Mehrdimensionale Integration

Eine Einführung in die Lebesguesche Theorie

von

Bernd Anger und Heinz Bauer

1976

Walter de Gruyter · Berlin · New York

SAMMLUNG GÖSCHEN 2121

Dr. *Bernd Anger*

Privatdozent für Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg

Dr. *Heinz Bauer*

o. Professor für Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg

ord. Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Anger, Bernd

Mehrdimensionale Integration: eine Einf. in d. Lebesguesche Theorie / von Bernd Anger u. Heinz Bauer.

(Sammlung Göschen; Bd. 2121)
ISBN 3-11-004612-1

NE: Bauer, Heinz:

Inhalt

Die Paragraphen 6 und 16 können bei der ersten Lektüre des Buches überschlagen werden.

Einleitung

Der vorliegende Band soll als ein Baustein verstanden werden, der bei der Behandlung der mehrdimensionalen Integration in den Grundvorlesungen über Analysis Verwendung finden kann. Das Buch setzt sich zum Ziel, in die Theorie des Lebesgueschen Integrals soweit einzuführen, daß spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Integrale (wie z. B. die Gamma-Funktion, die Gaußsche Glockenfunktion, Potentiale von Massenbelegungen) sowie Volumenberechnungen (z. B. der n-dimensionalen Kugel) und das Transformationsverhalten von Integralen (z. B. beim Übergang zu Polarkoordinaten im $\mathbf{R}^p$) behandelt werden können.

Zur Erreichung dieses Zieles sollte der betreffende Abschnitt der Grundvorlesung über Analysis nicht zu einer Spezialvorlesung über Maß und Integral werden. Schon deshalb erschien es uns unzweckmäßig, das Lebesguesche Integral von einer σ-additiven Mengenfunktion ausgehend einzuführen. Wesentlich besser motiviert erscheint uns das hier gewählte Vorgehen:

Bei der Behandlung des Integrals von Funktionen einer Veränderlichen begnügt man sich mit gutem Grund meist mit der Einführung des Integrals für stetige reelle Funktionen auf einem kompakten Intervall der Zahlengeraden. Durch Iteration dieses Integrationsprozesses kann man sodann jeder auf einem kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ im $\mathbf{R}^p$ definierten stetigen reellen Funktion f das Integral

$$\lambda_Q(f) = \int_{a_p}^{b_p} (\ldots(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1)\ldots)\, dx_p$$

zuordnen. λ_Q ist dann eine positive Linearform auf dem Vektorraum $\mathscr{C}(Q)$ der auf Q stetigen reellen Funktionen, also ein (positives) Radon-Maß auf Q. Zunächst wird daher der

Lebesguesche Integralbegriff nur für auf Q definierte Funktionen durch den üblichen Fortsetzungsprozeß mittels Ober- und Unterintegral von λ_Q ausgehend entwickelt. Insbesondere ist dann jede auf einer kompakten Menge $K \subset Q$ definierte stetige reelle Funktion über K λ_Q-integrierbar. So erhält man auf K durch

$$\lambda_K(f) := \int_K f \, d\lambda_Q \qquad (f \in \mathscr{C}(K))$$

das induzierte Radon-Maß λ_K, welches von der speziellen Wahl des Quaders $Q \supset K$ unabhängig ist. Lebesguesches Maß auf dem $\mathbf{R}^p$ heißt dann die Familie $(\lambda_K)_{K \in \mathfrak{K}}$, wobei $\mathfrak{K}$ das System aller kompakten Teilmengen von $\mathbf{R}^p$ bezeichnet. Durch einen einfachen Grenzübergang ergibt sich das Lebesguesche Integral von Funktionen über Teilmengen des $\mathbf{R}^p$. Dabei lassen sich die zunächst für Quader gewonnenen Sätze mühelos übertragen. Dies liegt entscheidend an der Verträglichkeit der Maße λ_K: für je zwei kompakte Mengen $L \subset K$ des $\mathbf{R}^p$ induziert λ_K das Maß λ_L auf L.

