellformulierung und Lösungsmethode ohne Rücksicht darauf, ob in der Originalarbeit Variationsmethoden, das Maximumprinzip oder der Greensche Integralsatz, die Lagrange-, Mayer- oder Bolza-Form, die present- oder current-value-Formulierung verwendet wurde. Ein weiteres Charakteristikum besteht in der systematischen Behandlung nichtlinearer Kontrollmodelle im Phasenraum mit Erweiterungen auf den höherdimensionalen Fall in § 5. Ferner widmen wir uns einer Reihe von Fragestellungen, die in der Literatur bisher eher stiefmütterlich behandelt wurden. Dazu gehören die dynamische Sensitivitätsanalyse (§ 4.4), die globale Existenz von Sattelpunktspfaden und die Bestimmung optimaler Lösungen bei mehrfachen Gleichgewichten (§ 4.5). Schließlich geben wir eine Übersicht über numerische Verfahren zur Lösung von Kontrollproblemen. Mehrere Fallstudien werden numerisch gelöst, wobei die Resultate graphisch aufbereitet sind.

Das Buch enthält eine Reihe durchgerechneter Beispiele und Modelle, nach deren Bearbeitung der Leser in der Lage sein sollte, dynamische Entscheidungsprobleme eigenständig zu formulieren und zu lösen. Durch Variieren von Modellannahmen

[1] Mehr als ausreichend sind Kenntnisse im Umfang des Buches von *Knobloch* und *Kappel* (1974).

werden Einblicke in den Modellmechanismus und die Lösungsstruktur gewonnen. Bei der vorhandenen Literatur haben wir großzügig Anleihen gemacht. Andererseits enthält das Buch auch eine Reihe neuer, eigener Modelle und Resultate. Um den Leser zur weiteren Beschäftigung anzuregen, wurde jedes Kapitel mit vielen Übungsbeispielen ausgestattet und in weiterführenden Bemerkungen auf ergänzende Literatur hingewiesen.

Der vorliegende Text ist die letzte von mehreren Versionen, die wir im Laufe des letzten halben Jahrzehnts verfaßt haben. Das Manuskript wurde in einer Reihe von Lehrveranstaltungen erprobt und verbessert. Schließlich hat sich folgender Aufbau als zweckmäßig ergeben:

Nachdem in Teil I das Pontrjaginsche Maximumprinzip für ein Standardproblem vorgestellt wird, enthält Teil II Bausteine zu einer formal orientierten Strukturanalyse von linearen und nichtlinearen Modellen. In Teil III werden Erweiterungen des Standardmodells (Pfadrestriktionen und Endbedingungen) untersucht. Nach diesen formal orientierten Kapiteln bringt Teil IV Fallstudien aus diversen Bereichen des Operations Research und der Wirtschaftswissenschaften. Schließlich enthält der Anhang eine Reihe von Ergänzungen und Ausblicken (numerische Methoden, diskretes Maximumprinzip, Systeme mit verteilten Parametern, Differentialspiele, stochastische Kontrolltheorie, hierarchische Systeme u.a.).

Dem Anfänger, der das Gebiet der Kontrolltheorie mit kleinem mathematischen Marschgepäck erkunden will, sei als Einstieg die Lektüre der ersten vier Kapitel des Buches empfohlen. Der fortgeschrittene „Wanderer“ wird sich nach Überschreitung dieser Vorgipfel in die dahinterliegende „Bergwelt“ wagen, deren Wege allerdings oft mühsam sind. Der vorliegende „Wanderführer“ stellt in Teil III das dazu benötigte Rüstzeug zusammen und zeigt in Teil IV verschiedene Richtungen auf, in denen es für Fortgeschrittene auch Neuland zu erforschen gibt.

Um die Verständlichkeit zu steigern, haben wir mit Abbildungen nicht gespart, für deren sorgfältige Anfertigung wir Wilhelm Nowak zu Dank verpflichtet sind.

Für die Durchsicht des gesamten Manuskriptes danken wir Gerhard Sorger. Von seinen Verbesserungsvorschlägen haben wir sehr profitiert. Die numerischen Berechnungen zur Lösung nichtlinearer Randwertprobleme hat Alois Steindl durchgeführt. Ihm verdanken wir auch die Anfertigung der Computerabbildungen.

Für intensive Diskussionen über die verwendeten Methoden und ihre Anwendungen sind wir Alfred Luhmer, Philippe Michel, Atle Seierstad und Knut Sydsaeter zu Dank verpflichtet. Ihre kritischen Hinweise wurden an vielen Stellen des Buches berücksichtigt.

Die folgenden Kollegen haben Teile des Manuskriptes durchgesehen und uns bei der Ausmerzung von Unstimmigkeiten unterstützt: Horst Albach, Roland Bulirsch, Klaus Conrad, Engelbert Dockner, Werner Jammernegg, Steffen Jørgensen, Hans Knobloch, Johannes Krauth, Paul van Loon, Reinhard Neck, Jürgen Ringbeck, Geert van Schijndel, Reinhard Selten, Hermann Simon und Richard Weiß.

Für weitere Hinweise und Diskussionen danken wir: Peter Brandner, Felix Breitenecker, Chaim Fershtman, Frank Lempio, George Leitmann, Mikulas Luptacik, Alexander Mehlmann, Hans Oberle, Werner Oettli, Hans Ravn, Suresh Sethi, Inge Troch, Hans-Jörg Wacker und Joachim Warschat.

Aus Quantität und Qualität der hier angeführten Personen wird deutlich, daß unser Buch keine Fehler mehr enthalten kann. Sollten dennoch solche entdeckt werden, macht jeder der beiden Autoren seinen Koautor sowie die genannten Kollegen kollektiv dafür verantwortlich.

An dieser Stelle sei auch dem Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung Österreichs für teilweise Unterstützung im Rahmen des Projektes S 3204 (*Dynamische Unternehmensmodelle*) gedankt. Last but not least ist es uns ein Bedürfnis, Maria Toda für die sorgfältige Anfertigung mehrerer Manuskriptversionen zu danken.

Wien, im September 1986 Die Verfasser

Die folgende Tabelle gibt an, welche Abschnitte für das Verständnis der einzelnen Kapitel notwendig sind bzw. empfohlen werden.

Kapitel	notwendige Voraussetzungen	empfohlene Abschnitte
1	–	–
2	–	1
3	2	–
4	2	3
5	2, 4	–
6	2	–
7	6	–
8	4, 6, 7	3
9	6, 7.1, 8	3, 4, 5.4
10	2, 3, 4	–
11	2, 3.3, 4	–
12	3.3, 4, 6, 7	8
13	3, 4, 6, 7, 8	14, 15
14	3, 4, 6	7, 8, 13.2
15	2, 3.3, 4, 5	6, 13.2
16	–	–

Inhaltsverzeichnis

Teil I Das Maximumprinzip: Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen

Der I. Teil des Buches enthält eine elementare Darstellung des Pontrjaginschen Maximumprinzips. Nach Präsentation einiger motivierender Beispiele für intertemporale Entscheidungsprozesse aus verschiedenen Bereichen der Ökonomie (Kap. 1) werden in Kap. 2 die Optimalitätsbedingungen für ein Standardmodell formuliert und heuristisch (über die dynamische Programmierung) bewiesen. Von der Einbeziehung der für viele ökonomische Problemstellungen wichtigen Pfadnebenbedingungen wird dabei zunächst abgesehen, um den Zugang zu vereinfachen. Eine Behandlung dieser Erweiterungen bleibt Teil III vorbehalten. Zentrales Interesse beansprucht hingegen die ökonomische Interpretation der Optimalitätsbedingungen. Eine Reihe von durchgerechneten Beispielen und Übungsbeispielen rundet den ersten Teil ab.

Kapitel 1: Dynamische Entscheidungsprozesse

Hauptanliegen des Operations Research ist es, aus einer Palette von Handlungsmöglichkeiten jene herauszufinden, mit denen ein oder mehrere gewünschte Ziele erreicht werden. Typisch ist dabei das Vorliegen von Restriktionen, denen sich der Entscheidungsträger bei der Auswahl seiner Aktionen gegenübersieht. Viele Entscheidungsprobleme haben *dynamischen Charakter*, d.h. der Zeitablauf spielt bei ihrer Behandlung eine Rolle. In solchen Situationen ist für den Erfolg von Entscheidungen deren richtiges Timing von wesentlicher Bedeutung.

Wir beschäftigen uns hier mit kontinuierlichen dynamischen Systemen – ökonomischer, technischer, biologischer oder anderer Art – die sich im *Zeitablauf* unter dem Einfluß von Aktionen eines Entscheidungsträgers entwickeln. Die Steuerung des Systems soll dabei in gewünschtem Sinn erfolgen, d.h. es ist unter Einhaltung bestimmter Nebenbedingungen eine gegebene Zielfunktion zu maximieren. Die *optimale Kontrolltheorie* (Theorie der optimalen Steuerung) beschäftigt sich mit der Steuerung dynamischer Systeme im Hinblick auf die Erreichung gewünschter Ziele. Im folgenden wird diese Theorie dargestellt und dabei besonderer Wert auf die Erläuterung von Anwendungen des *deterministischen Maximumprinzips* auf sequentielle Entscheidungsprobleme gelegt, welche im Operations Research und in der Ökonomie auftreten. Das Maximumprinzip bietet im Vergleich zur dynamischen Programmierung den Vorteil, oft ohne größeren Rechenaufwand *qualitative* Einsichten in die Struktur der Lösungspfade zu ermöglichen. Dadurch ist man häufig schon ohne numerische Auswertungen in der Lage, wertvolle Aufschlüsse für ökonomische Analysen zu gewinnen, während analytische Lösungen realitätsbezogener dynamischer Entscheidungsprobleme eher Ausnahmefälle darstellen.

In Abschnitt 1.1 wird zunächst erläutert, worin ein Kontrollproblem besteht. Die Begriffsbildungen Zustands-, Kontrollvariable, Zielfunktional, Bewegungsgleichung, Nebenbedingungen werden in 1.2. anhand von fünf typischen intertemporalen Entscheidungsprozessen illustriert. Daran anschließend wird ein historischer Überblick über Lösungsverfahren für Kontrollprobleme gegeben.

1.1. Das Kontrollproblem

Ein System kann im Zeitablauf verschiedene Zustände annehmen. In der *Zustandsvariablen* des Systems werden jene Variablen zusammengefaßt, welche das Verhalten des Systems beschreiben. Der Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt enthält jene Informationen über die bisherige Entwicklung des Systems, welche nötig sind, um sich von diesem Zeitpunkt an optimal zu verhalten.

Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst an, daß sich das Systemverhalten mittels einer einzigen Zustandsvariablen $x(t)$ charakterisieren lasse, welche den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t angeben soll.

In jedem Zeitpunkt kann der Entscheidungsträger den Wert einer *Kontrollvariablen* $u(t)$ wählen, mit welcher es möglich ist, die Entwicklung des Systems zu *steuern.*

Der Eingriff in das Systemgeschehen beeinflußt die Zustandsentwicklung durch die *Bewegungsgleichung*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t). \tag{1.1}$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ die Ableitung von x nach t.

Der Zustand in t bestimmt also gemeinsam mit der Steuerung in diesem Zeitpunkt die zeitliche Änderungsrate der Zustandsvariablen mittels der gegebenen Funktion f. Gemeinsam mit einer Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

bestimmt die Wahl einer Kontrolltrajektorie u in einem Zeitintervall $0 \leqq t \leqq T$ den zugehörigen Zustandspfad x im selben Zeitintervall als Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung (1.1). Da es sinnvoll ist, $u(t)$ aus der Klasse der stückweise stetigen Funktionen zu wählen, genügt $x(t)$ der Bewegungsgleichung (1.1) nur an den Stetigkeitsstellen von $u(t)$. An den Unstetigkeitsstellen von $u(t)$ werden die differenzierbaren Teile der Zustandstrajektorie in stetiger Weise aneinandergestückelt.

Nicht alle Pfade $(x(t), u(t))$ sind gleich wünschenswert. Es sei $F(x(t), u(t), t)$ die im Zeitpunkt t erzielte Nutzenrate in Abhängigkeit von $x(t)$ und $u(t)$. Der mit einer konstanten Rate r auf den Zeitpunkt Null diskontierte aggregierte Nutzenstrom ist dann gegeben durch

$$J = \int_0^T e^{-rt} F(x(t), u(t), t)\, dt + e^{-rT} S(x(T), T). \tag{1.3}$$

Bei der Interpretation von F als Nutzenfunktion bezeichnet r die subjektive Zeitpräferenzrate des Entscheidungsträgers. Vielfach wird F in Geldeinheiten gemessen (z.B. Gewinn); in diesem Fall repräsentiert r den interenen Verrechnungszinssatz. Der Diskontfaktor $\exp(-rt)$ stellt das stetige Analogon von $(1+r)^{-t}$ dar (vgl. Übungsbeispiel 1.1). In (1.3) bezeichnet $S(x(T), T)$ den Restwert des Prozesses, der dem Zustand $x(T)$ am Ende des Planungszeitraumes zugeordnet ist.

Das *optimale Kontrollproblem* lautet dann: man wähle einen stückweise stetigen Zeitpfad der Kontrollvariablen $u(t)$ in $0 \leqq t \leqq T$, welcher gemeinsam mit der aus (1.1), (1.2) resultierenden Zustandstrajektorie den Wert des Zielfunktionals aus (1.3) maximiert. Es kann sinnvoll sein, die Kontrollvariable auf eine Menge zulässiger Werte einzuschränken, welche zunächst in der Form

$$u(t) \in \Omega \tag{1.4}$$

vorliegen soll. Dabei ist Ω eine Teilmenge der reellen Zahlen. Die Lösungsmethode zu diesem Standardmodell wird in Abschnitt 2.1 dargestellt. Häufig unterliegt die Kontrollvariable auch einer Beschränkung, welche vom Zustand abhängt, d.h.

$$g(x(t), u(t), t) \geqq 0. \tag{1.5}$$

Probleme mit Nebenbedingungen der Gestalt (1.5) werden in Abschnitt 6.1 behandelt. Reine Zustandsnebenbedingungen, bei denen (1.5) die Kontrolle $u(t)$ nicht enthält, erweisen sich als schwieriger zu behandeln; vergleiche dazu Abschnitt 6.2.

In manchen Fällen ist es sinnvoll, einen unendlichen Planungshorizont $T=\infty$ anzunehmen. In diesem Fall besteht (1.3) aus einem uneigentlichen Integral und der Restwertterm verschwindet; vergleiche dazu Abschnitt 2.6.

1.2. Motivierende Beispiele

Die konstituierenden Begriffe dynamischer Systeme werden nun anhand von fünf Modellbeispielen erläutert. An dieser Stelle kommt es dabei nur auf die Interpretation der Funktionen und Parameter an; eine Lösung der beschriebenen optimalen Entscheidungsprobleme erfolgt später.

Beispiel 1.1. Instandhaltungs-Produktionsplanung

Ein typisches Problem des Operations Research besteht in der simultanen Ermittlung der optimalen Produktions- und Instandhaltungspolitik sowie der wirtschaftlichen Nutzungsdauer maschineller Produktionsanlagen. Es sei t das Alter einer Anlage und T ihr Verkaufsdatum. Führt man keine vorbeugenden Instandhaltungsaktionen durch, so soll sich der Zustand der Maschine, gemessen etwa an ihrem Verkaufswert $x(t)$, infolge technischer Obsoleszenz $\gamma(t)$ und der Verschleißrate $\delta(t)$ vermindern. Dieser Zustandsverschlechterung kann durch vorbeugende Instandhaltung entgegengewirkt werden. Der Einfluß der Instandhaltungsausgaben $u(t)$ auf die Zustandsänderung der Maschine werde durch eine gegebene *Effizienzfunktion* $g(u(t), t)$ gemessen, welche neben $u(t)$ auch explizit vom Alter der Maschine abhängt. Legt man die Produktionsrate exogen fest, so verändert sich der Maschinenverkaufswert gemäß folgender Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t) - \delta(t)\,x(t) + g(u(t), t). \tag{1.6}$$

Als Beurteilungskriterium der Instandhaltungsmaßnahmen dient der Barwert der Maschine. Dieser besteht aus den aufaddierten diskontierten Einnahmeüberschüssen (Produktionserlöse minus Produktionskosten) abzüglich der laufenden Instandhaltungsausgaben. Am Ende der Betriebsperiode fällt noch der diskontierte Verkaufswert der Anlage an. Dies liefert das Zielfunktional

$$J = \int_0^T e^{-rt}[q(t)\Phi(x(t)) - u(t)]\,dt + e^{-rT}x(T). \tag{1.7}$$

In (1.7) ist unterstellt, daß eine Maschine im Zustand $x(t)$, welche mit der Rate $q=1$ produziert, pro Zeiteinheit $\Phi(x(t))$ Geldeinheiten Produktionsgewinn abwirft. $q(t)$ ist dabei etwa die von einer Maschine im Alter t pro Zeiteinheit produzierte Stückzahl; der Produktionsgewinn pro Stück wird sinnvollerweise als geeignete Funktion Φ des Wiederverkaufswertes x der Maschine angesetzt.

Der Verkaufswert der Maschine, ihr „Zustand“, bildet die Zustandsvariable $x(t)$; $x(0) = x_0$ ist der gegebene Neuwert der Anlage, die Instandhaltungsrate $u(t)$ die Steuervariable. Die Maximierung der Zielfunktion (1.7) stellt ein optimales Kontrollproblem mit der dynamischen Nebenbedingung (1.6) dar. γ, δ und q sind vorgegebene Funktionen des Alters t, g hängt neben t auch noch von u ab. Es ist plausibel, γ und δ als mit t nicht abnehmend, q hingegen als nicht zunehmend vorauszusetzen. Die Instandhaltungseffizienz $g(u, t)$ wird üblicherweise konkav in der Steuervariablen u und monoton abnehmend in t angenommen.

Im Falle $g(u, t) = g(t)\,u(t)$ liegt ein in u *lineares* Kontrollproblem vor. Oft ist es realistisch, die Instandhaltungsausgaben in t auf ein Intervall zu beschränken, das der Einfachheit halber als zeitunabhängig angenommen wird:

$$u(t) \in \Omega = [0, u] \quad \text{für alle} \quad t \in [0, t]. \tag{1.8}$$

Im allgemeinen Fall ist das Verkaufsdatum der Maschine nicht fest vorgegeben, sondern seinerseits optimal zu bestimmen. Siehe Kap. 2.7 für eine Lösung derartiger Modelle.

In einer anderen Interpretation des Instandhaltungsmodells bezeichnet $x(t)$ die Produktionskapazität; $\Phi(x)$ ist die Nettoproduktion; der Restwert in (1.7) ist dabei durch den Ausdruck $\exp(-rt)\,S(x(T), T)$ zu ersetzen.

Eine interessante Erweiterung des skizzierten Instandhaltungsmodells erhält man, wenn die Produktionsrate q der Maschine als Kontrollinstrument v eingesetzt werden kann. Je höher die Produktionsrate $v(t)$, desto höher ist der Verschleiß der Maschine, d.h. die Bewegungsgleichung (1.6) erweitert sich zu

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t) - \delta(t)\,x(t) + g(u(t), t) - k(v(t), t). \tag{1.9}$$

$k(v, t)$ mißt dabei die altersspezifische Auswirkung von $v(t)$ auf die Zustandsänderung. Naturgemäß ist $v(t) \geqq 0$. Es ist plausibel, die „Diseffizienz“ k als konvex in v und monoton wachsend in t anzusetzen.

Es liegt nun ein optimales Kontrollproblem mit zwei Steuerinstrumenten, nämlich $u(t)$ und $v(t)$, und einer Zustandsvariablen, $x(t)$, vor. Das heißt, es stellt sich die Frage, wie Instandhaltungs- und Produktionspolitik intertemporal festzulegen sind, damit der Gegenwartswert des Nettoerlösstromes (1.7) möglichst groß wird. Dem momentanen Gewinnzuwachs, welchen man sich durch erhöhte Betriebsgeschwindigkeit verschafft, stehen künftige Profiteinbußen aufgrund der Abnützung der Maschine gegenüber. Andererseits verursachen Instandhaltungsinvestitionen zwar heute Kosten, bewirken jedoch eine Verringerung des Verschleißes und damit Aussicht auf künftige Erträge aus dem Betrieb der Produktionsanlage.

In Kapitel 10 werden verschiedene Varianten dieses Instandhaltungsmodelles gelöst.