Dieser Einstieg in die Lebesguesche Theorie hat noch weitere Vorteile. Ohne jede zusätzliche Schwierigkeit kann die Integration sogleich für beliebige (positive Radon-)Maße auf dem $\mathbf{R}^p$ entwickelt werden. Ein solches Maß ist dabei definitionsgemäß eine Familie $(\mu_K)_{K \in \mathfrak{K}}$ verträglicher Maße: Jedes μ_K ist ein positives Radon-Maß auf $K \in \mathfrak{K}$, welches auf jeder kompakten Menge $L \subset K$ das Maß μ_L induziert. Auf diese Weise lassen sich weitere Beispiele (z. B. das Diracsche Maß und Maße mit Dichten) erfassen. Ist aber dieser Standpunkt erreicht, so liegt kein Grund vor, den euklidischen Raum $\mathbf{R}^p$ nicht durch einen beliebigen metrischen Raum E zu ersetzen. Der Student lernt heute ohnedies den Begriff des metrischen Raumes meist schon im ersten Semester kennen. Auch durch diesen Schritt der Verallgemeinerung wird die Darstellung nicht durch zusätzliche Schwierigkeiten belastet. Sie wird vielmehr durchsichtiger und durch weitere Beispiele (wie etwa Kurvenintegrale) angereichert; ferner eröffnet sich die Möglichkeit eines späteren Ausbaus der Theorie in Richtung auf die Integralsätze der Analysis durch die Einbeziehung von Mannigfaltigkeiten. Schließlich hat der hier verwendete Einstieg in die Lebesguesche Theorie die Annehmlichkeit, einer modernen Entwicklung angepaßt zu sein, nämlich Maße auf beliebigen Hausdorff-Räumen in analoger Weise einzuführen.

Das Buch gliedert sich in drei Kapitel. Zunächst wird die Integration auf kompakten metrischen, sodann auf beliebigen metrischen Räumen behandelt. Bereits dabei stehen Beispiele zum Lebesgue-Integral immer im Vordergrund. Das letzte Kapitel behandelt die geometrische Interpretation sowie spezielle Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals, insbesondere sein Transformationsverhalten. Ein abschließender „Ausblick“ soll der Klärung des eingenommenen Standpunktes und der Bezüge zu anderen Zweigen der Integrationstheorie dienen.

Stets ist es unsere Absicht, die wichtigen Teile der Theorie soweit zu entwickeln, daß sich interessante Anwendungen ergeben. Hingegen wird kein endgültiger Abschluß angestrebt.

An Vorkenntnissen wird eine Vertrautheit mit den üblichen Begriffen einer zweisemestrigen Vorlesung über Differential- und Integralrechnung bis hin zur Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der elementaren Theorie metrischer Räume vorausgesetzt. Der im Umgang mit metrischen Räumen ungeübte Leser braucht sich jedoch nicht abschrecken zu lassen: Er denke sich einen im Text auftretenden metrischen Raum E stets durch den $\mathbf{R}^p$ bzw. im ersten Kapitel durch eine kompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^p$ ersetzt.

Den Herren *J. Lembcke* und *G. Nöbeling* danken wir für eine Reihe kritischer Bemerkungen zu einem Vorentwurf dieses Buches. Frau *H. Dohrmann* gilt unser Dank für die sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes.

Kapitel I

Maße und Integrale auf kompakten metrischen Räumen

Es sei zunächst noch einmal an den bereits in der Einleitung präzisierten Ausgangspunkt unserer Untersuchungen erinnert: Als bekannt wird vorausgesetzt, wie man für jede stetige reelle Funktion f auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ der Zahlengeraden $\mathbf{R}$ das Integral

$$\lambda_I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

erklärt. Dann ist

$$\lambda_I : \mathscr{C}(I) \to \mathbf{R}$$

eine Abbildung, die auf der Menge $\mathscr{C}(I)$ aller auf I stetigen reellen Funktionen definiert ist und Werte in $\mathbf{R}$ annimmt.