Beispiel 1.2. Optimale Produktion und Lagerhaltung

Angenommen, eine Firma habe eine gegebene Nachfrage eines Gutes zu erfüllen. Um dieser Verpflichtung zu genügen, kann sie das Gut produzieren bzw. bestellen. Überschußproduktion wird dabei auf Lager gelegt. Es bezeichne $d(t)$ die Nachfragerate, $v(t)$ die Produktions- (bzw. Bestell-)rate und $z(t)$ den Lagerbestand zum Zeitpunkt t. Die Änderung des Lagerstocks als Differenz zwischen produzierter Menge und Nachfrage zur Zeit t ergibt sich als:

$$\dot{z}(t) = v(t) - d(t). \tag{1.10}$$

$z(t)$ ist die Zustandsvariable, $v(t)$ die Steuervariable; (1.10) stellt die Bewegungsgleichung dar, wobei das Ausgangslager $z(0) = z_0$ vorgegeben sein soll. Will die Firma stets lieferfähig sein, d. h. will sie die Nachfrage aus der Produktion oder dem Lager decken, so hat sie die Zustandspfadnebenbedingung

$$z(t) \geqq 0 \tag{1.11}$$

für alle $t \in [0, T]$ zu stellen.

Weiters wird man die (nichtnegative) Produktionsrate v infolge von Kapazitätsbegrenzungen auch als nach oben beschränkt annehmen ($\bar{v}$ ... maximale Produktionsrate):

$$0 \leqq v(t) \leqq \bar{v} \tag{1.12}$$

An Kosten fallen die Produktions-(Bestell-)Kosten $c(v, t)$ an, sowie die Lagerhaltungskosten $h(z, t)$. Ziel des Unternehmens ist es, die in einem gegebenen Planungsintervall $[0, T]$ insgesamt anfallenden Kosten zu minimieren, d. h. das Zielfunktional

$$J = -\int_0^T [c(v(t), t) + h(z(t), t)]\, dt \tag{1.13}$$

zu maximieren, wobei (1.10) als Bewegungsgleichung fungiert und die Beschränkungen (1.11, 12) erfüllt sein sollen. $d(t)$ ist eine exogen vorgegebene Entwicklung der Nachfrage.

An den Endzustand $z(T)$ können zusätzlich Bedingungen gestellt werden. Nimmt man etwa $d(t) = 0$ an und verlangt $z(T) = B$, so hat man den optimalen Produktionsplan einer Firma zu ermitteln, welche B Einheiten eines Produktes nach T Zeiteinheiten zu liefern hat.

In Kap. 9 werden verschiedene Varianten dieses Lagerhaltungsmodelles präsentiert.

Beispiel 1.3. Optimale Kapitalakkumulation

In einer Volkswirtschaft sei der Kapitalstock $K(t)$ der einzige Produktionsfaktor; der daraus resultierende Output sei $F(K)$. Der produzierte Output wird entweder konsumiert oder investiert; $C(t)$ sei der Konsum, $I(t)$ die Investition. K verändere sich aufgrund der Abschreibungsrate δ und durch die Bruttoinvestitionsrate I. Ferner sei $U(C)$ der Nutzen, welcher der Gesellschaft durch den Konsum C erwächst. Schließlich bezeichne r die Rate, mit welcher zukünftiger Nutzen im Vergleich zur Gegenwart diskontiert wird. Ziel einer zentralen Planungsbehörde sei die Maximierung des totalen, auf den Zeitnullpunkt bezogenen Nutzenstromes. Kontrollinstrument der Behörde ist dabei der Konsumpfad $C(t)$ innerhalb eines gegebenen Planungszeitraumes $[0, T]$.

Als Zustandsvariable fungiert der Kapitalstock $K(t)$, dessen Änderung durch folgende Zustandstransformationsgleichung beschrieben wird:

$$\dot{K}(t) = F(K(t)) - C(t) - \delta K(t). \tag{1.14}$$

Die ursprüngliche Kapitalausstattung, $K(0) = K_0$, sei gegeben.

Aufgabe der für T Jahre im Amt befindlichen Planungsinstanz ist die Maximierung von

$$J = \int_0^T e^{-rt} U(C(t))\,dt + e^{-rT} S(K(T)). \tag{1.15}$$

Dabei bewertet die Restwertfunktion S den am Planungsende verfügbaren Kapitalstock $K(T)$. Im vorliegenden Modell soll zu jedem Zeitpunkt höchstens der produzierte Output konsumiert werden, d.h., die Steuervariable $C(t)$ ist durch folgende vom Zustand abhängige Nebenbedingung beschränkt (vgl. (1.5)):

$$0 \leqq C(t) \leqq F(K(t)). \tag{1.16}$$

Über die gegebene Produktions-, Nutzen- und Restwertfunktion sind geeignete Voraussetzungen zu treffen (Konkavität).

Dieses Kapitalakkumulationsmodell wird in Kapitel 13 behandelt.

Beispiel 1.4. Optimale Investition

Wir betrachten eine Unternehmung, welche ein Gut produziert und auf einem Produktmarkt unter vollständiger Konkurrenz zu konstantem Preis p verkauft. Bei Herstellung des Gutes werden zwei Produktionsfaktoren benützt, nämlich Kapital K und Arbeit L. Die produzierte (abgesetzte) Menge wird durch die Produktionsfunktion $F(K, L)$ beschrieben. Das Kapital wird entwertet mit einer als konstant unterstellten Abschreibungsrate δ. Als Steuergröße dient die Bruttoinvestitionsrate $I(t)$; deren Auswirkung auf die Nettoinvestitionen bildet die Systemdynamik

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{1.17}$$

Wegen $F = C + I$ ist (1.17) im wesentlichen identisch mit (1.14).

Während aber der Kapitalstock über die (Brutto-)Investitionen gesteuert wird, ist die Unternehmung in der Lage, den zweiten Produktionsfaktor, nämlich den Beschäftigtenstand $L(t)$, direkt zu wählen. In einer realitätsnäheren Modellvariante, welche dann allerdings neben K eine weitere Zustandsvariable L enthält, wird L über die Einstellungs- bzw. Entlassungsrate gesteuert (siehe Übungsbeispiel 1.4).

Unterstellt man eine konstante Lohnrate w und Investitionskosten $c(I)$, so beträgt die laufende Profitrate

$$pF(K(t), L(t)) - c(I(t)) - wL(t).$$

Nimmt man an, daß die Firma künftige Gewinne um die Zinsrate r diskontiert, so stellt sich ihr – ausgehend von einer Anfangskapitalausstattung $K(0) = K_0$ – das Problem, jenes Investitionsprogramm und Beschäftigungsniveau zu wählen, welches den Barwert des totalen Profits maximiert:

$$\max_{I,L} \int_0^\infty e^{-rt}[pF(K(t), L(t)) - c(I(t)) - wL(t)]\,dt. \tag{1.18}$$

Die Unternehmung sieht sich somit einem Kontrollproblem mit einer Zustandsvariablen, $K(t)$, und zwei Kontrollen, $I(t)$ und $L(t)$, gegenüber.

Man beachte, daß hier kein Endzeitpunkt ausgezeichnet wurde, sondern ein Planungsintervall unendlicher Dauer, $T = \infty$, angenommen wurde (vgl. Abschnitt 2.6). In einem solchen Fall ist es sinnlos, eine Restwertfunktion heranzuziehen. Die Bruttoinvestitionsrate ist als nicht negativ anzunehmen (Desinvestitionen seien nicht zugelassen); häufig ist auch eine Investitionsobergrenze $\bar{I}$ sinnvoll:

$$0 \leqq I(t) \leqq \bar{I} \tag{1.19}$$

Falls L als konstant vorgegeben ist, erhält man ein einfaches dynamisches Investitionsmodell, welches in verschiedenen Gebieten angewendet wurde, so im Marketing (vgl. Übungsbeispiel 1.5 und Kap. 11), im Umweltschutz (vgl. Übungsbeispiel 1.7 und Kap. 15) u.a.m. Als Fazit erkennen wir, daß ein und dasselbe formale Modell bzw. Spezialfälle davon für inhaltlich verschiedene dynamische Entscheidungsprobleme verwendbar sind.

Beispiel 1.5. Der risikoscheue Dieb

Angenommen, ein Dieb stiehlt solange, bis ihm die Polizei das Handwerk legt. Es sei $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Dauer der Diebeskarriere. $\frac{\dot{F}(t)}{1 - F(t)} = \phi(t)$ gibt die Rate an, mit welcher der Dieb festgenommen wird. Je intensiver sich der Dieb seinem Geschäft widmet, desto höher ist sein Festnahmerisiko. Wir nehmen an, daß die „Stehlintensität" $u_1(t)$ des Diebes die Festnahmerate (linear) beeinflusse, $\phi(t) = h(t)u_1(t)$, wobei $h(t)$ eine gegebene nichtnegative Funktion sei. Dann gilt für die Änderung der als Zustandsvariable fungierenden Verteilungsfunktion

$$\dot{F}(t) = h(t)u_1(t)[1 - F(t)]; \quad F(0) = 0. \tag{1.20}$$

Zur Festsetzung des Zielfunktionals unterscheiden wir drei Fälle für einen beliebigen Zeitraum t der Planungsperiode $[0, T]$ des Diebes:

- Falls der Dieb bis zum Zeitpunkt t noch nicht dingfest gemacht ist – dies ist mit Wahrscheinlichkeit $1 - F(t)$ der Fall – entspricht seiner Wahl von $u_1(t)$ ein Nutzen von $U(u_1)$. Nehmen wir an, daß der Dieb risikoscheu ist, d. h. der marginale Nutzen nimmt mit einer Ausweitung seiner Tätigkeit ab.
- Falls der Dieb zur Zeit t gerade ergriffen wird (mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\dot{F}(t)$), erleide er einen Schaden in der Höhe von σ_1 (gemessen in derselben Einheit wie der Nutzen $U(u_1)$.
- Der mit Wahrscheinlichkeit $F(t)$ bereits arretierte Dieb bedauert seine Bestrafung mit der Rate π_1 (ebenfalls ausgedrückt in Nutzeneinheiten).

Mit der Diskontrate r_1 liefert dies das Nutzenfunktional

$$J_1 = \int_0^T e^{-r_1 t} [U(u_1(t))(1 - F(t)) - \sigma_1 \dot{F}(t) - \pi_1 F(t)] \, dt, \tag{1.21}$$

welches der Dieb unter der dynamischen Nebenbedingung (1.20) maximieren möchte. $u_1(t)$ ist sein Kontrollinstrument, welches gegebenenfalls durch eine Restriktion der Form (1.8) eingeschränkt ist. Falls T das Lebensende des Diebes bezeichnet, verschwindet der Restwert des Prozesses.

Angenommen, die Polizei tritt als Kontrahent des Diebes auf. Das heißt sie ist mit der Rate $u_2(t)$ bestrebt, die Karrieredauer des Diebes zu verkürzen. Charakteristisch für die Situation ist die Tatsache, daß der Zustand (hier: die Verteilungsfunktion) von den beiden Gegnern beeinflußt wird:

$$\dot{F}(t) = h u_1(t) u_2(t)(1 - F(t)); \; F(0) = 0. \tag{1.22}$$

Die Stehlrate u_1 bringt dem Dieb Nutzen; die Nachforschungsrate u_2 der Polizei verursacht Kosten $C(u_2)$. Den bei der Arretierung des Diebes erzielten Nutzen der Polizei bezeichnen wir mit σ_2, während π_2 die Nutzenrate sei, mit welcher die Polizei den dingfest gemachten Dieb bewertet (π_2 könnte infolge der laufenden Gefängniskosten auch negativ sein). Mit der Diskontrate r_2 stellt somit

$$J_2 = \int_0^T e^{-r_2 t} [-C(u_2(t))(1 - F(t)) + \sigma_2 \dot{F}(t) + \pi_2 F(t)] \, dt \tag{1.23}$$

das Zielfunktional der Polizei dar. Beide Kontrahenten wollen ihr Nutzenfunktional maximieren, wobei sie aber gemäß (1.22) durch ihre Entscheidungen die Situation ihres Gegenspielers beeinflussen. Dieses Beispiel wurde gewählt, um in das Gebiet *dynamischer Spiele (Differentialspiele)* einzuführen.

Im Unterschied zu Kontrollmodellen, wo ein Entscheidungsträger unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung trachtet, sein Zielfunktional zu maximieren, treten bei Differentialspielen mehrere (hier: zwei) Gegenspieler auf, welche durch ihre Entscheidungen das eigene Zielfunktional, i. a. aber auch jenes des Kontrahenten sowie die Systemdynamik beeinflussen.

Dies bewirkt, daß bei Differentialspielen – ebenso wie bei statischen Spielen – verschiedene Lösungskonzepte eine Rolle spielen (Pareto-, Nash-, Stackelberg-Gleichgewichte); vergleiche dazu Anhang A.7.

In all diesen Beispielen manifestiert sich die typische Problematik bei dynamischen Entscheidungsprozessen, die in der Abwägung des heute möglichen Nutzens gegenüber künftigen Profiten besteht. So erhebt sich etwa in Beispiel 1.3 die Frage, in welchem Ausmaß der momentane Konsumnutzen im Hinblick auf künftige Gewinne, welche aus dem nichtkonsumierten Output (den Investitionen) resultieren, geopfert werden soll. In Beispiel 1.4: In welchem Ausmaß sollen in einem bestimmten Moment Investitionen getätigt werden, welche zwar Kosten verursachen, danach aber über Kapitalstock und Produktion Gewinne zu erwirtschaften helfen. Die optimale Ausbalancierung zwischen heutigen Investitionen und künftigen Profiten (trade-off Problem) erfolgt mittels der Bewertung des Kapitalstocks bezogen auf seinen künftigen optimalen Einsatz. Das im nächsten Kapitel behandelte Maximumprinzip stellt diese Bewertung in Form des *Schattenpreises* zur Verfügung, welcher angibt, um wieviel der Nutzen bei Besitz einer zusätzlichen Kapitaleinheit ansteigt.

1.3. Lösungskonzepte und historische Bemerkungen

Die optimale Kontrolltheorie hat ihre Wurzeln in der *Variationsrechnung* (siehe Abschnitt 2.4). Diese reicht ihrerseits auf die isoperimetrischen Problemstellungen der alten Griechen zurück. Nach der Herleitung des Brechungsgesetzes durch *Fermat* als Minimalzeitproblem (1662) löste *Issac Newton* 1685 das Problem der optimalen Gestalt eines Körpers, der bei Bewegung in einem Medium einen möglichst geringen Widerstand bieten soll (vgl. auch *Goldstine*, 1980). Berühmtheit hat das Brachistochronen-Problem von *Johann I. Bernoulli* erlangt, welcher 1696/7 die „scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises" aufforderte, den zeitminimalen Pfad eines Massenpunktes zwischen zwei gegebenen Punkten unter Einfluß der Schwerkraft und unter Vernachlässigung der Reibungskräfte zu bestimmen. Die *Bernoulli*-Dynastie, *Euler* und *Lagrange* haben wesentlich zur Entwicklung der Variationsrechnung beigetragen. Im 19. Jahrhundert wurde sie von *Hamilton*, *Weierstrass* und *Jacobi* weiterentwickelt. Die daraus resultierenden Methoden der analytischen Mechanik (z.B. Hamiltonsche Systeme) haben mehr als hundert Jahre später bei der „Dynamisierung der Wirtschaftswissenschaften" eine Rolle gespielt (eine Übersicht über diese Entwicklung gibt *Magill*, 1970, § I).

Die erste Anwendung der Variationsrechnung auf ein intertemporales ökonomisches Entscheidungsproblem geht auf *Evans* (1924) zurück, der die dynamische Preispolitik eines Monopolisten untersucht hat. *Ramsey* (1928) hat ein neoklassisches Kapitalakkumulationsmodell behandelt, während *Hotelling* (1931) die optimale Ausbeutung einer erschöpfbaren Ressource analysiert.

Eine Überleitung zur Kontrolltheorie haben die amerikanischen Mathematiker *Valentine*, *McShane* und *Hestenes* geleistet, indem sie Ungleichungsbeschränkungen miteinbezogen.

In den Fünfzigerjahren hat die Schule um *L. S. Pontrjagin* (*Boltjanskij*, *Gamkrelidze* und *Mischenko*) die moderne Kontrolltheorie begründet. Sie führten explizit den Begriff der Steuervariablen ein und lieferten einen ersten Beweis des Maximumprinzips. Vorläufer waren *Fel'dbaum* und *Bushaw*.

Parallel dazu wurde in den Vereinigten Staaten die *dynamische Programmierung* durch *R. Bellman* entwickelt (siehe Abschnitt 2.2).

Daß die Zeit für die Lösung dynamischer Entscheidungsprobleme reif war, zeigt die parallel zur dynamischen Programmierung erfolgte Behandlung von Zweipersonen-Nullsummen-Differentialspielen durch *R. Isaacs*.

Aufbauend auf *Goldstine* (1938) wurde in den Sechzigerjahren auch begonnen, Kontrollprobleme als abstrakte Probleme der nichtlinearen Optimierung zu formulieren (vgl. *Dubovitskii* und *Milyutin* (1963), *Girsanov* (1972), *Hestens* (1965, 1966), *Neustadt* (1966, 1967, 1976). Einen detaillierten Überblick über historische Entwicklungslinien der Kontrolltheorie findet man bei *Neustadt* (1976).

Sowohl die Entwicklung des Maximumprinzips als auch jene der Dynamischen Programmierung wurde durch Probleme der Luft- und Raumfahrt motiviert und durch das Aufkommen elektronischer Rechenanlagen beschleunigt.

Während – ähnlich wie in der Variationsrechnung – bei der Entstehung und beim Aufschwung der optimalen Kontrolltheorie naturwissenschaftliche und technische Probleme im Vordergrund standen, wurde etwa seit Mitte der Sechzigerjahre das Maximumprinzip auf ökonomische Problemstellungen angewendet. Zu den ersten Anwendungen des Maximumprinzips auf ökonomische Fragestellungen aus der zweiten Hälfte der Sechzigerjahre zählen: *Kurz* (1965) über optimale Kapitalakkumulation, *Shell* (1967) über allgemeine qualitative Eigenschaften deterministischer Wachstumsmodelle, *Dobell* und *Ho* (1967) über optimale Investitionspolitiken, von *Weizsäcker* (1967) über optimale Ausbildungspolitiken, *Näslund* (1966) und *Thompson* (1968) über Instandhaltung und Ersatz von Maschinen. Einen geschichtlichen Einblick in die Verbindung von Steuerungstheorie und Ökonomie liefern *Athans* und *Kendrick* (1974). *Connors* und *Teichroew* (1967) stellt das erste Buch über Anwendungen des Maximumprinzips im Operations Research dar. Mit dem Buch von *Arrow* und *Kurz* (1970) setzte eine stürmische Entwicklung bei der Behandlung intertemporaler ökonomischer Entscheidungsprozesse ein. Folgende Bücher geben davon Zeugnis:

Burmeister und *Dobell* (1970), *Intriligator* (1971), *Hadley* und *Kemp* (1971), *Bensoussan*, *Hurst* und *Näslund* (1974), *Takayama* (1974), *Stöppler* (1975), *Cass* und *Shell* (1976a), *Clark* (1976), *Tapiero* (1977), *Pitchford* und *Turnovsky* (1977), *Stepan* (1977), *Ekman* (1978), *Ludwig* (1978), *Miller* (1979), *Sethi* und *Thompson* (1981a), *Kamien* und *Schwartz* (1981), *Van Loon* (1983), *Tu* (1984), *Seierstad* und *Sydsaeter* (1986).

Vorwiegend makroökonomisch bzw. ökonometrisch orientiert sind die Bücher von *Pindyck* (1973), *Chow* (1975), *Kendrick* (1981a), *Aoki* (1981) und *Preston* und *Pagan* (1982).

Abschließend wollen wir noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Variationsrechnung, optimaler Kontrolltheorie und Dynamischer Programmierung machen. Das Maximumprinzip ist insoferne allgemeiner als die Variationsrechnung, als es die Behandlung von Nebenbedingungen in Ungleichungsform gestattet (siehe Abschnitt 2.4). Das Verhältnis der Kontrolltheorie zur Variationsrechnung kann verglichen werden mit jenem der nichtlinearen Programmierung (Kuhn-Tucker-Theorie) zur Methode der Lagrange-Multiplikatoren der Analysis.

Die Bedingungen der Dynamischen Programmierung (Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung) implizieren das Maximumprinzip (2.2), während die Umkehrung nur unter bestimmten Voraussetzungen gilt (vgl. *Cesari*, 1983, §2.11 G). Ein Vorteil des Maximumprinzips besteht darin, daß man als notwendige Optimalitätsbedingungen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhält, während die dynamische Programmierung eine partielle Differentialgleichung liefert. Dadurch können oft schon wertvolle *qualitative* Einsichten in die Struktur der optimalen Lösungspfade gewonnen werden, ohne das entstehende Randwertproblem komplett zu lösen.

Übungsbeispiele zu Kapitel 1

1.1. Man erkläre das Zustandekommen des Diskontfaktors $\exp(-rt)$.

Hinweis: Angenommen, pro Zeiteinheit (z.B. ein Jahr) fallen $100\,r\%$ Zinsen an. Wir modifizieren diese Auszahlungsregel, indem wir die Zeiteinheit in n gleichlange Perioden aufteilen, in denen jeweils 100 r/n % an Zinsen bezahlt werden. Der sich pro Zeiteinheit ergebende Zinsfaktor ist dann $(1-r/n)^n$. Man lasse n gegen unendlich streben und benütze die bekannte Formel $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

1.2. Betrachte folgende Variante des Produktions/Lagerhaltungsproblems in Beispiel 1.2. Eine Firma erhält den Auftrag, nach T Zeiteinheiten B Einheiten eines Produktes zu liefern. Angenommen, es treten quadratische Produktionskosten $c(v) = cv^2$ und lineare Lagerhaltungskosten $h(z) = hz$ auf. Formuliere das Kontrollmodell und diskutiere die Modellannahmen. Welche qualitative Beschaffenheit wird die optimale Produktionspolitik besitzen?

1.3. Angenommen, der Produzent in Beispiel 1.2 ist eine monopolistische Firma, welche ihre Nachfrage über den Preis bestimmen kann, $d = d(p)$. Falls die gesamte Nachfrage abgesetzt werden kann, so beträgt die Profitrate $pd(p) - c(v) - h(z)$.

(a) Man formuliere das entstehende Kontrollmodell.

(b) Angenommen, Fehlmengen werden zugelassen, d. h. die Bedingung (1.11) wird nicht auferlegt. Auftretende Fehlbestände im Lager werden zwar vorgemerkt, aber mit Fehlmengenkosten bestraft. Diskutiere das neue Modell.

1.4. Angenommen, in Beispiel 1.4 kann der Beschäftigtenstand der Firma durch Rekrutierung und Entlassung explizit beeinflußt werden, wobei Anpassungskosten auftreten. Es bezeichne $u(t)$ die Einstellungsrate, falls $u > 0$, bzw. die Entlassungsrate, falls $u < 0$; die Anpassungskosten seien $k(u)$. Formuliere dieses Kontrollmodell mit zwei Zustandsvariablen. Diskutiere die ökonomische Bedeutung der Kostenfunktion $k(u)$.

1.5. Man betrachte folgenden Spezialfall von Beispiel 1.4: $L(t) = \text{const}$, $p = 1$; $I(t)$ = Werbeausgaben in der Periode t, $K(t)$ = akkumulierter Bestand an „Goodwill", der den Bekanntheitsgrad des Produktes mißt, $F(t)$ = Profitrate. Man formuliere das entstehende Werbemodell.

1.6. Optimale Allokation zwischen Berufsausübung und Ausbildung: Man betrachte folgendes intertemporale Entscheidungsproblem der Ausbildungsplanung. Ein Individuum hat in jedem Zeitpunkt (Arbeitstag) seines Lebenszyklus' die Möglichkeit, diesen Arbeitstag zwischen Ausbildungsaktivität und Berufsausübung aufzuteilen. Lernen vergrößert den Wissensstand der Person, welcher im Laufe der Zeit (mit konstanter Rate) vergessen wird. Der (bei Ausübung des Berufs) erzielte Lohn hängt vom Ausbildungsstand ab. Aufgabe des Individuums ist es, den Zeitanteil für die Wissensakkumulation, $u(t)$, so zu wählen, daß das Arbeitseinkommen über einen gegebenen Planungszeitraum möglichst groß wird. Es gilt $0 \leqq u \leqq 1$; $1-u$ ist der für die Lohnarbeit aufgewendete Anteil eines Arbeitstages. Man identifiziere die Zustandsvariable und formuliere das optimale Kontrollmodell.

1.7. Eine weitere Interpretation eines Spezialfalles von Beispiel 1.4 ist folgendes Umweltmodell: K = Umweltzustand, I = Maßnahmen zur Verbesserung der Umwelt, δ = natürliche Verschmutzungsrate, $F(K)$ = Nutzen der Umweltqualität K. Neben (1.19) ist es sinnvoll, etwa auch eine gemischte Nebenbedingung der Form

$$I \leqq bF(K)$$

mit $0 < b \leqq 1$ ins Kalkül zu bringen. Man diskutiere das entstehende Kontrollmodell.

1.8. Der Absatz eines Produktes hängt – neben dem Verkaufspreis p — von der erreichten Stufe im Produktlebenszyklus und damit vom vergangenen (kumulierten) Absatz X ab. Während bei gegebenem Preis der Verkauf anfänglich mit dem bisherigen Absatz wächst, sinkt er infolge der Marktsättigung in den späteren Phasen des Produktlebenszyklus. Der Absatz zum Zeitpunkt t betrage $\eta(p(t))\,\xi(X(t))$, wobei $\eta'(p) < 0$ und

$\xi'(X) \gtrless 0$ für $X \lessgtr \bar{X}$ gelten soll. Eine der gesichertsten betriebswirtschaftlichen Relationen ist die Abnahme der Produktionseinheitskosten $c(X)$ mit steigendem bisherigen Absatz X, d. h. $c'(X) < 0$, da mit steigender Erfahrung billiger produziert werden kann („learning by doing"). Man formuliere das intertemporale Entscheidungsproblem unter der Annahme einer profitmaximierenden Firma. (Hinweis: $p(t)$ dient als Steuervariable.)

1.9. Raketenwagen: Die Bewegung eines Wagens entlang einer horizontalen geradlinigen Gleisstrecke wird unter Vernachlässigung der Reibung durch das zweite Newtonsche Gesetz

$$\ddot{x}_1 = u$$

beschrieben: Dabei bezeichnet $x_1(t)$ die Ortskoordinate und $x_2 = \dot{x}_1$ die Geschwindigkeit des Wagens. Die Bewegung des Wagens wird durch zwei an der Vorder- bzw. Rückseite des Wagens angebrachte Raketen gesteuert. Der Raketenschub u sei durch $|u| \leq 1$ beschränkt.

(a) Gegeben sei eine Ausgangslage und -geschwindigkeit x_{10} bzw. x_{20}. Der Wagen soll in minimaler Zeit im Ort $x_1 = 0$ zur Ruhe kommen.

(b) Ausgehend von der Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$ soll der Raketenwagen so beschleunigt werden, daß er sich innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls $[0, T]$ bei „vernünftigem" Treibstoffaufwand möglichst weit entfernt. Der Treibstoffverbrauch zu jedem Zeitpunkt sei als Funktion $c(u(t))$ gegeben.

Man formuliere die beiden Kontrollprobleme.

1.10. Gesucht ist das intertemporale Entnahmeprofil eines monopolistischen Minenbesitzers. Dabei bezeichne R_0 den zu Beginn verfügbaren Ressourcenstock, $q(t)$ die Abbaurate zur Zeit t; es gilt $R_0 = \int_0^\infty q(t)\,dt$. Der Verkaufspreis des Monopolisten sei durch die angebotene Menge bestimmt, $p = p(q)$. Die Abbaueinheitskosten werden mit c bezeichnet. Realistischerweise wird c von q oder/und vom noch vorhandenen Ressourcenstock $R(t)$ abhängen. Man formuliere das Ressourcenabbauproblem als optimales Kontrollmodell, falls der Mineneigner seinen diskontierten Profitstrom zu maximieren trachtet. (Welche Größe wird sinnvollerweise als Zustandsvariable fungieren?)

1.11. Schließlich betrachten wir noch das folgende, etwas makabre Beispiel: In einem von der Außenwelt isolierten transsylvanischen Tal leben zwei Species, nämlich Menschen und Vampire, deren Anzahlen mit h bzw. v bezeichnet werden. Die Menschen vermehren sich (exponentiell) mit der Rate n, während pro Zeiteinheit $100a\%$ der Vampire durch Kontakt mit Sonnenlicht, Knoblauch, Kruzifixen oder durch die Tätigkeit von Vampirjägern den Status des „Untoten" (= Vampir) verlassen und sterben. Die Vampirgemeinschaft muß nun zu jedem Zeitpunkt entscheiden, wie viele Menschen jeder Vampir pro Nacht überfallen und aussaugen darf, wobei zu beachten ist, daß jeder von einem Vampir ums Leben gebrachte Mensch selbst zum Vampir wird. Ziel der Vampire ist die Maximierung des aggregierten, mit der Rate r diskontierte Nutzenstromes (aus dem Blutkonsum) pro Vampir. Man formuliere das Kontrollmodell.

Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 1

Das fundamentale Buch über optimale Steuerungstheorie ist *Pontryagin* et al. (1962). Das russische Original ist 1959 erschienen, eine deutsche Übersetzung 1964.

Instandhaltungsprobleme zählen seit den bahnbrechenden Arbeiten von *Näslund* (1966) und *Thompson* (1968) zu den ersten ökonomischen Anwendungsgebieten der Kontrolltheorie; vgl.

Kap. 10 und Abschnitt 3.1, sowie 4.1. Die Verbindung zur Produktionsplanung wurde von *Hartl* (1983b) untersucht.

Holt et al. (1960) haben die Variationsrechnung zur Lösung dynamischer Produktions- und Lagerhaltungsprobleme herangezogen. Eine Übersicht über Anwendungen des Maximumprinzips auf die Lagerhaltungstheorie liefern *Bensoussan* et al. (1974, Chap. 3). Eine genauere Behandlung dieser Modelle findet man in Kap. 9.

Beispiel 1.3 geht auf *Ramsey* (1928) zurück, der das neoklassische Wachstumsmodell für unendlichen Zeithorizont in Prokopf-Größen formuliert hat; vgl. dazu auch *Hadley* und *Kemp* (1971) sowie Abschnitt 13.1.

Das in Beispiel 1.4 beschriebene Kapitalakkumulationsmodell stellt eines der ersten dynamischen Investitionsmodelle dar und kann als Ausgangspunkt intertemporaler Unternehmensmodelle („Dynamics of the Firm") angesehen werden. Das Modell geht auf *D. W. Jorgenson* (1963, 1967) zurück; vgl. Abschnitt 12.1.

Der unter (1.20) bzw. (1.21) verwendete Ansatz stammt von *Kamien* und *Schwartz*. Diese Autoren haben ihn auf eine Reihe verschiedener Problemstellungen angewandt, so etwa in der Instandhaltungsplanung und in der Forschungsplanung (*Kamien* und *Schwartz*, 1971a, 1982). Das Problem des „dynamischen Diebes" wurde von *Sethi* (1979b) gelöst. Für das Dieb-Polizeispiel vgl. man *Feichtinger* (1983b). Es läßt sich auch als Markteintrittsspiel interpretieren (*Feichtinger*, 1982g).

Eine ausführliche Darstellung der Geschichte der Variationsrechnung bietet *Goldstine* (1980). Das Problem des Geschosses mit minimalem Luftwiderstand wird bei *Bryson* und *Ho* (1975) mit Hilfe des Maximumprinzips gelöst. Die Vorläufer der Steuerungstheorie sind in *Valentine* (1937), *McShane* (1939) und *Hestenes* (1966) zusammengefaßt. Die fundamentale Referenz über dynamische Programmierung ist *Bellman* (1957); jene über Differentialspiele *Isaacs* (1965). Empfehlenswerte Lektüre über optimale Kontrolltheorie sind *Athans* und *Falb* (1966), *Lee* und *Markus* (1967), *Bryson* und *Ho* (1975), *Fleming* und *Rishel* (1975), *Sage* und *White* (1977), *Whittle* (1982/83), *Seierstad* und *Sydsaeter* (1986).

Die folgenden Sammelbände beschäftigen sich mit ökonomischen Anwendungen der Kontrolltheorie: *Cass* und *Shell* (1976a), *Pitchford* und *Turnovsky* (1977), *Bensoussan* et al. (1978, 1980), *Kemp* und *Long* (1980), *Tzafestas* (1982), *Feichtinger* (1982a, 1985a), *Mirman* und *Spulber* (1982). Schließlich existieren eine Reihe von Übersichtsaufsätzen zu diversen Anwendungsgebieten der Kontrolltheorie: *Sethi* (1977d, 1978a), *Wickwire* (1977), *Bookbinder* und *Sethi* (1980). Zum Abschluß sei auf die folgenden beiden ökonomisch orientierten Lehrbücher der Kontrolltheorie hingewiesen: *Sethi* und *Thompson* (1981a), *Kamien* und *Schwartz* (1981).

Die folgende Übersicht enthält Literaturhinweise zu den Übungsbeispielen:

Übungsbeispiel	Literatur	Behandelt in Kapitel
1.2	*Sethi* und *Thompson* (1981a)	9
1.3	*Feichtinger* und *Hartl* (1985a)	9
1.4	*Feichtinger* und *Steindl* (1984)	–
1.5	*Nerlove* und *Arrow* (1962), *Gould* (1970)	11.1, 4.2
1.6	von *Weizsäcker* (1967), *Ben-Porath* (1967)	3.2
1.7	*Bensoussan* et al. (1974)	–
1.8	*Robinson* und *Lakhani* (1975), *Kamien* und *Schwartz* (1981), *Kalish* (1983)	11.2
1.9	*Pontryagin* et al. (1962)	3.4
1.10	*Hotelling* (1931), *Dasgupta* und *Heal* (1978), *Marshalla* (1979)	14
1.11	*Hartl* und *Mehlmann* (1982)	13

Kapitel 2: Heuristische Herleitung und ökonomische Interpretation des Maximumprinzips

Im folgenden betreiben wir *angewandte* optimale Kontrolltheorie, d. h. es geht nicht um die Analyse von Problemen unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen, sondern um die Lösung konkreter intertemporaler Entscheidungsprobleme, welche im Operations Research und in der Ökonomie auftauchen. Dabei stellen wir uns auf den Standpunkt des Anwenders, der Existenz und benötigte Eigenschaften der auftretenden Funktionen unterstellt.

Im vorliegenden Kapitel werden zunächst die Bedingungen des Maximumprinzips für ein einfaches Standardkontrollmodell (ohne Nebenbedingungen) formuliert. Abschnitt 2.2 bringt einen über die Bellmansche Funktionalgleichung verlaufenden heuristischen Beweis des Maximumprinzips. Die abgeleiteten notwendigen Optimalitätsbedingungen werden im Abschnitt 2.3 ökonomisch interpretiert. Im darauffolgenden Abschnitt wird ein „Beweis" des Maximumprinzips über die Variationsrechnung skizziert. Schließlich wird in Abschnitt 2.5 gezeigt, daß das Maximumprinzip unter geeigneten Konkavitätsbedingungen auch hinreichend für die Optimalität einer Lösung ist. Die Abschnitte 2.6–2.8 behandeln dann die Erweiterungen, wo der Endzeitpunkt unendlich bzw. frei wählbar ist. Weitere Verallgemeinerungen, wie etwa Pfadrestriktionen und allgemeinere Anfangs- und/oder Endbedingungen, sowie Existenzfragen, werden später in den Kapiteln 6 und 7 vorgestellt.

2.1. Notwendige Optimalitätsbedingungen für ein Standardmodell

Das im vorliegenden Kapitel behandelte optimale Kontrollmodell ist einerseits allgemein genug, um eine Reihe relevanter dynamischer Entscheidungssituationen zu umfassen. Andererseits kann es als Fundament verschiedener Verallgemeinerungen aufgefaßt werden, welche auf dem Standardmodell aufbauen.

Um ein konkretes Vokabular vor Augen zu haben, betrachten wir eine Firma, welche ihren Gesamtprofit über eine vorgegebene Planungsperiode $[0, T]$ maximieren möchte. Der jeweilige „Zustand" der Firma werde durch ein Bündel von Kapitalbeständen $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \dots x_n(t))'$ beschrieben [1], deren Niveau von den vergangenen Investitionen abhängt. Zu jedem Zeitpunkt t kann die Firma Ent-

---

[1] Der Strich bedeutet die Transponierung des Vektors, d. h. der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ ist ein Spaltenvektor. Im folgenden werden Spaltenvektoren mit fetten *lateinischen* Kleinbuchstaben bezeichnet, während Zeilenvektoren durch fette *griechische* Kleinbuchstaben gekennzeichnet sind.

scheidungen $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))'$ treffen; z.B. verfügt sie über die Höhe der produzierten Menge, über deren Verkaufspreis und über den Betrag der getätigten Investitionen. Gemeinsam mit dem Zustand $\boldsymbol{x}(t)$ bestimmt die Entscheidungsvariable $\boldsymbol{u}(t)$ die Nettoprofitrate in der Periode t, nämlich $F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$. Der Barwert des Profitstromes in $[0, T]$ ist durch folgendes Zielfunktional

$$J = \int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\, dt + e^{-rT} S(\boldsymbol{x}(T), T) \tag{2.1}$$

gegeben, wobei $S(\boldsymbol{x}(T), T)$ den Wert des Kapitals am Ende des Planungszeitraumes T angibt und r die nichtnegative Diskontrate ist.

Das unter (2.1) formulierte Zielfunktional wird als *Bolza-Form* bezeichnet. Falls $S(\boldsymbol{x}, T) = 0$ gilt, so handelt es sich um ein sogenanntes *Lagrange-Problem*. Wenn $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = 0$ ist, so liegt ein *Mayer-Problem* vor. Man könnte vermuten, daß die Bolza-Form allgemeiner ist als die beiden anderen. Durch geeignete Transformationen kann jedoch gezeigt werden, daß alle drei Problemformulierungen äquivalent sind (siehe Übungsbeispiel 2.1).

Aufgabe der Unternehmensleitung ist es, einen Zeitpfad $\boldsymbol{u}(t)$ des Vektors der Entscheidungsvariablen für $0 \leqq t \leqq T$ so zu wählen, daß der Gesamtgewinn J maximal wird. Charakteristisch für die Problemstellung ist dabei die Tatsache, daß die Firma den Kapitalstock $\boldsymbol{x}(t)$ zur Zeit t nicht frei bestimmen kann, sondern daß dieser das Resultat vergangener Entscheidungen (z.B. der vor dem Zeitpunkt t verfolgten Investitionspolitik) und der Höhe der Anfangskapitalausstattung $\boldsymbol{x}(0)$ darstellt. Durch die Entscheidung $\boldsymbol{u}(t)$ ist in Verbindung mit den in $\boldsymbol{x}(t)$ zusammengefaßten Kapitalgütern zur Zeit t die Änderung des Zustandes festgelegt:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{2.2}$$

wobei $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)'$ eine vektorwertige Funktion sein soll, d.h. es gelte komponentenweise

$$\dot{x}_j(t) = f_j(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Den Kontrolltrajektorien können Beschränkungen auferlegt sein. Wir fordern zunächst nur, daß ihre Werte in einer nichtleeren Menge Ω liegen sollen.

Das dynamische Entscheidungsdilemma besteht darin, daß die Wahl von $\boldsymbol{u}(t)$ in der Periode t nicht nur den Profit in dieser Periode beeinflußt, sondern auch den künftigen Kapitalstock mitbestimmt. Was vom heutigen Output konsumiert wird, erhöht zwar den momentanen Nutzen, geht aber von den Investitionen ab, die zur Erhöhung des künftigen Kapitalstocks dienen.

Wir fassen das optimale Kontrollproblem in *Standardform* folgenderweise zusammen[1)]:

[1)] Im folgenden wird das Zeitargument t zumeist unterdrückt, sofern dadurch keine Verwirrung gestiftet werden kann.

$$J = \int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,dt + e^{-rT} S(\boldsymbol{x}(T), T) \to \max \tag{2.3a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \tag{2.3b}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.3c}$$

$$\boldsymbol{u}(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \tag{2.3d}$$

Dabei ist der Planungshorizont T fix vorgegeben. Ferner werden F und $\boldsymbol{f}$ (komponentenweise) nach $\boldsymbol{x}$ als stetig differenzierbar, und bezüglich $\boldsymbol{u}$ und t als stetig angenommen. Von S[1] verlangen wir die stetige Differenzierbarkeit nach $\boldsymbol{x}$ und T. Als *zulässige* Kontrolltrajektorien betrachten wir alle auf $[0, T]$ stückweise stetigen Funktionen $\boldsymbol{u}(t)$ mit Werten $\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$. Setzt man eine derartige zulässige Steuertrajektorie ausgehend von Anfangsbedingung (2.3c) ins Differentialgleichungssystem (2.3b) ein, so erhält man einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Zustandspfad $\boldsymbol{x}(t)$ auf $[0, T]$. Ein wichtiger Spezialfall des Kontrollproblems (2.3) ist jener, wo F und $\boldsymbol{f}$ nicht explizit von der Zeit t abhängen. Derartige Probleme werden als *autonom* bezeichnet.