Ausgehend von der Kenntnis dieser Abbildungen λ_I für kompakte Intervalle $I \subset \mathbf{R}$ soll nun ein Integralbegriff, nämlich der des *Lebesgue*-Integrals entwickelt werden, der es erlaubt, *möglichst vielen*, auf *geeigneten* Teilmengen A des $\mathbf{R}^p$ definierten Funktionen f ein p-dimensionales Integral $\int_A f(x)\,dx$ so zuzuordnen, daß

1. die *Abhängigkeit des Integrals* von A und f überschaubaren Gesetzmäßigkeiten genügt;
2. die *geometrische Interpretierbarkeit* des Integrals $\int_A f(x)\,dx$ für eine nicht-negative Funktion f als $(p+1)$-dimensionales Volumen (oder Maß) der Menge

   $$\{(x, x_{p+1}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R} : x \in A, 0 \leqq x_{p+1} \leqq f(x)\}$$

   ermöglicht wird.

Insbesondere soll für die konstante Funktion $f = 1$ das $(p+1)$-dimensionale Volumen $\int_A 1\,dx$ der „Säule“

$$\{(x, x_{p+1}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R} : x \in A, 0 \leqq x_{p+1} \leqq 1\}$$

mit „Basis" A und „Höhe" 1 entsprechend der elementargeometrischen Berechnung des Rauminhalts einer Säule aus Grundfläche und Höhe mit dem p-dimensionalen Volumen von $A \subset \mathbf{R}^p$ identisch sein. Der angestrebte Integralbegriff soll also insbesondere so beschaffen sein, daß die Definition des p-dimensionalen *Volumens* von $A \subset \mathbf{R}^p$ durch $\int_A 1\,dx$ für die ersten drei Dimensionszahlen $p = 1, 2, 3$ mit den elementargeometrischen Begriffen für Länge, Fläche bzw. Rauminhalt von A übereinstimmt.

Im ersten Kapitel des Buches wird diese Konstruktion des Integrals für Mengen $A \subset \mathbf{R}^p$ durchgeführt, welche relativkompakt, d. h. in einem kompakten (achsenparallelen) Quader des $\mathbf{R}^p$ enthalten sind. Dabei liegt der Nachdruck zunächst auf der Aufgabe 1 und dem zweiten Teil der Aufgabe 2 (Definition des p-dimensionalen Volumens).

Beide Aufgaben werden sogleich in größerer Allgemeinheit gelöst: An die Stelle eines kompakten Intervalles I wird ein beliebiger kompakter metrischer Raum E, an die Stelle von λ_I ein geeignet beschaffenes Funktional auf $\mathscr{C}(E)$ treten. Dabei wird die Beweistechnik durchsichtiger und nicht erschwert sowie der Anwendungsbereich der Untersuchungen verbreitert.

§ 1 Radon-Maße auf kompakten metrischen Räumen

Für jedes kompakte Intervall I der Zahlengeraden hat die Abbildung $\lambda_I : \mathscr{C}(I) \to \mathbf{R}$ folgende wohlbekannte Eigenschaften: Der Definitionsbereich $\mathscr{C}(I)$ ist ein Vektorraum (über dem Körper $\mathbf{R}$), dessen Operationen durch

$$(1.1) \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$(1.2) \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$$

definiert sind. Die Abbildung λ_I ist eine lineare Abbildung in $\mathbf{R}$, d. h. es gilt

$$(1.3) \qquad \lambda_I(f+g) = \lambda_I(f) + \lambda_I(g),$$

$$(1.4) \qquad \lambda_I(\alpha f) = \alpha \lambda_I(f)$$

für beliebige $f, g \in \mathscr{C}(I)$ und $\alpha \in \mathbf{R}$. Darüber hinaus ist $\mathscr{C}(I)$ geordnet durch die Relation

$$(1.5) \qquad f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x) \text{ für alle } x \in I;$$