Obwohl hier mehrdimensionale Kontrollprobleme betrachtet werden und demgemäß Vektornotation verwendet wird, kann sich ein weniger versierter Leser auf den eindimensionalen Fall nur einer Kontroll- und Zustandsvariablen beschränken ($m = n = 1$), d.h. sämtliche auftretende Funktionen als Skalargrößen auffassen.

Unter Verwendung der Hamilton-Funktion

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \tag{2.4}$$

wobei $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ den Kozustand bezeichnet, läßt sich das zentrale Resultat der optimalen Kontrolltheorie wie folgt formulieren:

Satz 2.1 (Maximumprinzip für das Standardproblem)

Es sei $\boldsymbol{u}^*(t)$ eine optimale Steuerung für das Kontrollproblem (2.3) *und $\boldsymbol{x}^*(t)$ die zugehörige Zustandstrajektorie. Dann existiert eine stetige und stückweise stetig differenzierbare vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, welche als adjungierte Variable oder Kozustandstrajektorie bezeichnet wird, so daß folgende Aussagen gelten:*

An allen Stellen $t \in [0, T]$, wo $u^*(t)$ stetig ist, gilt die Maximumbedingung:

$$H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = \max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), t) \tag{2.5}$$

und die adjungierte (Kozustands-) Gleichung:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = r\boldsymbol{\lambda}(t) - H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t). \tag{2.6}$$

[1] Die explizite Abhängigkeit der Schrottwertfunktion S von T ist dann von Bedeutung, wenn auch der Endzeitpunkt optimal gewählt werden kann; vgl. dazu Abschnitt 2.7.

Am Endzeitpunkt gilt die Transversalitätsbedingung:

$$\lambda(T) = S_x(x^*(T), T). \tag{2.7}$$

Bemerkung 2.1.

a) Aus Gründen der bequemeren Schreibweise vereinbaren wir, daß die Ableitung (Gradient) einer skalaren Funktion nach einem *Spalten*vektor einen *Zeilen*vektor ergeben soll. Verabredet man ferner, daß die Differentiation einer Skalarfunktion nach einem *Zeilen*vektor einen *Spalten*vektor liefert, so läßt sich die Bewegungsgleichung (2.2) nach Definition der Hamilton-Funktion in der Form

$$\dot{x}^*(t) = H_\lambda(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \tag{2.2a}$$

schreiben. Subindizes bezeichnen dabei partiellen Ableitungen.

b) Zusammen werden (2.2), (2.6) als *kanonisches Differentialgleichungssystem* bezeichnet, für welches mit (2.3c) und (2.7) $2n$ Randbedingungen zur Verfügung stehen.

Da für jedes t ein Wert $u^*(t)$ durch (2.5) gegeben ist, ist das kanonische System gerade bestimmt. Zur Lösung des optimalen Kontrollproblems gilt es, $2n + m$ unbekannte Funktionen zu ermitteln, nämlich $u^*(t)$, $x^*(t)$ und $\lambda(t)$. Dafür stehen $m + 2n$ Bedingungen zur Verfügung, nämlich die Maximumbedingung (2.5) und das System der kanonischen Differentialgleichngen. Im Prinzip geht man zur Lösung der notwendigen Optimalitätsbedingungen folgendermaßen vor: Man ermittelt aus der Maximumbedingung u^* in Abhängigkeit von x^*, λ und t (analytisch oder numerisch), setzt dieses u^* für jedes t in das kanonische Differentialgleichungssystem ein und erhält somit ein *Randwertproblem* für $2n$ gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine typische Schwierigkeit, welche sich bei der Behandlung des Standardmodells ergibt, besteht in der Tatsache, daß für den Zustandsvektor die *Anfangswerte*, für die Kozustandsvariablen hingegen *Endbedingungen* festgelegt sind. In der überwiegenden Zahl ökonomisch interessanter Fälle ist eine analytische Lösung des Randwertproblems *nicht* möglich.

c) Die optimale Lösung u^* ist in der Klasse der stückweise stetigen Funktionen nicht eindeutig bestimmt.

Ändert man die optimale Lösung u^* an endlich vielen Stellen ab, so ändert dies nichts an der Zulässigkeit bzw. Optimalität der Lösung. Um diese Mehrdeutigkeit auszuschalten, kann an den Unstetigkeitsstellen von u^* der Wert der Steuervariablen gleich deren (z.B.) linksseitigen Grenzwert gesetzt werden. Mit dieser Vereinbarung gilt die Maximumbedingung (2.5) *für alle* $t \in [0, T]$.

Bemerkung 2.2. Die in (2.4) definierte Funktion H wird genauer auch als *Momentanwert Hamilton-Funktion* (current-value Hamiltonian, Hamiltonfunktion in laufender Bewertung) bezeichnet. In der Literatur wird meist die *Hamilton-Funktion in Gegenwartswert-Schreibweise* (present-value) definiert als

$$\tilde{H} = e^{-rt} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t). \tag{2.8}$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen lassen sich dann wie folgt formulieren:

$$\boldsymbol{u}^*(t) \text{ maximiert } \tilde{H} \tag{2.9}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = -\tilde{H}_{\boldsymbol{x}} \tag{2.10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(T) = e^{-rT} S_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(T), T). \tag{2.11}$$

In Übungsbeispiel 2.3 wird gezeigt, daß mit den Transformationen

$$\tilde{H} = H \exp(-rt), \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \exp(-rt) \tag{2.12}$$

die Optimalitätsbedingungen (2.5–7) und (2.9–11) äquivalent sind.

Ein Grund, weshalb wir die Momentanwert-Schreibweise gewählt haben, besteht darin, daß der Faktor $\exp(-rt)$ nicht aufscheint. Für autonome Kontrollprobleme – das sind solche, für welche f und F nicht explizite von t abhängen – hat dies zur Folge, daß das kanonische Gleichungssystem autonom ist.

Um den Gebrauch des Maximumprinzips zu illustrieren, betrachten wir zwei einfache Beispiele: Während Beispiel 2.1 nichtlinear in der Steuerung ist, was zu einer stetigen optimalen Kontrolle führt, erweist sich in Beispiel 2.2 eine Bang-Bang-Lösung als optimal.

Beispiel 2.1. Man maximiere

$$J = \int_0^T \left(x - \frac{u^2}{2}\right) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0. \tag{2.13}$$

Um dieses Problem zu lösen, wenden wir Satz 2.1 an. Die Hamiltonfunktion (2.4) lautet

$$H = x - \frac{u^2}{2} + \lambda u. \tag{2.14}$$

Da H konkav in u ist und gemäß (2.5) durch $u \in \mathbb{R}$ maximiert werden soll, erhalten wir

$$H_u = -u + \lambda = 0, \quad \text{d.h.} \quad u = \lambda. \tag{2.15}$$

Die Kozustandsvariable λ genügt der adjungierten Gleichung (2.6), welche hier die folgende einfache Gestalt besitzt:

$$\dot{\lambda} = -H_x = -1. \tag{2.16}$$

Mit Hilfe der Transversalitätsbedingung (2.7), d.h.

$$\lambda(T) = 0, \tag{2.17}$$

läßt sich (2.16) explizit lösen. Das Ergebnis ist

$$\lambda(t) = T - t. \tag{2.18}$$

Aus (2.15) und (2.13) erhält man daher die folgenden optimalen Zeitpfade für Kontrolle und Zustand (vgl. Abb. 2.1):

$$u^*(t) = T - t, \quad x^*(t) = x_0 + Tt - \frac{t^2}{2}. \tag{2.19}$$

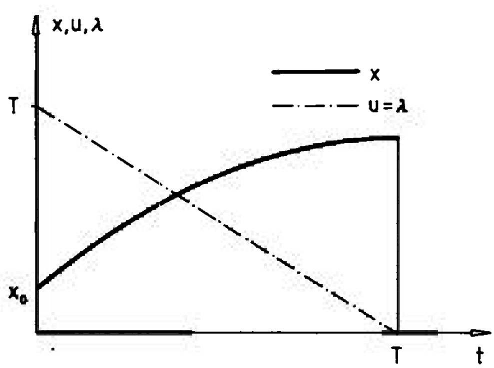

Abb. 2.1 Optimale Trajektorien des nichtlinearen Kontrollproblems von Beispiel 2.1

Streng genommen stellt (2.19) nur einen Kandidaten für eine optimale Lösung dar; aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen von Satz 2.1 haben wir abgeleitet: „Wenn eine optimale Lösung des gestellten Problems existiert, so ist sie (2.19)". Für den Nachweis der tatsächlichen Optimalität von (2.19) siehe Abschnitt 2.5, Beispiel 2.4.

Beispiel 2.1a. Wir überlegen uns nun noch, was passiert, wenn zusätzlich zu den Annahmen von Beispiel 2.1 die Kontrollbeschränkung

$$u(t) \in \Omega = [0, 1].$$

eingeführt wird. Die Hamiltonfunktion ist weiterhin durch (2.14) gegeben. An den notwendigen Bedingungen (2.16, 17) und daher auch an (2.18) ändert sich nichts. Die Maximumbedingung (2.15) wird durch Einbeziehung von Randlösungen erweitert. (2.15) gibt das unbeschränkte Maximum von H bezüglich u an. Liegt dieses links (rechts) außerhalb des zulässigen Steuerbereichs [0, 1], so ist $u = 0$ (bzw. 1) zu wählen (siehe Abb. 2.2):

$$u = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda \leqq 0 \\ \lambda & \text{für} \quad 0 < \lambda < 1 \\ 1 & \text{für} \quad \lambda \geqq 1 . \end{cases}$$

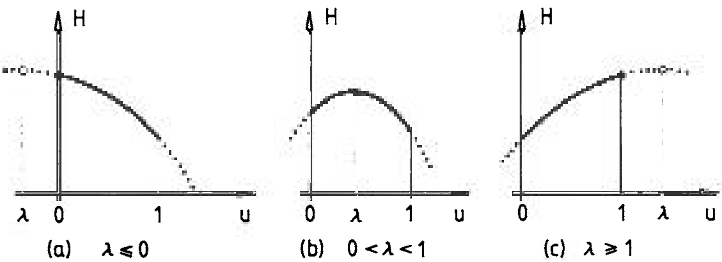

Abb. 2.2 Maximierung der konkaven Hamiltonfunktion auf dem Intervall [0,1]

Aus (2.18) erhält man daher anstelle von (2.19)

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{T-t}, \end{cases} \quad x^*(t) = \begin{cases} x_0 + t & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq T-1 \\ x_0 - \dfrac{(T-1)^2}{2} + Tt - \dfrac{t^2}{2} & \text{für} \quad T-1 < t \leqq T \end{cases}$$

Vgl. Abb. 2.3.

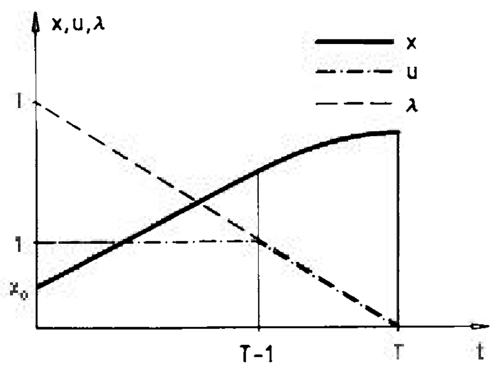

Abb. 2.3 Optimale Trajektorien des beschränkten nichtlinearen Kontrollproblems von Beispiel 2.1a

Beispiel 2.2. Man löse

$$\max \{J = \int_0^T (x - u)\, dt\}$$

unter den Nebenbedingungen (2.13) und

$$u \in \Omega = [0, 1].$$

Gegenüber Beispiel 2.1 wurde also der quadratische Term in u durch einen linearen ersetzt und ein kompakter Kontrollbereich vorgegeben. Die Hamiltonfunktion lautet nun

$$H = x - u + \lambda u .$$

Infolge der Linearität von H in den Kontrollvariablen, d.h.

$$H_u = -1 + \lambda, \quad H_{uu} = 0$$

hat die Maximierungsbedingung (2.5) nun die Gestalt

$$u = \begin{cases} 0 \\ \text{unbestimmt}, \quad \text{wenn} \quad \lambda \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \tag{2.20}$$

Die Funktion H_u bestimmt also durch ihr Vorzeichen, ob u an der oberen oder an der unteren Intervallgrenze liegt bzw. bewirkt bei einem Wechsel des Vorzeichens ein „Umschalten" von u von 0 auf 1 oder umgekehrt. H_u wird daher auch als *Schaltfunktion* bezeichnet (vgl. Kapitel 3).

Adjungierte Gleichung und Transversalitätsbedingung sind wiederum durch (2.16) und (2.17) gegeben. Daher ist die Gleichung (2.18) für λ weiterhin gültig.

Durch Kombination von (2.18) und (2.20) erhalten wir schließlich die folgende optimale Lösung (vgl. Abb. 2.2):

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x^*(t) = \begin{cases} x_0 + t \\ x_0 + T - 1 \end{cases} \quad \text{für} \quad t \in \begin{cases} [0, T-1) \\ [T-1, T], \end{cases} \tag{2.21}$$

wobei sich die x-Trajektorie natürlich aus (2.13) ergibt. Allerdings ist (2.21) nur im Falle von $T \geqq 1$ gültig. Anderenfalls ist $u(t) = 0$, $x(t) = x_0$ für alle $t \in [0, T]$ optimal.

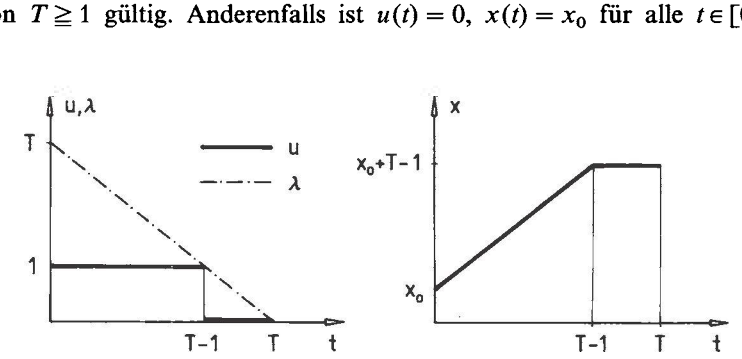

Abb. 2.4 Optimale Trajektorien des linearen Kontrollproblems von Beispiel 2.2

Weitere einfache Beispiele findet man in den Abschnitten 3.1 und 4.1.

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir noch folgende Variante des

Standardmodells, die in den praktischen Anwendungen häufig vorkommt. Gegeben sei das Problem (2.3) mit der zusätzlichen Endbedingung ($0 \leqq n' \leqq n'' \leqq n$):

$$x_j(T) \quad \text{frei für} \quad j = 1, \ldots, n' \tag{2.22a}$$

$$x_j(T) = x_j^T \quad \text{für} \quad j = n' + 1, \ldots, n'' \tag{2.22b}$$

$$x_j(T) \geqq x_j^T \quad \text{für} \quad j = n'' + 1, \ldots, n. \tag{2.22c}$$

Um die notwendigen Optimalitätsbedingungen für dieses Kontrollproblem zu formulieren, definieren wir die Hamiltonfunktion in Erweiterung von (2.4) wie folgt

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda_0, t) = \lambda_0 F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t),$$

wobei λ_0 eine nichtnegative Konstante ist. Im Standardproblem von Satz 2.1 konnte $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden (*normaler Fall*; vgl. dazu auch Bemerkung 6.1 sowie Korollar 6.1). Bei Vorliegen von Endbedingungen kann der *abnormale* Fall $\lambda_0 = 0$ a priori nicht ausgeschlossen werden.

Korollar 2.1 (Maximumprinzip für das Standardproblem mit Endbedingungen)
Es sei $\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}^*$ eine optimale Lösung für das Kontrollproblem (2.3), (2.22). *Dann existiert eine Konstante $\lambda_0 \geqq 0$ und eine stetige Kozustandsfunktion $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$, so daß der Vektor $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t))$ für kein $t \in [0, T]$ verschwindet, und daß an allen Stetigkeitsstellen von $\boldsymbol{u}^*$ folgende Aussagen gelten:*

$$H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t), t) = \max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t), t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = r\boldsymbol{\lambda}(t) - H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t), t).$$

In Abänderung von (2.7) *gelten folgende Transversalitätsbedingungen*

$$\lambda_j(T) = \lambda_0 S_{x_j}(\boldsymbol{x}^*(T), T) \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, n' \tag{2.23a}$$

$$\lambda_j(T) \ \textit{frei} \qquad \textit{für} \quad j = n' + 1, \ldots, n'' \tag{2.23b}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_j(T) \geqq \lambda_0 S_{x_j}(\boldsymbol{x}^*(T), T) \quad \textit{mit} \\ &[\lambda_j(T) - \lambda_0 S_{x_j}(\boldsymbol{x}^*(T), T)]\,[x_j^*(T) - x_j^T] = 0 \quad \textit{für} \quad j = n'' + 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.23c}$$

Für einen Beweis vergleiche man die Literaturhinweise am Kapitelende.

Eine einfache Anwendung von Korollar 2.1 bietet Beispiel 8.3. Allgemeinere Endzustandsbeschränkungen werden in Abschnitt 6.1 behandelt.

2.2. Ein „Beweis" über die dynamische Programmierung

Der folgende, über einen dynamischen Programmierungsansatz verlaufende „Beweis" von Satz 2.1 trägt zwar heuristischen Charakter, vermittelt jedoch interessante Einsichten in die ökonomische Fundierung des Maximumprinzips. Es sei $V(\boldsymbol{x}, t)$ die *Wertfunktion*, welche den optimalen Wert des Zielfunktionals, bezogen auf den laufenden Zeitpunkt t, mißt. $V(\boldsymbol{x}, t)$ ist *der auf t bezogene* Wert des Prozesses im Zeitintervall $[t, T]$, falls die zulässigen Instrumente $\boldsymbol{u}(s)$ auf $t \leqq s \leqq T$ optimal eingesetzt werden und im Zeitpunkt t im Zustand $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ gestartet wird:

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \max_{\substack{\boldsymbol{u}(s) \in \Omega \\ t \leqq s \leqq T}} \left\{ \int_t^T e^{-r(s-t)} F(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s), s)\, ds + e^{-r(T-t)} S(\boldsymbol{x}(T), T) \right\}.$$

Es wird angenommen, daß die Funktion $V(\boldsymbol{x}, t)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle möglichen $\boldsymbol{x}$ und t existiert und zweimal stetig differenzierbar ist.

Die Existenz einer derartigen Funktion $V(\boldsymbol{x}, t)$ hängt an einer Art Markoffeigenschaft der Bewegungsgleichung, gemäß der alle Informationen, welche man im Zeitpunkt t zur Wahl der optimalen Entscheidung $\boldsymbol{u}^*(t)$ besitzen muß, im Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ enthalten sind. Die Entwicklung des Systems vor t, d.h. $\{\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)\}$ für $\tau < t$, beeinflußt das Optimierungsproblem nur über $\boldsymbol{x}(t)$.

Das *Bellmansche Optimalitätsprinzip* besagt, daß jede Teilpolitik einer optimalen Politik optimal sein muß. Genauer formuliert: Eine optimale Politik hat die Eigenschaft, daß – unabhängig vom jeweiligen Anfangszustand und der Anfangsentscheidung – die folgenden Entscheidungen wieder eine optimale Politik bilden. Diese Politik ist optimal bezüglich eines Anfangszustandes, welcher sich aus dem vorhergehenden Anfangszustand und der Anfangsentwicklung ergeben hat (*Bellman*, 1957).

Betrachten wir also für ein kleines $h > 0$ das Zeitintervall $[t, t+h]$. Für gegebenes $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{u}(s)$ für $t \leqq s \leqq t+h$ ist $\boldsymbol{x}(t+h)$ als Lösung der Bewegungsgleichung gegeben. Ausgehend vom neuen Zustand $\boldsymbol{x}(t+h)$ im Zeitpunkt $t+h$ wird der Entscheidungsträger auch für den Rest seines Planungszeitraumes die optimale Kontrolltrajektorie wählen. Der optimale Wert des Zielfunktionals läßt sich demgemäß in zwei Summanden aufspalten, nämlich in den im Anfangsintervall $(t, t+h)$ erzielten Profit sowie in die Wertfunktion des Restprozesses, die sich auf den optimalen Zustand $\boldsymbol{x}(t+h)$ bezieht:

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \max_{\substack{\boldsymbol{u}(s) \in \Omega \\ t \leqq s \leqq t+h}} \left\{ \int_t^{t+h} e^{-r(s-t)} F(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s), s)\, ds + e^{-rh} V(\boldsymbol{x}(t+h), t+h) \right\}. \tag{2.24}$$

Man beachte, daß sich die Wertfunktion $V(\boldsymbol{x}, t)$ auf den laufenden Zeitpunkt t bezieht, d.h. der Nutzenstrom wird auf den Zeitpunkt t (und nicht $t = 0$) rückdiskontiert.

(2.24) ist die sich aus dem Optimalitätsprinzip ergebende *Bellmansche Rekursionsgleichung* des dynamischen Programmierens. Der Maximumoperator erstreckt sich dabei über alle zulässigen Trajektorienstücke $\boldsymbol{u}(\cdot)$ auf dem Intervall $[t, t+h]$. Man beachte, daß der Nachfolgezustand $\boldsymbol{x}(t+h)$ von $\boldsymbol{u}(s)$ für $t \leqq s < t+h$ abhängt.

Aufgrund der Stetigkeitsannahmen über F und V läßt sich die über Steuerungen auf $[t, t+h]$ zu erstreckende Maximierung in (2.24) näherungsweise auf die Maximierung bezüglich $\boldsymbol{u}(t)$ zum Zeitpunkt t zurückführen:

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \max_{\boldsymbol{u}(t) \in \Omega} \{F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)h + e^{-rh} V(\boldsymbol{x}(t+h), t+h)\} + o(h). \tag{2.25}$$

Wegen der unterstellten Differenzierbarkeitsannahme läßt sich für $V(\boldsymbol{x}(t), t)$ folgende Taylor-Reihenentwicklung um t ansetzen:

$$V(\boldsymbol{x}(t+h), t+h) = V(\boldsymbol{x}, t) + V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t)\dot{\boldsymbol{x}}h + V_t(\boldsymbol{x}, t)h + o(h). \tag{2.26}$$

Setzt man (2.26) in (2.25) ein, beachtet $\exp\{-rh\} = 1 - rh + o(h)$, dividiert anschließend durch h und läßt h gegen 0 gehen, so erhält man die Beziehung

$$0 = \max_{\boldsymbol{u}(t) \in \Omega} \{F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - rV(\boldsymbol{x}, t) + V_t(\boldsymbol{x}, t)\}. \tag{2.27}$$

Als Randbedingung fungiert

$$V(\boldsymbol{x}, T) = S(\boldsymbol{x}, T). \tag{2.28}$$

Wir definieren nun den adjungierten (Zeilen-)Vektor $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(t), t). \tag{2.29}$$

Die j-te Komponente von $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\lambda_j(t)$, gibt also an, wie sich der optimale Wert des Zielfunktionals ändert, falls der Kapitalstock $x_j(t)$ exogen infinitesimal erhöht wird. (Der optimale Wert des Zielfunktionals bedeutet, daß man vom optimalen Zustand $\boldsymbol{x}^*(t)$ in t ausgeht und auf $[t, T]$ die optimale Entscheidung trifft.)

Wir zeigen nun, daß für eine optimale Lösung $\boldsymbol{u}^*(t)$, $\boldsymbol{x}^*(t)$ des Kontrollproblems (2.3) der durch (2.29) definierte Zeilenvektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ alle in Satz 2.1 aufgestellten Behauptungen erfüllt.

Mittels $\boldsymbol{\lambda}(t)$ aus (2.29) und der Hamilton-Funktion

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{2.30}$$

läßt sich (2.27) schreiben als

$$0 = \max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} \{H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - rV(\boldsymbol{x}, t) + V_t(\boldsymbol{x}, t)\} \tag{2.31}$$

bzw., da $V(\boldsymbol{x}, t)$ und $V_t(\boldsymbol{x}, t)$ nicht von $\boldsymbol{u}(t)$ abhängen, in der Form

$$rV(\boldsymbol{x}, t) - V_t(\boldsymbol{x}, t) = \max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, V_{\boldsymbol{x}}, t). \tag{2.32}$$

Dies ist die sogenannte *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*, eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $V(\boldsymbol{x}, t)$, welche in der kontinuierlichen dynamischen Programmierung zentrale Bedeutung besitzt.

Aus (2.32) erkennt man zunächst, daß die Hamiltonfunktion für $\boldsymbol{u}^*(t)$ ihr globales Maximum erreicht:

$$H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) \geqq H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t)$$

für alle $\boldsymbol{u}(t) \in \Omega$ und alle $t \in [0, T]$, d.h. (2.5) ist erfüllt.

Zur „Herleitung“ der adjungierten Gleichung setzten wir in (2.31) die optimale Steuerung $\boldsymbol{u}^*(t)$ samt dem zugehörigen Zustand $\boldsymbol{x}^*(t)$ ein und erhalten den Wert Null. Für jede von $\boldsymbol{x}^*(t)$ verschiedene Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ ist i.a. $\boldsymbol{u}^*(t)$ nicht eine dazupassende optimale Kontrolle, so daß der Klammerausdruck in (2.31) kleiner (höchstens gleich) 0 ist. Der Ausdruck

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t), t) - rV(\boldsymbol{x}, t) + V_t(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.33}$$

erreicht also sein Maximum (Wert 0) für $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t)$, welches im unbeschränkten Fall durch Differentiation von (2.33) nach $\boldsymbol{x}$ zu gewinnen ist. Das heißt, für $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t)$ gilt notwendigerweise

$$H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, t), t) - rV_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, t) + V_{t\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, t) = \boldsymbol{0}. \tag{2.34}$$

Wir differenzieren nun die Hamiltonfunktion (2.30) nach $\boldsymbol{x}$, wobei zu berücksichtigen ist, daß $\boldsymbol{\lambda} = V_{\boldsymbol{x}}$ gemäß (2.29) von $\boldsymbol{x}$ abhängt. Dies ergibt in Kombination mit (2.34)

$$F_{\boldsymbol{x}} + (V_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{f})' + V_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}} - rV_{\boldsymbol{x}} + V_{t\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}.$$

Dabei bedeutet $V_{\boldsymbol{xx}} = \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ die Hessesche Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von V nach $\boldsymbol{x}$. Gemeinsam mit der Relation

$$\frac{dV_{\boldsymbol{x}}}{dt} = (V_{\boldsymbol{xx}}\dot{\boldsymbol{x}})' + V_{\boldsymbol{x}t}$$

und $V_{\boldsymbol{x}t} = V_{t\boldsymbol{x}}$ liefert das

$$\frac{dV_{\boldsymbol{x}}}{dt} = rV_{\boldsymbol{x}} - F_{\boldsymbol{x}} - V_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$$

bzw.

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = r\boldsymbol{\lambda} - F_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}.$$

Faßt man nun $\boldsymbol{\lambda}$ als eine von $\boldsymbol{x}$ unabhängige Zeitfunktion auf, so erhält man unter Verwendung von (2.30) die adjungierte Gleichung (2.6).

Die Randbedingung (2.28) liefert wegen (2.29) die Transversalitätsbedingung (2.7). □

Damit ist gezeigt, daß die Bedingungen der dynamischen Programmierung, nämlich die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (2.32) und die Endbedingung (2.28), die Bedingungen des Maximumprinzips implizieren. Die Umkehrung gilt nicht, da beim Maximumprinzip nicht die stetige Differenzierbarkeit der Wertfunktion erforderlich ist, wie dies in der dynamischen Programmierung der Fall ist.

Bemerkung 2.3. Die im vorhergehenden Beweis auftretenden Schlußweisen können für Unstetigkeitsstellen von $\boldsymbol{u}^*(t)$ ihre Gültigkeit verlieren. Da sich der Wert eines Integrals durch Abänderung des Integranden auf abzählbar vielen Stellen nicht ändert, bleibt die Aussage des

Maximumprinzips gewahrt, wenn man seine Gültigkeit auf alle $t \in [0, T]$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten erstreckt.

Der gegebene Beweis des Maximumprinzips ist insoferne heuristisch, als er Voraussetzungen verwendet, deren Erfülltsein entweder extra gezeigt werden müßte oder welche gar nicht sichergestellt sind. Ein exakter Beweis des Pontrjaginschen Maximumprinzips übersteigt den Rahmen dieses Buches, da er entweder tiefe Hilfsmittel verwenden würde oder relativ langwierig wäre. Für eine Anwendung der Maximumprinzip-Bedingungen auf praktische sequentielle Entscheidungsprobleme ist sein Verständnis in allen technischen Einzelheiten aber auch gar nicht nötig. Der hier anstelle eines exakten Beweises geführte heuristische „Beweis" weist den Vorteil auf, daß sich mit ihm eine ökonomische Interpretation der Variablen und Relationen des Maximumprinzips unmittelbar verknüpfen läßt (siehe Abschnitt 2.3).

Zusammenfassend läßt sich die Technik des Maximumprinzips zur Lösung eines optimalen Kontrollproblems in Standardform (2.3) folgenderweise formulieren. Man definiere die Hamiltonfunktion mittels (2.5) und suche jene Trajektorien $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ welche folgende Beziehungen erfüllen

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ &\dot{\boldsymbol{\lambda}} = r\boldsymbol{\lambda} - H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t), \quad \boldsymbol{\lambda}(T) = S_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(T), T) \\ &H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \to \max \quad \text{für} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega,\ t \in [0, T] \end{aligned} \tag{2.35}$$

Wenn das Maximum der Hamiltonfunktion bezüglich $\boldsymbol{u}$ im Inneren von Ω angenommen wird, dann läßt sich

$$H_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \tag{2.36}$$

als notwendige Bedingung erster Ordnung für ein lokales Maximum verwenden. Falls $H_{\boldsymbol{uu}}$ negativ semidefinit ist für $\boldsymbol{u} \in \Omega$ ($H_{uu} \leqq 0$ im Falle $m = 1$), so ist (2.36) auch hinreichend für das Erfülltsein der Maximumbedingung (2.5).

Die Existenz optimaler Steuerungen kann unter bestimmten Voraussetzungen nachgeprüft werden; vgl. dazu Abschnitt 7.5.

Existiert in einem Anwendungsproblem keine Lösung der notwendigen Bedingungen (2.35), so stellt dies häufig ein Indiz für ein falsch spezifiziertes Modell dar. In diesem Falle sollte die Formulierung des Modells nochmals überprüft werden.

2.3. Ökonomische Deutung des Maximumprinzips

Kern der ökonomischen Deutung der im Maximumprinzip von Satz 2.1 zusammengefaßten notwendigen Optimalitätsbedingungen ist die Interpretation (2.29) der Kozustandsvariablen als *Schattenpreis*. Gemäß (2.29) mißt $\lambda_j(t)$ näherungsweise die Änderung des optimalen Prozeßwertes $V(\boldsymbol{x}, t)$, welche aus einer Änderung von $x_j(t)$ um eine Einheit resultiert. In der kapitaltheoretischen Interpretation stellt $\lambda_j(t)$ den marginalen Wert einer Einheit des j-ten Kapitalgutes zum Zeitpunkt t dar (gemessen am diskontierten künftigen Profit).

$\lambda_j(t)$ gibt also an, wieviel es dem Entscheidungsträger wert ist, eine „kleine" Einheit der Zustandsvariablen $x_j(t)$ mehr zu besitzen unter der Annahme, daß er sich für den Rest des Planungshorizonts optimal verhält. $\lambda(t)$ heißt „Schattenpreis", weil der Kapitalwert nicht den am Kapitalmarkt herrschenden Marktpreis darstellt, sondern einen (firmen-)internen Verrechnungspreis, mit dem eine zusätzliche Kapitaleinheit bewertet wird. Mit anderen Worten mißt der Schattenpreis nicht den direkten Verkaufswert, der am Markt für eine Kapitaleinheit erzielt werden kann, sondern den Preis, den ein sich rational verhaltender Entscheidungsträger bereit wäre, für eine zusätzliche Kapitaleinheit zu bezahlen.

Somit mißt

$$\lambda f(x, u, t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x, u, t) \tag{2.37}$$

die Wertänderung des gesamten Kapitalstocks, falls sich dieser aufgrund der Investitionstätigkeit u um $\dot{x} = f$ ändert.

Die Hamilton-Funktion (2.4) beschreibt die totale Auswirkung der Entscheidung u zum Zeitpunkt t, die in einen *direkten und indirekten Effekt* zerlegt werden kann:

- der unmittelbare Effekt der Entscheidung u besteht in Verbindung mit dem herrschenden Zustand x darin, daß die Profitrate $F(x, u, t)$ erzielt wird,
- die indirekte Wirkung von u manifestiert sich im Wert der Änderung der Kapitalbestände. Die in t getroffene Entscheidung u transformiert den Kapitalstock um $\dot{x} = f(x, u, t)$, was – mit dem Schattenpreis λ bewertet – den Summanden (2.37) der Hamiltonfunktion liefert.

Somit mißt H die Profitrate ergänzt um den indirekten Gewinn, der aus der Wertänderung des Kapitalstocks resultiert.

Das Zielfunktional besitzt die Dimension eines ökonomischen Wertes (also Nutzen, Gewinn, Erlös bzw. Kosten), d.h. Preis mal Menge. Die Zustandsvariable hat die Dimension einer Menge, während die Kozustandsvariable $\lambda_j = \dfrac{\partial V}{\partial x_j}$ die Dimension $[\text{Preis}] = \dfrac{[\text{Wert}]}{[\text{Menge}]}$ aufweist. Die Nutzenrate F ist ein Wert pro Zeiteinheit, f eine Menge(nänderung) pro Zeiteinheit. Somit besitzt $H = F + \lambda f$ die Dimension einer Nutzenrate.

Die Maximumbedingung sagt aus, daß die Instrumente *zu jedem Zeitpunkt* so eingesetzt werden sollen, daß die Hamiltonfunktion, als die totale Profitrate (als Summe des unmittelbaren Gewinns plus Wert der Änderung des Kapitalstocks), maximal wird.

Es ist einsichtig, daß es nicht optimal sein wird, in kurzsichtiger Weise die unmittelbare Profitrate zu maximieren, sozusagen nach der Vorgangsweise „Nach mir die Sintflut", da bei einer solchen Vorgangsweise die Nachwirkungen der Wahl der Entscheidung auf die Entwicklung des Kapitalstocks unberücksichtigt blieben. Charakteristisch für dynamische Entscheidungssituationen ist das Phänomen, daß momentane Entscheidungen Auswirkungen auf den weiteren Prozeßverlauf besitzen. Das andere Extrem besteht beispielsweise in der Vorgangsweise, laufend möglichst wenig zu konsumieren, um möglichst viel in die Kapitalakkumulation investieren zu können mit dem Ziel, das Potential für künftigen Nutzen zu schaffen. Weder die kurzsichtige Politik der Maximierung des augenblicklichen Nutzens, noch die ständige „Vertröstung auf später", erweist sich i.a. als optimal.

Aus (2.32) wird deutlich: max H gibt die Verzinsung des optimalen Kapitalwertes der Investition an (falls nicht investiert, sondern am Kapitalmarkt angelegt wird) *plus* die exogen bedingte zeitabhängige Einbuße am optimalen Kapitalwert (Verschlechterung der „Betriebsbedingungen").

Die ökonomische Kernidee des Pontrjaginschen Maximumprinzips besteht in der Konstruktion eines Systems von Schattenpreisen $\lambda(t)$, welches die indirekte Auswirkung der Entscheidung auf die Zustandsänderung in dem Sinne berücksichtigt, daß die *totale* Nutzenrate (nämlich H) maximal wird. Durch diese (scheinbar künstliche) Aufblähung des Problems – neben $u(t)$ und $x(t)$ ist eine zusätzliche Trajektorie $\lambda(t)$ zu ermitteln – läßt sich das *dynamische* Entscheidungsproblem auf $[0, T]$ in eine Schar *statischer* Probleme aufspalten; für jedes $t \in [0, T]$ ergibt sich eines. Diese bestehen jeweils in der Maximierung der Hamiltonfunktion zu jedem Zeitpunkt t, wobei $\lambda(t)$ der zugehörigen adjungierten Gleichung genügt.

Zur kapitaltheoretischen Interpretation der adjungierten Gleichung (2.6) schreiben wir sie in der Form

$$-\dot{\lambda} + r\lambda = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.6'}$$

$-\dot{\lambda}$ ist die Entwertungsrate des Kapitals, welche Bewertungsänderungen (Änderungen des Schattenpreissystems) des Kapitalstocks mißt. $r\lambda$ ist der Zinsgewinn einer mit dem Schattenpreissystem λ bewerteten Kapitaleinheit. Auf der linken Seite von (2.6′) steht somit der Nettoertrag, der erzielt wird, wenn man eine Kapitaleinheit zur Bank trägt und dort mit der Diskontrate verzinst. Er setzt sich zusammen aus Bewertungsänderungen (Kapitalverlusten) sowie dem Zinsertrag. Auf der rechten Seite in (2.6′) scheint der marginale Beitrag einer in den Prozeß investierten Kapitaleinheit auf, der sich als Summe aus dem direkten Grenzertrag und den künftig zu erwartenden (indirekten) marginalen Kapitalerträgen zusammensetzt.

Die Kozustandsgleichung besagt, daß es entlang des optimalen Pfades egal ist, ob man eine zusätzliche infinitestimale Kapitaleinheit in den Prozeß investiert oder auf der Bank verzinst. Ökonomisch kann diese Gleichgewichtsbedingung folgenderweise gerechtfertigt werden: jede Ungleichheit würde Änderungen im optimalen Kapitalstock hervorrufen. Bei der adjungierten Gleichung handelt es sich somit – wie bei der Maximumbedingung – um eine aus der Kapitaltheorie geläufige Gleichgewichtsbedingung. Für $r = 0$ besagt sie, daß im Optimum die Bewertung des Zustandes mit der gleichen Rate abnimmt, wie der Zustand Grenzgewinne hervorruft.

(2.6) läßt sich für $r = 0$ unter Verwendung von (2.7) aufintegrieren zu

$$\lambda(t) = \int_t^T H_x \, dt + S_x(x^*(T), T), \tag{2.38}$$

d.h. der Schattenpreis einer Kapitaleinheit ist gleich der Summe aller künftigen marginalen Beiträge der Zustandsvariablen zum Gesamtprofit (einschließlich des marginalen Restwertes).

Die Transversalitätsbedingung (2.7) besagt schließlich, daß der Preis einer zusätzlichen Kapitaleinheit am Ende des Planungshorizontes gleich dem marginalen Restwert ist, da ein weiterer indirekter Effekt hier nicht mehr berücksichtigt werden muß.

Während in der bisherigen Interpretation H und λ die (den) auf den laufenden Zeitpunkt t bezogene(n) Profitrate bzw. Schattenpreis bedeuteten, beziehen sich die entsprechenden Funktionen $\tilde{H}$, $\tilde{\lambda}$ in der Gegenwartswertnotation (2.8) auf den Zeitursprung $t = 0$.