λ_I respektiert diese Relation:

$$(1.6) \qquad f \leqq g \Rightarrow \lambda_I(f) \leqq \lambda_I(g) \qquad (f, g \in \mathscr{C}(I)).$$

Weil $f \leqq g$ zu $0 \leqq g - f$ äquivalent und λ_I linear ist, läßt sich (1.6) äquivalent umformen zu

$$(1.7) \qquad f \geqq 0 \Rightarrow \lambda_I(f) \geqq 0 \qquad (f \in \mathscr{C}(I)).$$

Es wird sich nun zeigen, daß allein diese Eigenschaften von λ_I zusammen mit der Kompaktheit von I die Konstruktion des Lebesgueschen Integrals ermöglichen.

Wir führen folgende Sprechweisen ein: Ist E eine Menge und $\mathscr{F}$ die Menge aller auf E definierten numerischen Funktionen $f: E \to \bar{\mathbf{R}}$, so schreiben wir $f \leqq g$ genau dann, wenn

$$f(x) \leqq g(x) \qquad \text{für alle } x \in E$$

gilt. $\leqq$ ist dann eine Ordnungsrelation auf $\mathscr{F}$. Für jede Teilmenge $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sei

$$\mathscr{G}_+ := \{f \in \mathscr{G} : f \geqq 0\}$$

die Menge der positiven (d.h. nicht-negativen) Funktionen aus $\mathscr{G}$.

$\mathscr{V} \subset \mathscr{F}$ nennen wir einen *Vektorraum reeller Funktionen* auf E, wenn jedes $f \in \mathscr{V}$ nur Werte in $\mathbf{R}$ annimmt und $\mathscr{V}$ bezüglich der durch (1.1) und (1.2) definierten Operationen stabil ist. *Linearform* auf $\mathscr{V}$ heißt jede Abbildung $\mu : \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ mit den (1.3) und (1.4) entsprechenden Eigenschaften:

$$(1.8) \qquad \mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g) \qquad (f, g \in \mathscr{V});$$

$$(1.9) \qquad \mu(\alpha f) = \alpha \mu(f) \qquad (f \in \mathscr{V}, \alpha \in \mathbf{R}).$$

Gilt darüber hinaus die (1.7) entsprechende Eigenschaft

$$f \in \mathscr{V}_+ \Rightarrow \mu(f) \geqq 0, \tag{1.10}$$

so heißt μ eine *positive Linearform*.

Ausgangspunkt unserer Integrationstheorie sind positive Linearformen auf dem Vektorraum $\mathscr{C}(E)$ der stetigen reellen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum E.

1.1 Definition. *Sei E ein kompakter metrischer Raum. Dann heiße jede positive Linearform $\mu : \mathscr{C}(E) \to \mathbf{R}$ ein positives Radon-Maß – kurz ein Maß – auf E. $\mathscr{M}_+(E)$ bezeichne die Menge aller Maße auf E.*

Dieser Maßbegriff bedeutet: Für die Funktionen $f \in \mathscr{C}(E)$ ist das zu definierende Integral in der Form des Funktionswertes $\mu(f)$ von μ an der Stelle f bereits vorgegeben. Hieraus soll ein Integralbegriff entwickelt werden, der den Anforderungen 1 und 2 des Vorspanns genügt. In μ liegt also die Keimzelle einer Integrationstheorie vor.