Beispiel 2.3. Um die Schattenpreisinterpretation (2.29) der Kozustandsvariablen zu illustrieren, verwenden wir Beispiel 2.1 bzw. 2.2. Zunächst wollen wir die Wertfunktion V ermitteln:

Wenn im Beispiel 2.1 zum Zeitpunkt t im Punkt $x(t) = \xi_0$ gestartet wird, so ist die optimale Lösung gemäß (2.19)

$$u(s) = T - s, \quad x(s) = \xi_0 + T(s-t) - \frac{s^2 - t^2}{2}$$

für $s \geqq t$. Durch Auswertung der Zielfunktion erhält man dann

$$V(\xi_0, t) = \int_t^T \left[x(s) - \frac{u(s)^2}{2} \right] ds = \xi_0 (T - t) + \frac{(T-t)^3}{6}.$$

Im Beispiel 2.2 ist die optimale Lösung ausgehend von $x(t) = \xi_0$ zum Zeitpunkt t (gemäß (2.23))

$$u(s) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x(s) = \begin{cases} \xi_0 + s - t \\ \xi_0 + T - t - 1 \end{cases} \quad \text{für} \quad t \begin{Bmatrix} \leqq \\ > \end{Bmatrix} T - 1.$$

Auswertung der Zielfunktion von Beispiel 2.2 liefert dann

$$V(\xi_0, t) = \int_t^T [x(s) - u(s)]\, ds = \xi_0 (T - t) + \begin{cases} 0 \\ (T-1-t)^2/2 \end{cases},$$

$$\text{wenn} \quad t \begin{Bmatrix} \geqq \\ < \end{Bmatrix} T - 1.$$

In beiden Fällen ist also die Änderung der Wertfunktion V bei einer marginalen Änderung von $x(t) = \xi_0$ gegeben durch

$$\frac{\partial V(\xi_0, t)}{\partial \xi_0} = T - t.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit $\lambda(t)$ aus (2.18) überein.

Falls Beschränkungen (2.22) für den Endzustand $x(T)$ vorliegen, so gilt die obige Interpretation nur für den Fall, daß die Wertfunktion $V(x, t)$ in einer ganzen Umgebung von $x^*(t)$ definiert ist. Dies ist gesichert, soferne die Kozustandstrajektorie für das auf das Intervall $[t, T]$ beschränkte Problem mit Anfangszustand $x^*(t)$ eindeutig bestimmt ist (vgl. *Seierstad*, 1982). Diese Eigenschaft ist aber unter Umständen nicht erfüllt, so daß die Schattenpreisinterpretation für die adjungierte Variable versagt; vgl. Beispiel 8.3, Intervall [2,4].

2.4. Zusammenhang mit der Variationsrechnung

Das einfachste Problem der Variationsrechnung besteht in der Maximierung des Funktionals

$$\int_0^T F(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$$

unter der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen der „klassischen“ Variationsrechnung können aus dem Maximumprinzip gefolgert werden. Setzt man $\dot{x} = u$, so erhält man ein Kontrollproblem. In Übungsbeispiel 2.5 soll die *Eulersche Gleichung*

$$F_x(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{2.39}$$

sowie die Transversalitätsbedingung

$$F_{\dot{x}}(x(T), \dot{x}(T), T) = 0 \tag{2.40}$$

aus den Bedingungen des Maximumprinzips (Satz 2.1) abgeleitet werden. Weitere Bedingungen der Variationsrechnung, nämlich die Weierstraß-Erdmann Bedingungen,

$$F_{\dot{x}} \quad \text{und} \quad F - F_{\dot{x}}\dot{x} \quad \text{sind stetig in} \quad [0, T], \tag{2.41}$$

folgen aus der Stetigkeit von Kozustand und Hamilton-Funktion.

Die folgende Überlegung illustriert, daß die Bedingungen des Maximumprinzips mittels Variationstechniken abgeleitet werden können, falls $\Omega = \mathbb{R}^m$ ist.

Die übliche Vorgangsweise bei der Lösung von Optimalitätsproblemen mit Nebenbedingungen besteht in deren Berücksichtigung mittels Lagrange-Multiplikatoren. Da sich die dynamische Nebenbedingung (2.2) auf das ganze Intervall $[0, T]$ bezieht, ist es plausibel, daß der Lagrangesche Multiplikator $\lambda(t)$ ebenfalls eine Zeitfunktion sein wird; (2.2) stellt sozusagen eine unendliche Familie von durch t indizierten Restriktionen dar, die zu (2.1) zu adjungieren sind.

Wir bilden also die Lagrange-Funktion

$$\Lambda = \int_0^T \{e^{-rt} F(x, u, t) + \tilde{\lambda}(t)[f(x, u, t) - \dot{x}]\}\,dt + e^{-rT} S(x(T), T). \tag{2.42}$$

Um die Multiplikatoren in der (Momentanwert)-Schreibweise von Satz 2.1 zu erhalten, transformieren wir $\tilde{\lambda}$ gemäß (2.12) durch $\tilde{\lambda} = \lambda \exp(-rt)$.

Partielle Integration des Terms $-\int e^{-rt} \lambda \dot{x}\,dt$ ergibt

$$\begin{aligned}\Lambda = &\int_0^T e^{-rt}(F + \lambda f - r\lambda x + \dot{\lambda} x)\,dt + e^{-rT} S(x(T), T) \\ &- [e^{-rT} \lambda(T)\, x(T) - \lambda(0)\, x(0)].\end{aligned} \tag{2.43}$$

Unter Benützung der Hamilton-Funktion $H = F + \lambda f$ läßt sich (2.43) schreiben als

$$\Lambda = \int_0^T e^{-rt}(H - r\lambda x + \dot{\lambda} x)\,dt + e^{-rT} S - [e^{-rT}\lambda(T)\,x(T) - \lambda(0)\,x(0)]\,. \tag{2.44}$$

Um Λ nach $u(t)$ zu maximieren, interessieren wir uns für die Konsequenzen der Änderungen der Kontrolltrajektorie von $u(t)$ auf $u(t) + \delta u(t)$ und der entsprechenden Änderung der Systemantwort von $x(t)$ auf $x(t) + \delta x(t)$ in bezug auf Λ. Die Lagrange-Funktion ändert sich von Λ auf $\Lambda + \delta\Lambda$ mit

$$\begin{aligned} \delta\Lambda = &\int_0^T e^{-rt}[(H_x - r\lambda + \dot{\lambda})\delta x + H_u \delta u]\,dt \\ &+ e^{-rT}[S_x(x(T), T) - \lambda(T)]\,\delta x(T) + \lambda(0)\,\delta x(0)\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

(2.45) läßt sich durch die Kettenregel begründen; eine exakte Herleitung erfolgt im Rahmen der Variationsrechnung. Um die für die Maximierung von Λ nach u notwendige Bedingung $\delta\Lambda = 0$ zu gewährleisten, müssen die Koeffizienten von $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ im Integranden und der Koeffizient von $\delta x(T)$ verschwinden (man beachte, daß $\delta x(0) = 0$). Dabei wird angenommen, daß $u(t) + \delta u(t)$ in einer Umgebung von $u(t)$ frei variieren kann und daß die resultierenden Pfade $x(t) + \delta x(t)$ „genügend reichhaltig" sind.

Dies liefert

$$\dot{\lambda} = r\lambda - H_x,\ H_u = 0,\ \lambda(T) = S_x(x(T), T)\,. \tag{2.46}$$

Die aus der „klassischen" Variationsrechnung folgende Bedingung $H_u = 0$ in (2.46) ist weniger allgemein als die Maximumbedingung (2.5), da sie nur lokale Extrema (auch Minima) liefert und Randsteuerungen ausschließt.

Aus (2.45) folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x(0)} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x(0)} = \frac{\delta\Lambda}{\delta x(0)} = \lambda(0), \tag{2.47}$$

d.h. die Kozustandsvariable ist gleich der Änderung des optimalen Wertes des Zielfunktionals bei einer kleinen Änderung der Zustandsvariablen.

Im Übungsbeispiel 2.6 ist unter Benützung von (2.46) zu zeigen, daß

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + r\lambda f \tag{2.48}$$

gilt.

2.5. Hinreichende Bedingungen

Die Aussagen von Satz 2.1 stellen notwendige Optimalitätsbedingungen dar, d.h. sie konnten nur Kandidaten für optimale Lösungen bestimmen[1]. Um sicherzustellen, daß ein solcher Kandidat wirklich optimal ist, gibt es drei Möglichkeiten:

1. Man zeigt die Existenz einer optimalen Lösung und daß nur die vorliegende Lösung den notwendigen Bedingungen genügt (vgl. *Cesari*, 1983, sowie Abschnitt 7.5).
2. Zu einer gegebenen zulässigen Lösung sucht man die Wertfunktion $V(\boldsymbol{x}, t)$, welche der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (2.32) genügt. Wenn eine solche Wertfunktion existiert, so ist die zulässige Lösung optimal (vgl. *Boltyanskii*, 1966, *Leitmann*, 1968).
3. Man zeigt, daß das Pontrjaginsche Maximumprinzip unter gewissen zusätzlichen Annahmen auch eine hinreichende Optimalitätsbedingung ist.

Im folgenden wollen wir den dritten Weg beschreiten, da er in den ökonomischen Anwendungen die größte Rolle spielt. Eine zentrale Rolle in der Analyse spielt dabei die Konkavität der Nutzenfunktion F und der Effizienzfunktion f bzw. der Hamiltonfunktion oder auch nur die Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion.

Definition 2.1. *Eine Funktion ϕ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt konkav, wenn für alle z_1, z_2 aus ihrem konvexen Definitionsbereich D und für alle $\zeta \in [0, 1]$ gilt*

$$\zeta\phi(z_1) + (1-\zeta)\,\phi(z_2) \leqq \phi(\zeta z_1 + (1-\zeta)z_2).$$

Falls ϕ differenzierbar ist, so ist ihre Konkavität äquivalent mit

$$\phi(z_2) - \phi(z_1) \leqq \phi_z(z_1)\,(z_2 - z_1).$$

Gilt in diesen Ungleichungen anstelle von $\leqq$ das $\geqq$ Zeichen, so ist die Funktion ϕ konvex.

Weiteres benötigen wir noch folgenden Hilfssatz:

Lemma 2.1 (Enveloppentheorem)
Eine Funktion ϕ: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sei definiert für $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in D \times \Omega$, wobei D offen sei, und ϕ°: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sowie $\boldsymbol{u}^*$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seien gegeben durch:

$$\phi^\circ(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{u}\in\Omega} \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}); \quad \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) = \arg\max_{\boldsymbol{u}\in\Omega} \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}).$$

Sind ϕ und ϕ° stetig differenzierbar in $\boldsymbol{x}$, so gilt:

$$\phi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})} = \phi^\circ_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}). \tag{2.49}$$

[1] Ein derartiger Kandidat wird in der Literatur häufig als Extremale bezeichnet.

Beweis. Das Enveloppentheorem wird unter den angeführten Voraussetzungen bei *Derzko* et al. (1984, Lemma 2.1) bewiesen. Wir führen im folgenden einen kürzeren, instruktiveren Beweis unter folgenden *Zusatzvoraussetzungen*:

Rechteckiger Steuerbereich: $\Omega = \underset{i=1}{\overset{m}{\times}} \Omega_i$

$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ ist eindeutig und stetig differenzierbar in $\boldsymbol{x}$.

$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ist auf Umgebung von $D \times \Omega$ stetig nach $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ differenzierbar.

Es gilt dann:

$$\phi_{\boldsymbol{x}}^{\circ}(\boldsymbol{x}) = \phi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})) + \phi_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})) \frac{\partial \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{2.50}$$

Liegt $u_i^*(\boldsymbol{x})$ im Inneren von Ω_i, so gilt $\phi_{u_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})) = 0$. Liegt hingegen $u_i^*(\boldsymbol{x})$ am Rande von Ω_i, so hat u_i^* an der Stelle $\boldsymbol{x}$ ein Extremum. Dann folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$, daß $\frac{\partial u_i^*}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ ist. In jedem Fall verschwindet also der letzte Summand in (2.50), woraus (2.49) folgt. □

Die Bezeichnung dieses Hilfssatzes stammt von der Tatsache, daß im eindimensionalen Fall die Funktion $\phi^{\circ}(x)$ die Einhüllende (Enveloppe) der Kurvenschar $\{\phi(x, u), u \in \Omega\}$ ist; vgl. Abb. 2.5.

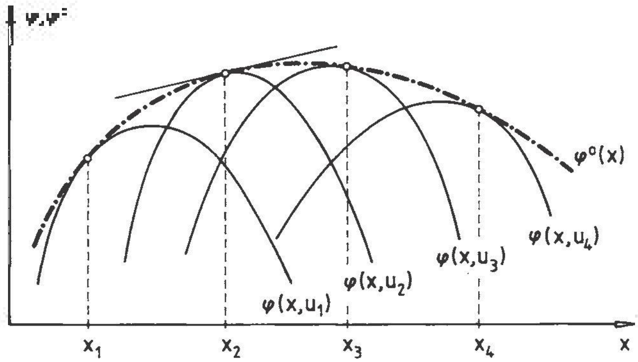

Abb. 2.5 Illustration des Enveloppentheorems: Die maximierte Funktion $\phi^{\circ}(x)$ ist die Einhüllende (Enveloppe) der Kurvenschar $\{\phi(x,u) | u \in \Omega\}$. Aus $u^*(x_i) = u_i$ folgt somit, daß $\phi^{\circ}(x)$ und $\phi(x, u_i)$ im Punkt x_i die gleiche Tangente besitzen

Diese Überlegungen wenden wir nun auf die maximierte Hamiltonfunktion

$$H^{\circ}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \tag{2.51}$$

an. Lemma 2.1 besagt, daß für

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \arg\max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)$$

folgende Beziehungen gelten:

$$H^\circ(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t), \quad H^\circ_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t). \tag{2.52}$$

Dieses Resultat wird zum Beweis des folgenden Satzes benutzt.

Satz 2.2 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen für das Standardproblem)
Es sei $\boldsymbol{u}^*(t)$ eine zulässige Steuertrajektorie und $\boldsymbol{x}^*(t)$ der zugehörige Zustandspfad des Kontrollproblems (2.3). *Ferner existiere eine Kozustandstrajektorie $\boldsymbol{\lambda}(t)$, für welche die Bedingungen des Maximumprinzips (Satz 2.1) erfüllt sind, d.h. es gelte*

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\\
&\dot{\boldsymbol{\lambda}} = r\boldsymbol{\lambda} - H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t), \quad \boldsymbol{\lambda}(T) = S_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(T), T)\\
&H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t) = H^\circ(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, t).
\end{aligned}$$

Falls zusätzlich $H^\circ(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)$ für alle $(t, \boldsymbol{\lambda}(t))$ konkav und stetig differenzierbar in $\boldsymbol{x}$ und $S(\boldsymbol{x}, T)$ konkav in $\boldsymbol{x}$ ist, dann ist $\boldsymbol{u}^*(t)$ eine optimale Steuerung.

Ist H° streng konkav, so ist die optimale Lösung $\boldsymbol{x}^*$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei $\boldsymbol{u}(t)$ eine beliebige Steuertrajektorie auf $[0, T]$ und $\boldsymbol{x}(t)$ die Systemantwort, wobei $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$. Mit $J(\boldsymbol{u})$ bezeichnen wir den Wert des Zielfunktionals (2.1). Die Behauptung des Satzes ist bewiesen, falls gezeigt werden kann, daß die Differenz $J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}^*)$ nicht positiv ist.

Mittels der Hamiltonfunktion läßt sich diese Differenz folgenderweise schreiben

$$\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}^*) &= \int_0^T e^{-rt}[F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, t)]\,dt\\
&\quad + e^{-rT}[S(\boldsymbol{x}(T), T) - S(\boldsymbol{x}^*(T), T)]\\
&= \int_0^T e^{-rt}\{[H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t)]\\
&\quad - \boldsymbol{\lambda}(t)\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, t)]\}\,dt\\
&\quad + e^{-rT}[S(\boldsymbol{x}(T), T) - S(\boldsymbol{x}^*(T), T)].
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Aus der Konkavitätsannahme von H° bezüglich $\boldsymbol{x}$ folgt aufgrund von (2.51, 52)

$$\begin{aligned}
&H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - H(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t) \leqq H^\circ(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) - H^\circ(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, t)\\
&\quad \leqq H^\circ_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, t)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Setzt man (2.54) in (2.53) ein und berücksichtigt ferner die Systemdynamik (2.2) sowie die Konkavität der Restwertfunktion S bezüglich $\boldsymbol{x}$, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}^*) &\leqq \int_0^T e^{-rt}[H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, t)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}(\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}^*)]\,dt\\
&\quad + e^{-rT} S_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*(T), T)\,[\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{x}^*(T)].
\end{aligned}$$

Daraus, aus der Transversalitätsbedingung (2.7), sowie der Tatsache, daß $x^*(0) = x(0)$ gilt, erhält man unter Beachtung der adjungierten Gleichung das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}
J(u) - J(u^*) &\leqq \int_0^T e^{-rt}[(r\lambda - \dot{\lambda})(x - x^*) - \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*)]\,dt \\
&\quad + e^{-rT} S_x(x^*(T), T)\,[x(T) - x^*(T)] \\
&= -\int_0^T \frac{d}{dt}[e^{-rt}\lambda(x - x^*)]\,dt + e^{-rT} S_x(x^*(T), T)\,[x(T) - x^*(T)] \\
&= -e^{-rt}\lambda(t)\,[x(t) - x^*(t)]\big|_0^T + e^{-rT} S_x(x^*(T), T)\,[x(T) - x^*(T)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ist H° streng konkav, so gilt in (2.54) das Kleinerzeichen strikt für $x \neq x^*$. Unterscheiden sich $x(t)$ und $x^*(t)$ auf einem Intervall positiver Länge, so ist $J(u) < J(u^*)$. □

Bemerkung 2.4. Die Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion H° folgt aus der negativen Semidefinitheit von

$$D^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial (x, u)^2} = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{pmatrix}$$

für alle (x, u, λ) mit $H_u = 0$. Dies erkennt man wie folgt:

$$H_x^\circ = H_x + H_u \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
H_{xx}^\circ &= H_{xx} + H_{xu}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)' H_{ux} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)' H_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^m H_{u_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \\
&= \left(I, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'\right) D^2 H \begin{pmatrix} I \\ \partial u/\partial x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wegen $H_u = 0$. Dabei ist I die n-dimensionale Einheitsmatrix. Aus der negativen Semidefinitheit von $D^2 H$ folgt also jene von H_{xx}°.

Bemerkung 2.5. Wenn $D^2 H$ global negativ semidefinit ist, so ist dies äquivalent mit der *Konkavität von H* in (x, u). Für $\lambda \geqq 0$ folgt die Konkavität von H in (x, u) aus jener von F und f. Aus diesen Bedingungen folgt also die Konkavität von H° und somit das Erfülltsein der hinreichenden Bedingungen von Satz 2.2. Die negative Semidefinitheit einer Matrix kann z. B. mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums nachgeprüft werden (vgl. *Gantmacher*, 1958).

Bemerkung 2.6. Der hier geführte Beweis von Satz 2.2 über das Enveloppentheorem (Lemma 2.1) benützt die Differenzierbarkeit der maximierten Hamiltonfunktion in x, die unter Umständen nicht gegeben ist, so etwa bei linearen Problemen. Ein exakter Beweis für allgemeinere Kontrollprobleme, der die Differenzierbarkeit von H° nicht voraussetzt, wird im Beweis von Satz 7.1 geliefert.

Beispiel 2.4. Wir zeigen nun, daß die in den Beispielen 2.1 und 2.2 gestellten Probleme die hinreichenden Optimalitätsbedingungen erfüllen.

Von (2.14) und (2.15) ergibt sich

$$H^\circ = x + \lambda^2/2$$

für Beispiel 2.1. Für Beispiel 2.1a erhält man

$$H^\circ = \begin{Bmatrix} x \\ x + \lambda^2/2 \\ x + \lambda - 1/2 \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{Bmatrix} \lambda \leqq 0 \\ 0 < \lambda < 1 \\ \lambda \geqq 1 \end{Bmatrix}$$

Aus (2.20) und (2.22) folgt

$$H^\circ = \begin{cases} x & \text{für} \quad \lambda < 1 \\ x + \lambda - 1 & \text{für} \quad \lambda \geqq 1 \end{cases}$$

für Beispiel 2.2. Da somit in allen Fällen die maximierte Hamiltonfunktion H° für jedes feste t und λ linear und somit konkav in x ist, sind die hinreichenden Bedingungen von Satz 2.2 erfüllt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Konkavität von H° in x erfüllt sein kann, ohne daß H konkav in $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ist (vgl. Bemerkung 2.4).

Beispiel 2.5. Man maximiere

$$J = \int_0^T (u^2 - x)\,dt$$

$$\dot{x} = u, \; x(0) = x_0$$

$$0 \leqq u \leqq 1 .$$

Die Hamiltonfunktion

$$H = u^2 - x + \lambda u$$

ist nicht konkav in u und deshalb auch nicht in (x, u), während die maximierte Hamiltonfunktion $H^\circ = -x + \max_u \{u^2 + \lambda u\}$ linear und daher konkav in x ist.

In Übungsbeispiel 2.9 ist zu zeigen, daß

$$u = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad [0, T-1) \\ 1 & \text{für} \quad [T-1, T] \end{cases}$$

die optimale Lösung ist.

Falls H° nicht konkav ist, kann in manchen Fällen eine Zustandstransformation gefunden werden, so daß H° für das transformierte Problem konkav ist; vgl. dazu Übungsbeispiel 2.15.

2.6. Unendlicher Zeithorizont und Gleichgewichtslösung

Viele ökonomische Problemstellungen verlangen die Bestimmung einer optimalen Kontrolle auf einem unendlichen Zeitintervall. Gegeben sei etwa das Problem

$$\max \{J = \int_0^\infty e^{-rt} F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\, dt\} \tag{2.55a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.55b}$$

$$\boldsymbol{u}(t) \in \Omega\,. \tag{2.55c}$$

Dabei werden die vor Satz 2.1 angeführten Regularitätsbedingungen vorausgesetzt. Weiters setzen wir voraus, daß das uneigentliche Integral in (2.55a) für jede zulässige Lösung konvergiert. (Andernfalls muß der Begriff der Optimalität überdacht werden; siehe Abschnitt 7.2).

In vielen Fällen zeigt sich, daß die optimale Lösung eines autonomen Kontrollproblems $(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t))$ für $t \to \infty$ gegen ein stationäres Niveau $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ konvergiert. Bei endlichem, „hinreichend großen" Zeithorizont beobachtet man häufig, daß sich die Lösung einen Großteil des Zeitintervalls „in der Nähe" des Gleichgewichtspunktes $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ aufhält.

Dieses Gleichgewicht ist definiert durch die notwendigen Optimalitätsbedingungen (2.2, 5, 6), wobei $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0}$ gesetzt wird. $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ genügt daher den Bedingungen:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0} \tag{2.56}$$

$$r\hat{\boldsymbol{\lambda}} - H_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{0} \tag{2.57}$$

$$H(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \geqq H(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{u} \in \Omega\,. \tag{2.58}$$

Wir wenden uns nun wieder dem allgemeinen optimalen Kontrollproblem mit unendlichem Zeithorizont zu und formulieren zunächst notwendige Optimalitätsbedingungen.

Dazu definieren wir die Hamiltonfunktion wie folgt

$$H = \lambda_0 F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,. \tag{2.59}$$

Im Unterschied zu (2.4) ist also der Integrand F mit einer nichtnegativen Konstanten λ_0 zu multiplizieren.

Satz 2.3 (Maximumprinzip für unendlichen Zeithorizont)
Notwendig für die Optimalität eines zulässigen Paares $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ ist die Existenz einer

Konstanten $\lambda_0 \geqq 0$ *und einer stetigen Kozustandsfunktion* $\boldsymbol{\lambda}(t)$, *so daß für kein* $t \in [0, \infty)$ *der Vektor* $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t))$ *verschwindet, und daß mit* H *aus* (2.59) *die Bedingungen* (2.5) *und* (2.6) *von Satz 2.1 erfüllt sind.*

Beweisskizze. Sei $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ ein optimales Paar für das Problem (2.55). Wir betrachten für jedes endliche $T \in [0, \infty)$ folgendes Kontrollproblem

$$\max_{\boldsymbol{u} \in \Omega} \int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\, dt \tag{2.60}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \; \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}^*(T). \tag{2.61}$$

Dabei handelt es sich hier um kein Problem in Standardform, sondern um eines mit festem Endzustand (vgl. (2.22b)). Aus Korollar 2.1 erhält man die notwendigen Optimalitätsbedingungen, wobei gemäß (2.23b) keine Endbedingung für $\boldsymbol{\lambda}(T)$ existiert.

Wendet man auf jedes dieser Probleme Satz 2.1 an, so erhält man eine Schar von Kozustandstrajektorien $\boldsymbol{\lambda}(t, T)$ definiert auf $t \in [0, T]$ und eine Schar von Konstanten $\lambda_0(T) \geqq 0$. Normiert man $\boldsymbol{\lambda}$ so, daß $\|(\lambda_0(T), \boldsymbol{\lambda}(0, T))\| = 1$ ist, so kann man gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Folge $\{T_n\}$ auswählen mit $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$, so daß $\lim_{n \to \infty} (\lambda_0(T_n), \boldsymbol{\lambda}(0, T_n))$ existiert.

Bezeichnet man diesen Grenzwert mit $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(0))$ und löst die adjungierte Gleichung (2.6) auf dem Intervall $[0, \infty)$, so erhält man eine Funktion $\boldsymbol{\lambda}(t)$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{\lambda}(t, T_n) = \boldsymbol{\lambda}(t). \tag{2.62}$$

Mittels einer ε-Überlegung kann nun leicht gezeigt werden, daß für das mittels (2.62) bestimmte $\boldsymbol{\lambda}$ die Maximumbedingung (2.5) gilt (vgl. *Lee* und *Markus* (1967, p. 317)). □

Bemerkung 2.7. Da der Beweis durch Rückführung auf Probleme mit endlichem Zeithorizont und festem Endzustand geführt wurde und bei solchen keine Transversalitätsbedingung (2.7) existiert, ist es plausibel, daß dies auch für das Kontrollproblem mit unendlichem Zeithorizont der Fall ist.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die zu (2.7) analoge Grenztransversalitätsbedingung

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{0} \tag{2.63}$$

keine notwendige Optimalitätsbedingung darstellt.

Beispiel 2.6. Man maximiere

$$J = \int_0^\infty (1 - x)\, u\, dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = (1-x)u, \quad x(0) = 0$$
$$0 \leqq u \leqq 1\,.$$

Da in diesem Beispiel $F = f$ ist, gilt

$$J = \int_0^\infty \dot{x}\,dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0) = x(\infty)\,.$$

Daher ist jede zulässige Lösung, welche $x(\infty)$ maximiert (d.h. für die $x(\infty) = 1$ gilt), optimal. Somit ist beispielsweise

$$u^* = 1/2 \quad \text{für} \quad t \in [0, \infty) \tag{2.64}$$

eine optimale Lösung, für die $0 < x^*(t) < 1$ für $t \in (0, \infty)$ und $x^*(\infty) = 1$ gilt. Die Hamiltonfunktion (2.59) lautet

$$H = (\lambda_0 + \lambda)(1-x)u\,.$$

Es gilt

$$H_u = (\lambda_0 + \lambda)(1-x)$$

und

$$u = \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{unbestimmt} \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ für } \quad H_u \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0\,.$$

Für u^* aus (2.64) gilt daher $H_u = 0$ für alle t und somit

$$\lambda(t) = -\lambda_0 \quad \text{für} \quad t \in [0, \infty)\,. \tag{2.65}$$

Wegen der Nichtdegeneriertheitsannahme $(\lambda_0, \lambda) \neq \boldsymbol{0}$ ist daher $\lambda(t)$ eine negative Konstante und die „Transversalitätsbedingung" (2.63) ist verletzt (wegen $r = 0$).

Bemerkung 2.8. Die Konstante λ_0 in der Hamiltonfunktion (2.59) kann im Unterschied zu (2.4) für das Standardproblem (2.3) i.a. nicht gleich eins gesetzt werden. Dies wird in folgendem Gegenbeispiel illustriert.

Beispiel 2.7.

$$J = \max_u \int_0^\infty (u - x)\,dt$$
$$\dot{x} = u^2 + x, \quad x(0) = 0$$
$$0 \leqq u \leqq 1\,.$$

Falls $u \neq 0$ auf einem Intervall von nicht verschwindender Länge, so divergiert $x(t)$ exponentiell gegen $+\infty$ und es gilt $J = -\infty$, da $u \leqq 1$. Die optimale Lösung ist also offensichtlich

$$u^*(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \in [0, \infty).$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen von Satz 2.3 lauten

$$H = \lambda_0 (u - x) + \lambda (u^2 + x)$$

$$u = \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{unbestimmt} \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ für } \quad H_u = \lambda_0 + 2\lambda u \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \tag{2.66}$$

$$\dot{\lambda} = \lambda_0 - \lambda .$$

Wäre $\lambda_0 > 0$, so würde aus $u^* = 0$ und (2.66) der Widerspruch $u^* = 1$ folgen. Somit tritt der abnormale Fall $\lambda_0 = 0$ auf.

Für eine eingeschränkte Modellklasse kann gezeigt werden, daß die Grenztransversalitätsbedingung (2.63) doch eine notwendige Optimalitätsbedingung darstellt.

Satz 2.3a (*Michel, 1982*). *Gegeben sei das Kontrollproblem* (2.55) *in autonomer Form, d.h.* $F_t = 0, \boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{0}$. *Ist* $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ *ein optimales Paar, dann existiert eine Konstante* $\lambda_0 \geqq 0$ *und eine stetige Kozustandstrajektorie* $\boldsymbol{\lambda}(t)$, *so daß die Bedingungen* (2.5) *und* (2.6) *erfüllt sind. Ferner gilt*

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)) = 0 \tag{2.67a}$$

$$e^{-rt} H(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)) = r\lambda_0 \int_0^\infty e^{-rs} F(\boldsymbol{x}^*(s), \boldsymbol{u}^*(s))\, ds . \tag{2.67b}$$

Ist zusätzlich $F \geqq 0$ *für alle zulässigen* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *(oder der Kontrollbereich* Ω *beschränkt) und liegt* $\boldsymbol{0}$ *im Inneren der Menge „der möglichen Geschwindigkeiten“*

$$E(\boldsymbol{x}^*(t)) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in \Omega\}$$

für alle hinreichend großen Werte von t, *dann erfüllt* $\boldsymbol{\lambda}(t)$ *die Grenztransversalitätsbedingung* (2.63).

Falls eine der in Abschnitt 2.5 benutzten Konkavitätsbedingungen erfüllt ist, so gibt es hinreichende Optimalitätsbedingungen mit $\lambda_0 = 1$, welche auch eine Transversalitätsbedingung enthalten.

Satz 2.4 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen für unendlichen Zeithorizont) *Sei* $\boldsymbol{u}^*(t)$ *mit zugehöriger Zustandstrajektorie* $\boldsymbol{x}^*(t)$ *eine zulässige Lösung für das optimale Kontrollproblem* (2.55). *Weiters sollen Funktionen* $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$ *existieren, so daß zusätzlich zu den Bedingungen* (2.5) *und* (2.6) *mit der Hamiltonfunktion* H *aus* (2.4) *die Grenztransversalitätsbedingung*

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \boldsymbol{\lambda}(t) [\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*(t)] \geqq 0 \tag{2.68}$$

für jede zulässige Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ gilt. Dann ist $\boldsymbol{u}^*(t)$ eine optimale Lösung, wenn $H^\circ(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)$ für alle Paare t, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$ konkav in $\boldsymbol{x}$ ist.

Beweis. Dieser verläuft analog zu dem von Satz 2.2. An der Ableitung der grundlegenden Ungleichungen (2.54) ändert sich nichts. Für eine beliebige zulässige Lösung $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ergibt sich dann für die Differenz der Zielfunktionale:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}^*) &= \int_0^\infty e^{-rt}\{F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, t)\}\,dt \\ &\leqq -\int_0^\infty \frac{d}{dt}[e^{-rt}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)]\,dt = \boldsymbol{\lambda}(0)\,[\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}^*(0)] \\ &\quad - \lim_{t\to\infty} e^{-rt}\boldsymbol{\lambda}(t)\,[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*(t)] \leqq 0\,. \end{aligned}$$

Dabei wurde von $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^*(0) = \boldsymbol{x}_0$ und (2.68) Gebrauch gemacht. □

Bemerkung 2.9. Es ist offensichtlich, daß die Transversalitätsbedingung (2.68) erfüllt ist, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Jede zulässige Trajektorie } \boldsymbol{x}(t) \text{ ist beschränkt oder nichtnegativ,} \\ \boldsymbol{x}^*(t) \text{ ist beschränkt und} \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \text{ ist nichtnegativ und erfüllt (2.63).} \end{array}\right\} \quad (2.69)$$

Man beachte, daß die Forderung (2.63) in (2.69) auch durch die Beschränktheit von $\boldsymbol{\lambda}$ ersetzt werden kann. Unter der Voraussetzung der Beschränktheit oder Nichtnegativität jeder zulässigen Zustandstrajektorie ist die Transversalitätsbedingung (2.68) für jede gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergierende Lösung erfüllt. Diese Tatsache wird u.a. in Kap. 3 und 4 ausgenützt.

Bemerkung 2.10. Verlangt man analog zu (2.22), daß Endbedingungen der Gestalt

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{t\to\infty} x_j(t) & \text{frei für} & j = 1, \ldots, n' \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_j(t) = x_j^\infty & \text{für} & j = n'+1, \ldots, n'' \\ \lim\limits_{t\to\infty} x_j(t) \geqq x_j^\infty & \text{für} & j = n''+1, \ldots, n \end{array}$$

erfüllt sind, so bleiben die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen der Sätze 2.3 und 2.4 erhalten.

Beispiele für Probleme mit unendlichem Zeithorizont findet man z. B. in Kap. 3 und 4. Die singuläre Lösung des in Abschnitt 3.2 präsentierten Modells stellt ein Gleichgewicht $(\hat{x}, \hat{u})$ im Sinne von (2.56–58) dar. Gleichgewichte im nichtlinearen Fall werden in Kapitel 4 behandelt. (Die Linearität bezieht sich dabei auf die Steuerung.) Im linearen Fall wird das Gleichgewicht in der Regel *raschestmöglich* (in endlicher Zeit) erreicht (siehe Abschnitt 3.3), im nichtlinearen Fall nähert man sich dem Gleichgewicht hingegen asymptotisch; vgl. Abb. 2.6.

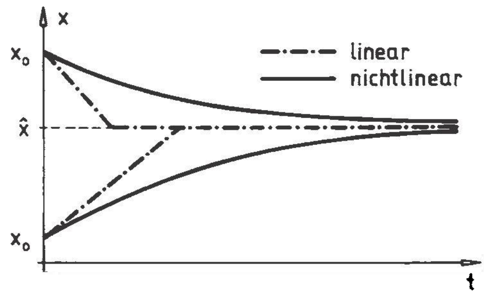

Abb. 2.6 Vergleich der Annäherung an ein Gleichgewicht $\hat{x}$ in den Fällen, daß die Hamiltonfunktionen linear bzw. nichtlinear in der Steuerung ist

2.7. Optimale Wahl des Endzeitpunktes

Bei einer Reihe ökonomischer Problemstellungen besteht das Ziel nicht nur darin, innerhalb eines gewissen Planungszeitraumes eine optimale Politik zu finden, sondern es ist auch das Ende dieses Planungsintervalles so zu wählen, daß die Zielfunktion den optimalen Wert annimmt. Ein typisches Beispiel hierfür ist der Betrieb einer maschinellen Produktionsanlage, deren Zustand $\boldsymbol{x}$ – gemessen etwa an Produktqualität bzw. Wiederverkaufswert – durch Maßnahmen wie vorbeugende Instandhaltung und/oder die Wahl der Produktionsrate (Kontrolle $\boldsymbol{u}$) beeinflußt werden kann. Es soll dabei der akkumulierte und diskontierte Profitstrom maximiert werden, wobei auch noch simultan die Entscheidung über den günstigsten Verkaufszeitpunkt zu treffen ist.

Derartige Probleme lassen sich mit Hilfe des folgenden Satzes lösen:

Satz 2.5. *Gegeben sei das Kontrollproblem* (2.3), *wobei zusätzlich der Endzeitpunkt T^* optimal zu bestimmen ist. Ist $\boldsymbol{u}^*(t)$ mit zugehöriger Zustandstrajektorie $\boldsymbol{x}^*(t)$ eine optimale Lösung dieses Problems auf dem optimalen Intervall* $[0, T^*]$, *dann gelten alle Aussagen von Satz 2.1 und zusätzlich*

$$H(\boldsymbol{x}^*(T^*), \boldsymbol{u}^*(T^*), \boldsymbol{\lambda}(T^*), T^*) = rS(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*) - S_T(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*). \tag{2.70}$$

Beweis. Dieser wird in der Literatur üblicherweise gemeinsam mit den übrigen Bedingungen des Maximumprinzips geführt. Wir wollen hier einen anderen Weg beschreiten und zeigen, daß sich (2.70) völlig unabhängig von den übrigen Optimalitätsbedingungen (Satz 2.1) durch Anwendung der Differential-Integralrechnung sehr einfach und doch exakt ableiten läßt.

Es sei T^* ein optimaler Endzeitpunkt, und $\boldsymbol{u}^*(t)$ bezeichne eine optimale Lösung des Kontrollproblems (2.3) für den fixen Endzeitpunkt T^*. Wir setzen nun $\boldsymbol{u}^*(t)$ für $t > T^*$ in geeigneter Weise stetig fort, also z. B. durch $\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{u}^*(T^*)$, $t \geqq T^*$. Die Kontrolle $\boldsymbol{u}^*(t)$ ist dann auch für Endzeitpunkte $T \in (T^* - \varepsilon, T^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ zulässig, und die zugehörige Zustandstrajektorie werde mit $\boldsymbol{x}^*(t)$, $0 \leqq t < T^* + \varepsilon$ bezeichnet. Damit können wir folgende Zielfunktion definieren

$$J(T) = \int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t)\,dt + e^{-rT} S(\boldsymbol{x}^*(T), T), \tag{2.71}$$

die den Wert des Zielfunktionals (2.1) repräsentiert, wenn für den Endzeitpunkt T die auf $[0, T^*]$ optimale Kontrolle gewählt wird. Laut Konstruktion ist $J(T)$ für $0 < T < T^* + \varepsilon$ definiert. Da $\boldsymbol{u}^*(t)$ an der Stelle T^* stetig ist, ist $\boldsymbol{x}^*(t)$ dort stetig differenzierbar und daher auch $J(T)$. Für diese Ableitung muß gelten

$$\frac{dJ(T^*)}{dT} = 0, \tag{2.72}$$

da T^* optimal ist. Wäre etwa $dJ(T^*)/dT > 0$, so gäbe es ein $T \in (T^*, T^* + \varepsilon)$, so daß $J(T) > J(T^*)$, und T^* könnte nicht optimal sein, da die Wahl von $\boldsymbol{u}^*(t)$ auf $[0, T]$ die Zielfunktion verbessern würde. Unter Verwendung von (2.71) liefert (2.72) die Gleichung

$$e^{-rT}\{F + S_x \dot{x} + S_T - rS\} = 0$$

wobei T^* für t und T einzusetzen ist. Unter Verwendung der Hamiltonfunktion H und der Transversalitätsbedingung (2.7) erhalten wir daher

$$H = F + \lambda f = F + S_x \dot{x} = rS - S_T. \qquad \square$$

Im Falle, daß der Endzeitpunkt T nicht beliebig, sondern nur aus einem bestimmten Bereich gewählt werden kann, gilt folgendes Resultat:

Korollar 2.2. *Sei $\boldsymbol{u}^*(t)$, $\boldsymbol{x}^*(t)$ optimal für das Problem von Satz 2.5, wobei T^* optimal unter allen Endzeitpunkten $T \in [\underline{T}, \bar{T}]$ ist, dann gelten alle Aussagen von Satz 2.5 (bzw. Satz 2.1), wobei statt* (2.70) *nun allgemeiner gilt:*

$$H(\boldsymbol{x}^*(T^*), \boldsymbol{u}^*(T^*), \lambda(T^*), T^*) \begin{Bmatrix} \leqq \\ = \\ \geqq \end{Bmatrix} rS(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*)$$

$$- S_T(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*) \quad \text{für} \quad \left\| \begin{array}{l} T^* = \underline{T} \\ \underline{T} < T^* < \bar{T} \\ T^* = \bar{T} \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Der Beweis erfolgt analog zur obigen Ableitung von Beziehung (2.70) und bleibt dem Leser überlassen (siehe Übungsbeispiel 2.11).

Um die Optimalitätsbedingung der Gleichung (2.70) zu interpretieren, betrachten wir die einzelnen Terme in dieser Gleichung separat:

$H = F + \lambda f$ gibt den direkten Gewinn im Verlauf der nächsten Zeiteinheit plus die (laufende) Bewertung der Zustandsänderung an.

S_T bezeichnet die Änderung des Restwertes durch Verschiebung des Endzeitpunktes um eine Einheit.

rS sind die mit der Diskontarte r ermittelten Zinsen auf den Restwert des Prozesses (der Maschine) bei Beendigung des Prozesses zum Zeitpunkt T. Man könnte rS daher als *Opportunitätskosten* für das Weiterlaufen des Prozesses bezeichnen.