1.2 Beispiele. (1) Für jedes kompakte Intervall $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ definiert $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ die positive Linearform λ_I auf $\mathscr{C}(I)$, also ein Maß auf I. Dieses heißt *Lebesgue-Maß λ_I auf I.*

(2) Sei E ein kompakter metrischer Raum und a ein Punkt von E. Dann ist $\varepsilon_a : \mathscr{C}(E) \to \mathbf{R}$, definiert durch

$$\varepsilon_a(f) := f(a), \tag{1.11}$$

ein Maß auf E. Es heißt *Dirac-Maß* oder (Maß der) *Einheitsmasse in a*.

(3) Sei D eine *endliche* Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes E und $\alpha : D \to \mathbf{R}_+$ eine positive reelle Funktion auf D. Dann wird durch

$$f \mapsto \sum_{x \in D} \alpha(x) f(x) \qquad (f \in \mathscr{C}(E))$$

ein Maß μ auf E definiert, welches *diskretes Maß* mit der

Gewichtsfunktion $\alpha: D \to \mathbf{R}_+$ heißt. Im Fall $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$ gilt

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) f(a_i) \tag{1.12}$$

für jedes $f \in \mathscr{C}(E)$.

(4) Ist der kompakte metrische Raum E *diskret*, so handelt es sich um eine endliche Menge versehen mit der diskreten Metrik, welche nur der Werte 0 und 1 fähig ist. In diesem Fall ist *jedes Maß* μ *auf* E *ein diskretes Maß* mit der Gewichtsfunktion $\alpha: E \to \mathbf{R}_+$, definiert durch

$$\alpha(x) := \mu(f_x) \qquad (x \in E).$$

(Dabei bezeichnet f_x die Funktion auf E, welche in x den Wert 1 und in allen anderen Punkten den Wert 0 hat. Sie ist stetig wegen der Diskretheit von E.)

In der Tat: Für jedes $f \in \mathscr{C}(E)$ gilt

$$f = \sum_{x \in E} f(x) f_x$$

und somit

$$\mu(f) = \sum_{x \in E} f(x)\, \mu(f_x) = \sum_{x \in E} \alpha(x) f(x).$$

Aus der Definition einer Gewichtsfunktion folgt sofort, daß obiges α für $\mu \in \mathscr{M}_+(E)$ die einzige auf E definierte Gewichtsfunktion ist. Auf diskreten kompakten metrischen Räumen entsprechen sich also Maße und auf E definierte Gewichtsfunktionen eineindeutig.

(5) $\mathscr{M}_+(E)$ ist eine Menge reeller Funktionen auf $\mathscr{C}(E)$. Daher sind für $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+(E)$ auch $\mu + \nu$ und $\alpha\mu$ mit $\alpha \in \mathbf{R}$ definiert. Offenbar handelt es sich wieder um Maße auf E, sofern $\alpha \geqq 0$. $\mathscr{M}_+(E)$ ist daher ein „konvexer Kegel" im Vektorraum aller reellen Funktionen auf $\mathscr{C}(E)$. Speziell enthält $\mathscr{M}_+(E)$ die Nullform 0; diese heißt *Nullmaß* auf E.

Ist beispielsweise μ ein diskretes Maß auf E mit der auf einer endlichen Menge D definierten Gewichtsfunktion $\alpha: D \to \mathbf{R}_+$, so gilt

$$\mu = \sum_{x \in D} \alpha(x) \varepsilon_x.$$

(6) Sei $T = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ sowie $t \mapsto e^{it}$ die übliche Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \to T$ von T. Durch

$$(1.13) \qquad \sigma(f) := \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt \qquad (f \in \mathscr{C}(T))$$

wird ein Maß σ auf T definiert. Es gilt

$$(1.14) \qquad \sigma(f) = \lambda_{[0, 2\pi]}(f \circ \varphi)$$

für alle $f \in \mathscr{C}(T)$. Im Sinne der folgenden allgemeinen Konstruktion ist σ das *Bild* von $\lambda_{[0, 2\pi]}$ bei der Abbildung φ.