Man hat also abzuwägen, ob man zum gegenwärtigen Zeitpunkt T die Maschine verkauft, $S(\boldsymbol{x}, T)$ Geldeinheiten erhält und in der nächsten Zeiteinheit die Zinsen rS abschöpft, oder ob man den Verkaufszeitpunkt um eine Einheit hinausschieben soll, wobei in diesem Fall Profite F anfallen und sich der Verkaufspreis um $S_{\boldsymbol{x}} f + S_T$ verändert. Wenn T der optimale Verkaufszeitpunkt ist, so bringen beide Entscheidungen in der nächsten Zeiteinheit den gleichen Gewinn. Dies ist intuitiv klar: wäre der interne Grenzertrag größer (bzw. kleiner) als die Zinsen auf den Verkaufswert, so wäre es sicher besser, die Maschine länger zu behalten (bzw. schon früher zu verkaufen), weshalb dann T nicht der optimale Verkaufszeitpunkt sein könnte.

Falls dem Endzustand zusätzlich Bedingungen (2.22) auferlegt werden, so ändert sich (2.70) wie folgt.

Korollar 2.3. *Gegeben sei das Kontrollproblem* (2.3), (2.22) *bei freiem Endzeitpunkt. Seien $T^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}^*$ optimal, dann gelten alle Aussagen von Korollar 2.1 sowie*

$$H(\boldsymbol{x}^*(T^*), \boldsymbol{u}^*(T^*), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(T^*), T^*) = r\lambda_0 S(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*) - \lambda_0 S_T(\boldsymbol{x}^*(T^*), T^*) \tag{2.70a}$$

Der Beweis verläuft völlig analog zu jenem von Satz 2.5.

Hinreichende Optimalitätsbedingungen für freien Zeithorizont findet man in Satz 7.7.

Beispiel 2.8. Wir betrachten folgendes Ressourcenausbeutungsproblem (vgl. *Seierstad* und *Sydsaeter* 1986; Example 2.9.1):

$$\max_{u,T} \int_0^T e^{-rt}[p(t)u(t) - C(u(t), t)]\,dt$$
$$\dot{x}(t) = -u(t),\ x(0) = x_0,\ x(T) \geqq 0,\ u \geqq 0.$$

Dabei bezeichnet $x(t)$ den Ressourcenstock im Zeitpunkt t, $u(t)$ die Extraktionsrate, $p(t)$ den (vorgegebenen) Marktpreis und $C(u, t)$ die Extraktionskosten. Betrachtet man einen konstanten Marktpreis $p = \bar{p}$ und spezifiziert die Kosten quadratisch, $C = au^2/2$, so erhält man folgende optimale Abbaupolitik

$$u^*(t) = \frac{\bar{p} - \lambda(0)\, e^{rt}}{a},$$

sowie den optimalen Abbauzeitraum T^* als Lösung von

$$\bar{p}(rT^* - 1 + e^{-rT^*}) = arx_0.$$

Aus dieser Beziehung und

$$\int_0^T u^*(t)\, dt = x_0$$

lassen sich die beiden Parameter $\lambda(0)$ und T^* bestimmen (Übungsbeispiel 2.12).

2.8. Optimaler Endzeitpunkt bei Investitionsketten

Bedingung (2.70) für den optimalen Endzeitpunkt ist unter Umständen von keinem endlichen T^* erfüllt (vgl. die Abschnitte 3.1 und 4.1). Ein möglicher Grund hierfür ist, daß die Zielfunktion (2.1) die Situation nicht adäquat widerspiegelt. Wird nämlich eine Maschine zum Zeitpunkt T verkauft, wobei sie den Schrottwert S einbringt, so wird danach oft eine neue Anlage angeschafft. Es ist plausibel, daß man in diesem Fall die Maschine eher früher verkaufen und eine neue anschaffen wird, als wenn nach dem Verkauf der Produktionsanlage kein Ertrag mehr anfallen kann.

In diesem Abschnitt wollen wir notwendige Optimalitätsbedingungen für Kontrollprobleme mit freiem Endzeitpunkt angeben, deren Zielfunktion die Gestalt

$$\tilde{J}(T) = \frac{\int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\, dt + e^{-rT} S(\boldsymbol{x}(T), T) - I}{1 - e^{-rT}} \tag{2.74}$$

besitzt. Ein typisches Beispiel dafür wäre eine Folge von Maschinen, die gekauft, betrieben und wieder verkauft werden, wobei eine neue Maschine I Geldeinheiten kostet und eine t Zeiteinheiten alte Produktionsanlage im Erhaltungszustand $\boldsymbol{x}$ um $S(\boldsymbol{x}, t)$ Geldeinheiten verkauft werden kann. Eine solche Maschine wirft bei Kontrolleinsatz $\boldsymbol{u}$ (Produktionsrate, Instandhaltungsintensität usw.) $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ Geldeinheiten Gewinn ab und verändert ihre Leistungsfähigkeit $\boldsymbol{x}$ gemäß $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$. Wenn die i-te Anlage $(i = 1, 2, \ldots)$ T_i Zeiteinheiten betrieben wird und sofort danach durch eine neue ersetzt wird, ist der Gegenwartswert des Nettoprofitstromes unter Berücksichtigung von Kauf- und Verkaufspreis der Anlagen gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -I + \int_0^{T_i} e^{-rt} F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\, dt + e^{-rT_i} S(\boldsymbol{x}(T_i), T_i) \right\} \exp\left(-r \sum_{j=1}^{i-1} T_j\right). \tag{2.75}$$

Der Ausdruck in der geschlungenen Klammer, also $J(T_i) - I$, ist der auf den Kaufzeitpunkt der i-ten Anlage $\sum_{j=1}^{i-1} T_j$ bezogene Wert des Kosten- und Erlösstromes, den die i-te Maschine generiert. Falls die Funktionen F, f und S von i unabhängig sind (alle Maschinen identisch), so läßt sich zeigen, daß bei optimaler Wahl alle T_i gleich sind.

Da dann klarerweise auch die Politik $\boldsymbol{u}$ für jede Maschine gleich ist, ist der Klammerausdruck $J(T_i) - I$ in (2.75) von i unabhängig und die Summe wird zu

$$(J(T) - I) \sum_{i=1}^{\infty} e^{-rT(i-1)} = \frac{J(T) - I}{1 - e^{-rT}} = \tilde{J}(T).$$

Die Zielfunktionale (2.75) und (2.74) sind damit äquivalent.

Satz 2.6. *Gegeben sei das Kontrollproblem* (2.3), *wobei nun die Zielfunktion* $\tilde{J}(T)$ *durch* (2.74) *gegeben ist und auch* T *optimal zu bestimmen ist. Ist* $\boldsymbol{u}^*$ *mit zugehörigem*

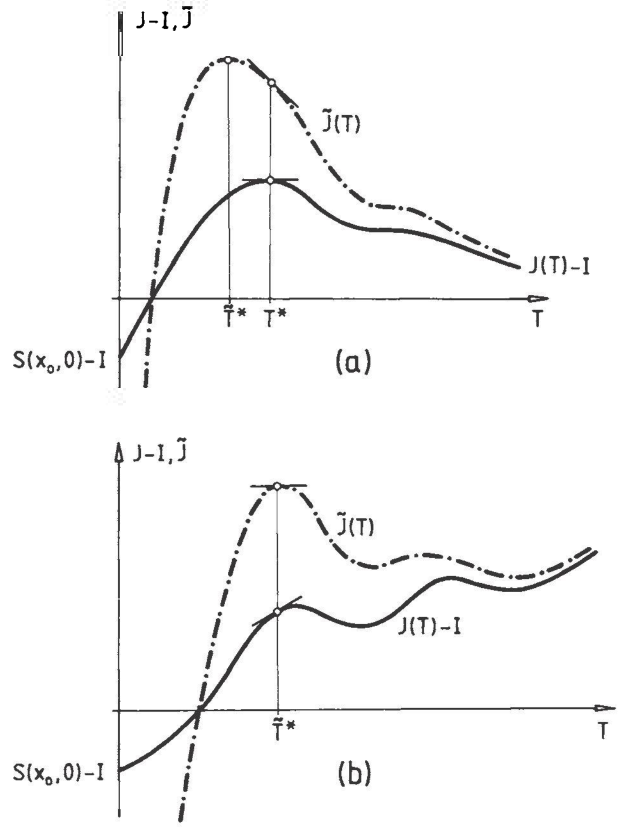

Abb. 2.7 Wert des Zielfunktionals in Abhängigkeit vom Endzeitpunkt bei einer Maschine (——) bzw. bei einer Kette von Maschinen (–·–·–); $\tilde{J}(T) = (J(T) - I)/(1 - e^{-rT})$

x^* eine optimale Lösung auf dem optimalen Intervall $[0, T^*]$, so gelten alle Aussagen von Satz 2.1 weiter und zusätzlich:

$$H(x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*), T^*) + S_T(x^*(T^*), T^*) = r\{S(x^*(T^*), T^*) + \tilde{J}(T^*)\} \tag{2.76}$$

Beweis. Die optimale Endbedingung (2.76) läßt sich durch Differenzieren der Zielfunktion wie bei (2.70) bzw. Korollar 2.2 ableiten (siehe Übungsbeispiel 2.13 und 2.14). □

Die Interpretation der Endbedingung (2.76) ist analog zu der von (2.70). Der einzige Unterschied ist, daß die aggregierte Profitrate H plus Restwertänderung S_T nun nicht nur die Zinsen auf den Wiederverkaufswert (Restwert) S zu tragen haben, sondern auch die Zinsen auf den Barwert des Nettoprofitstromes aus Kauf, Betrieb und Verkauf aller folgenden Maschinen.

Zum Abschluß wollen wir noch illustrieren, daß im Falle einer Kette von Maschinen die Maschine früher verkauft wird als bei einer einzelnen Anlage. Abb. 2.7a beschreibt den Fall, daß ein endlicher optimaler Verkaufszeitpunkt T^* einer Einzelmaschine existiert. In diesem Fall ist die Nutzungsdauer $\tilde{T}^*$ jeder Maschine in einer Kette kürzer als T^*. In Abb. 2.7b ist der Fall illustriert, wo eine Einzelmaschine unendlich lang in Betrieb wäre, während in einer Kette jede Anlage nach endlicher Zeit $\tilde{T}^*$ ersetzt werden würde.

Übungsbeispiele zu Kapitel 2

2.1. Man beweise, daß alle drei Formulierungen eines Kontrollproblems (Bolza-, Lagrange- und Mayersche-Form) äquivalent sind. Hinweis: Man beachte, daß sich der Restwert S folgendermaßen in Integralform darstellen läßt:

$$S(x(T), T) = S(x_0, 0) + \int_0^T [S_x(x(t), t)\,\dot{x}(t) + S_t(x(t), t)]\,dt$$

sowie, daß sich der Integralterm $\int_0^T F\,dt$ durch Hinzufügen einer zusätzlichen Zustandsvariablen $x^\circ(t)$ als Restwert schreiben läßt:

$$\int_0^T F(x, u, t)\,dt = x^\circ(T),$$

wobei $x^\circ(0) = 0$, $\dot{x}^\circ(t) = F(x, u, t)$ gilt.

2.2. Man löse das Problem

$$\max\{J = \int_0^1 (-x)\,dt\}$$

unter den Nebenbedingungen $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $u \in [-1, 1]$.

2.3. Man zeige unter Verwendung von (2.12) den Zusammenhang der Optimalitätsbedingungen (2.5–7) in laufender Bewertung mit jenen in Gegenwartswertnotation (2.9–11).

2.4. Man formuliere die notwendigen Bedingungen für die Beispiele 1.1–1.5 und interpretiere sie. Man überprüfe, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen die hinreichenden Bedingungen von Satz 2.2 erfüllt sind.

2.5. Man leite die Eulersche Gleichung (2.39) und die Transversalitätsbedingung (2.40) aus dem Maximumprinzip her.

2.6. Man zeige, daß entlang eines optimalen Pfades (2.48) gilt. (Hinweis: Man bilde die totale Ableitung und verwende die Optimalitätsbedingungen.) Was passiert für $r = 0$ im autonomen Fall?

2.7. Im Zusammenhang mit Bemerkung 2.4 zeige man, daß aus der Konkavität einer Funktion $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ auf einem konvexem Definitionsbereich die Konkavität der maximierten Funktion $\phi^\circ(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{u}} \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ folgt. Man führe den Beweis, ohne die Differenzierbarkeit von ϕ vorauszusetzen.

2.8. Man zeige, daß für das Problem in Übungsbeispiel 2.2 die hinreichenden Bedingungen von Satz 2.2 erfüllt sind.

2.9. Man ermittle die optimale Lösung von Beispiel 2.5 und verifiziere, daß $D^2 H$ nicht negativ semidefinit, H° aber trotzdem konkav ist (vgl. Bemerkung 2.4).

2.10. Man betrachte das Standardproblem (2.3) unter der zusätzlichen Endbedingung $x(T) = x_T$. Man zeige, daß die Bedingungen von Satz 2.2 hinreichend für die Optimalität einer Lösung sind, falls die Transversalitätsbedingung (2.7) weggelassen wird (vgl. auch Korollar 2.1 für notwendige Optimalitätsbedingungen).

2.11. Man führe den Beweis von Korollar 2.2 aus.

2.12. Man bestimme die optimale Extraktionspolitik und den optimalen Endzeitpunkt T^* für das Ressourcenproblem in Beispiel 2.8. Insbesondere zeige man, daß der abnormale Fall $\lambda_0 = 0$ nicht auftritt und daß $x(T^*) = 0$ ist.

2.13. Man beweise die Transversalitätsbedingung (2.76) von Satz 2.6.

2.14. Man formuliere und beweise Satz 2.6 für das Problem, wenn T aus dem fixen Intervall $[\underline{T}, \bar{T}]$ optimal zu bestimmen ist (vgl. Korollar 2.1).

2.15. Man zeige, daß für das Vampirproblem (Übungsbeispiel 1.11)

$$\max_c \int_0^\infty e^{-rt} U(c)\,dt$$
$$\dot{x} = (n + a - c)x - c,$$
$$x(0) = x_0, \ \lim_{t\to\infty} x(t) \geqq 0$$

die maximierte Hamiltonfunktion H° bei konkaver Nutzenfunktion U *nicht* konkav in x ist. Durch die Zustandstransformation

$$y = \ln(1 + x)$$

wird die maximierte Hamiltonfunktion im neuen Zustand y konkav.

Weiterführende Bemerkungen und Literatur zu Kapitel 2

Das hier zugrundegelegte Standardproblem scheint für viele ökonomische Problemstellungen adäquat zu sein. In der Literatur werden allerdings auch andere „Standardformen“ betrachtet, so etwa bei *Leitmann* (1981), wo der Endzustand in einer Zielmannigfaltigkeit liegen soll. Ein Vorteil des hier benutzten Standardproblems ist die Tatsache, daß in der Hamiltonfunktion der Multiplikator $\lambda_0 \neq 0$ ist, d. h. gleich eins gesetzt werden kann, während bei beschränktem Endzustand $\lambda_0 = 0$ sein kann (vgl. Korollar 2.1).

Die Wahl des Anfangszeitpunktes erfolgt o.B.d.A. mit $t = 0$, da dies stets durch eine geeignete Transformation erreichbar ist. Man beachte, daß der hier benutzte Autonomiebegriff wegen des Diskontfaktors in der Zielfunktion sich von der z. B. in der Physik benutzten Definition der Autonomie unterscheidet. Die Erweiterung wurde vorgenommen, da das kanonische Differentialgleichungssystem in laufender Bewertung genau in dem hier als autonom bezeichneten Fall nicht explizit von t abhängt. Die Standardreferenz von Satz 2.1 ist *Pontryagin* et al. (1962). Weitere Beweise findet man bei *Fel'dbaum* (1965), *Leitmann* (1966, 1981), *Luenberger* (1969), *Girsanov* (1972), *Knobloch* und *Kappel* (1974), *Neustadt* (1976), *Michel* (1977), *Ioffe* und *Tihomirov* (1979). Die in Abschnitt 2.3 gegebene kapitaltheoretische Interpretation der notwendigen Optimalitätsbedingungen geht auf *Dorfman* (1969) zurück; vgl. auch *Peterson* (1973), *Clark* (1976), *Stepan* (1977b), *Ludwig* (1978), *Sethi* und *Thompson* (1981a) und *Kamien* und *Schwartz* (1981). Den „Beweis" über die Variationsrechnung findet man bei *Intriligator* (1971) und *Bryson* und *Ho* (1975); in exakterer Form bei *Sage* und *White* (1977).

Hinreichende Optimalitätsbedingungen, welche auf Konkavitätsannahmen von H basieren, gehen auf *Mangasarian* (1966) zurück. Die Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion wurde erstmals von *Arrow* (1968) und *Arrow* und *Kurz* (1970) benützt. Satz 2.2 wurde dort mittels des Enveloppentheorems Lemma 2.1 bewiesen. Einen allgemeinen Beweis des Enveloppentheorems findet man z. B. bei *Derzko* et al. (1984). Die Annahme der stetigen Differenzierbarkeit von ϕ° im Enveloppentheorem kann durch deren Konkavität ersetzt werden. Außerdem kann der Bereich $\Omega(x) = \{\boldsymbol{u} \mid \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \geqq \boldsymbol{0}\}$ von $\boldsymbol{x}$ abhängen, soferne eine entsprechende „constraint qualification" für ψ erfüllt ist (vgl. dazu *Seierstad* und *Sydsaeter*, 1977, bzw. den Beweis zu Satz 7.1). Eine andere Klasse hinreichender Bedingungen („direkte hinreichende Bedingungen" ohne Konkavitätsannahmen) stammt von *Leitmann* und *Stalford* (1971); vgl. Satz 7.2.

Andere diesbezügliche Literaturhinweise sind *Kamien* und *Schwartz* (1971d) *Sethi* (1974a), *Long* und *Vousden* (1977). Die bisher weitreichendste Darstellung hinreichender Optimalitätsbedingungen zum Maximumprinzip haben *Seierstad* und *Sydsaeter* (1977) gegeben; vgl. auch Kap. 7.

Satz 2.3 für das Kontrollproblem (2.55) mit unendlichem Zeithorizont wurde von *Pontryagin* et al. (1962), *Lee* und *Markus* (1967) und *Halkin* (1974) bewiesen. Die Beispiele 2.6 und 2.7 gehen auf *Halkin* (1974) zurück; vgl. auch *Arrow* und *Kurz* (1970, p. 46). Zu Satz 2.4 über die hinreichenden Optimalitätsbedingungen vergleiche man *Seierstad* und *Sydsaeter* (1977) sowie *Long* und *Vousden* (1977, p. 28). Letztere weisen darauf hin, daß die von *Arrow* und *Kurz* (1970, p. 49) angegebenen Bedingungen i.a, nicht für die Optimalität ausreichen.

Die Transversalitätsbedingung (2.70) für den optimalen Endzeitpunkt T^* ist ein Standardresultat, das schon von *Pontryagin* et al. (1962) gemeinsam mit den anderen Bedingungen des Maximumprinzips bewiesen wurde. Die oben gegebene Herleitung von (2.70) ist unabhängig von den restlichen Optimalitätsbedingungen des Maximumprinzips; siehe *Hartl* (1980), *Hartl* und *Sethi* (1983). Eine scheinbar naheliegendere Vorgangsweise wäre, anstelle von (2.71) das Zielfunktional

$$J^*(T) = \int_0^T e^{-rt} F(\boldsymbol{x}(t,T), \boldsymbol{u}(t,T), t)\,dt + e^{-rT} S(\boldsymbol{x}(T,T), T)$$

anzusetzen, wobei $\boldsymbol{x}(t,T)$, $\boldsymbol{u}(t,T)$ die optimale Lösung für das Standardproblem auf dem Intervall $[0,T]$ bezeichnet. Dieser Ansatz wurde von *Näslund* (1966), *Thompson* (1968), *Kamien* und *Schwartz* (1971a), *Sethi* (1973a) und *Tapiero* und *Venezia* (1979) gewählt. Aus der zu (2.72) analogen Beziehung $\frac{dJ^*(T^*)}{dT} = 0$ läßt sich die Bedingung (2.70) allerdings *nicht* direkt folgern, da über die Ausdrücke $\frac{\partial u(t,T)}{\partial T}$ *und* $\frac{\partial x(t,T)}{\partial T}$ keine Informationen vorliegen bzw. $\frac{\partial u}{\partial T}$ gar nicht existieren muß.