1.3 Satz. *Sei $\varphi : E \to F$ eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes E in einen weiteren derartigen Raum F. Dann ist für jedes Maß μ auf E*

$$(1.15) \qquad f \mapsto \mu(f \circ \varphi)$$

ein Maß $\varphi(\mu)$ auf F. Dieses heißt Bild von μ bei der Abbildung φ.

Für alle $f \in \mathscr{C}(F)$ gilt somit

$$(1.16) \qquad \varphi(\mu)(f) := \mu(f \circ \varphi).$$

Der Beweis besteht im einfachen Nachprüfen der Eigenschaften (1.8) bis (1.10). Man beachte, daß wegen der Stetigkeit von φ für $f \in \mathscr{C}(F)$ bzw. $f \in \mathscr{C}_+(F)$ die Funktion $f \circ \varphi$ in $\mathscr{C}(E)$ bzw. $\mathscr{C}_+(E)$ liegt.

1.4 Beispiele. (1) Allgemeiner als im letzten Beispiel sei E eine *Kurve* in einem metrischen Raum, d.h. das Bild eines kompakten Intervalles $I \subset \mathbf{R}$ unter einer stetigen Surjektion $\varphi : I \to E$. (Jede solche Abbildung wird eine *Parametrisierung* von E genannt.) In Analogie zu (1.14) betrachten wir das Bildmaß $\varphi(\lambda_I)$. Es heißt *Lebesgue-Maß auf E* bei der Parametrisierung φ.

(2) Sei wie in 1.2, Beispiel (6) E die Einheitskreislinie T in $\mathbf{C}$, $\varphi : [0, 2\pi] \to T$ die dort betrachtete Parametrisierung von T und $\sigma = \varphi(\lambda_{[0, 2\pi]})$ das Lebesgue-Maß auf T bei dieser Parametrisierung. Für $\tau \in \mathbf{R}$ bezeichne φ_τ die (Rotations-)Abbildung

(1.17) $$\varphi_\tau(z) := ze^{i\tau} \qquad (z \in T)$$

von T auf sich. Es gilt

(1.18) $$\varphi_\tau(\sigma) = \sigma \qquad (\tau \in \mathbf{R}).$$

Man spricht daher von der *Rotations-Invarianz* von σ.
Für $f \in \mathscr{C}(T)$ gilt nämlich

$$\varphi_\tau(\sigma)(f) = \sigma(f \circ \varphi_\tau) = \int_0^{2\pi} f \circ \varphi_\tau(\varphi(t))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{i(t+\tau)})\,dt = \int_\tau^{2\pi+\tau} f(e^{ix})\,dx$$

$$= \int_\tau^{2\pi} f(e^{ix})\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\tau} f(e^{ix})\,dx = \int_\tau^{2\pi} f(e^{ix})\,dx + \int_0^\tau f(e^{i(t+2\pi)})\,dt$$

$$= \int_\tau^{2\pi} f(e^{ix})\,dx + \int_0^\tau f(e^{it})\,dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt = \sigma(f)$$

wegen der Periodizitätseigenschaften von $x \mapsto e^{ix}$. Damit ist (1.18) gezeigt.

Mit σ ist offenbar auch das Maß $\sigma_1 := \frac{1}{2\pi}\sigma$ rotationsinvariant. Wegen $\sigma_1(1) = \frac{1}{2\pi}\sigma(1) = 1$ heißt σ_1 das normierte Lebesgue-Maß auf T bei der Parametrisierung φ oder das *normierte Haarsche Maß* auf T.

Maße auf E können nicht nur mit reellen Zahlen $\alpha \geqq 0$, sondern allgemeiner mit stetigen reellen Funktionen $g \geqq 0$ multipliziert werden. Dies lehrt der folgende Satz.

1.5 Satz. *Sei E ein kompakter metrischer Raum und $g \in \mathscr{C}_+(E)$. Dann ist mit jedem Maß μ auf E auch*

(1.19) $$f \mapsto \mu(gf)$$

ein Maß auf E. Es wird mit $g\mu$ bezeichnet. g heißt Dichte von $g\mu$ bezüglich μ.

Somit gilt

$$(1.20) \qquad (g\mu)(f) := \mu(gf) \qquad (f \in \mathscr{C}(E)).$$

Der Beweis besteht im Nachrechnen der Eigenschaften (1.8) bis (1.10). Man beachte, daß mit f auch gf in $\mathscr{C}(E)$ bzw. $\mathscr{C}_+(E)$ liegt.

Ist g konstant mit dem konstanten Wert $\alpha \in \mathbf{R}_+$, so liefert (1.20) gerade die in 1.2, Beispiel (5) besprochene Multiplikation von $\mu \in \mathscr{M}_+(E)$ mit dem Skalar $\alpha \geqq 0$.

1.6 Beispiel. Sei $\varphi : I \to \mathbf{R}^p$ eine stetig differenzierbare Abbildung eines kompakten, nicht ausgearteten* Intervalles $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, also $E := \varphi(I)$ eine stetig differenzierbare Kurve in $\mathbf{R}^p$ mit der Parametrisierung φ. Bezeichnet $\|x\|$ die euklidische Norm (d.h. Länge) eines Vektors $x \in \mathbf{R}^p$, so ist $t \mapsto \|\varphi'(t)\|$ eine Funktion $g \in \mathscr{C}_+(I)$, also $g\lambda_I$ ein Maß auf I. Das zugehörige Bildmaß

$$(1.21) \qquad \beta_\varphi := \varphi(g\lambda_I)$$

heißt *Bogenmaß* β_φ *auf der Kurve* E bei der Parametrisierung φ. Für $f \in \mathscr{C}(E)$ gilt somit

$$(1.22) \qquad \beta_\varphi(f) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| f(\varphi(t))\, dt.$$

Für die konstante Funktion $f = 1$ ergibt sich

$$(1.23) \qquad \beta_\varphi(1) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt,$$

die sog. *Bogenlänge* von E. Diese ist bekanntlich das Supremum der euklidischen Längen der E einbeschriebenen Streckenzüge.

Im Beispiel 1.2 (6) der Einheitskreislinie T und der Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \to T$ mit $\varphi(t) = e^{it}$ ist $\beta_\varphi = \sigma = \varphi(\lambda_{[0, 2\pi]})$.

* Ein Intervall heißt nicht ausgeartet, wenn es weder leer noch einpunktig ist.

Abschließend ziehen wir eine einfache, aber wichtige Folgerung aus den definierenden Eigenschaften eines Maßes.

1.7 Satz. *Jedes Maß μ auf einem kompakten metrischen Raum E ist isoton, d.h. für alle $f, g \in \mathscr{C}(E)$ gilt:*

(1.24) $$f \leqq g \;\Rightarrow\; \mu(f) \leqq \mu(g).$$

Ferner gilt

(1.25) $$|\mu(f)| \leqq \mu(|f|) \qquad (f \in \mathscr{C}(E)).$$

Beweis. Die Isotonie folgt aus der Linearität und Positivität von μ, da $g - f \geqq 0$ und somit $\mu(g) - \mu(f) = \mu(g - f) \geqq 0$ ist. Mit f liegt auch $|f|$, d.h. die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ in $\mathscr{C}(E)$. Aus $f \leqq |f|$ und $-f \leqq |f|$ folgen wegen der Isotonie $\mu(f) \leqq \mu(|f|)$ und $-\mu(f) = \mu(-f) \leqq \mu(|f|)$, also gilt $|\mu(f)| \leqq \mu(|f|)$. □

§ 2 Mehrdimensionales Lebesgue-Maß

Die Lösung der einleitend erwähnten Aufgabe 2 erfordert insbesondere die Definition des Integrals von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Dem dient die Einführung des mehrdimensionalen Lebesgue-Maßes auf Quadern. Als Vorbereitung benötigen wir die beiden folgenden Sätze:

2.1 Satz. *Seien X bzw. Y kompakte Teilmengen des $\mathbf{R}^m$ bzw. des $\mathbf{R}^n$. Für jede stetige Funktion $f \in \mathscr{C}(X \times Y)$ und jedes $x \in X$ liegt die auf Y durch $y \mapsto f(x, y)$ definierte Funktion f^x in $\mathscr{C}(Y)$. Für jedes Maß $\mu \in \mathscr{M}_+(Y)$ liegt die auf X durch $x \mapsto \mu(f^x)$ definierte Funktion g in $\mathscr{C}(X)$.*

Beweis. Sei $f \in \mathscr{C}(X \times Y)$. Offenbar ist $f^x \in \mathscr{C}(Y)$ für alle $x \in X$. Da $X \times Y$ abgeschlossen und beschränkt im $\mathbf{R}^{m+n}$, also kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Folglich existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $y_1, y_2 \in Y$ und alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$ gilt:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq \varepsilon.$$

Dabei bezeichnet $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$ den euklidischen Abstand der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) im $\mathbf{R}^{m+n}$. Wählt man speziell $y_1 = y_2$, so ergibt sich:

Für alle $y \in Y$ und alle $x_1, x_2 \in X$ mit dem m-dimensionalen euklidischen Abstand

$$\|x_1 - x_2\| = \|(x_1, y) - (x_2, y)\| < \delta$$

gilt

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leqq \varepsilon,$$

also

$$|f^{x_1} - f^{x_2}| \leqq \varepsilon.$$

Nach Satz 1.7 ist dann

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |\mu(f^{x_1} - f^{x_2})| \leqq \mu(|f^{x_1} - f^{x_2}|) \leqq \mu(\varepsilon) = \varepsilon\mu(1).$$

Daraus folgt die Stetigkeit von g. □

Die Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration behandelt der folgende Satz.

2.2 Satz. *Sei $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt und $I \subset \mathbf{R}$ ein nicht ausgeartetes kompaktes Intervall. $f \in \mathscr{C}(I \times K)$ sei eine auf $I \times K$ nach der ersten Variablen partiell differenzierbare Funktion, für die die Abbildung*

$$(x, y) \mapsto D_1 f(x, y)$$

in $\mathscr{C}(I \times K)$ liegt. Für jedes Maß $\mu \in \mathscr{M}_+(K)$ ist dann*

$$x \mapsto \mu(f^x)$$

eine differenzierbare Funktion g auf I, deren Ableitung in $x \in I$ durch

$$g'(x) = \mu\big((D_1 f)^x\big)$$

gegeben ist.

Beweis. Für alle $x \in I$ liegen die Funktionen f^x, $(D_1 f)^x$ in $\mathscr{C}(K)$. $D_1 f$ ist auf der kompakten Menge $I \times K$ gleichmäßig

* $D_1 f(x, y)$ bezeichne die partielle Ableitung von f nach der ersten Variablen im Punkte (x, y).

stetig. Daher existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle (x, y), $(x', y') \in I \times K$ mit $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$ gilt:

$$|D_1 f(x, y) - D_1 f(x', y')| < \varepsilon .$$

Seien nun $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_2 - x_1| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert zu jedem $y \in K$ ein x_y zwischen x_1 und x_2, so daß

$$D_1 f(x_y, y) = \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1}$$

gilt. Für alle $y \in K$ ist $|x_y - x_1| < \delta$, also

$$\|(x_y, y) - (x_1, y)\| = |x_y - x_1| < \delta$$

und somit

$$\left|\frac{f^{x_2}(y) - f^{x_1}(y)}{x_2 - x_1} - (D_1 f)^{x_1}(y)\right| = |D_1 f(x_y, y) - D_1 f(x_1, y)| < \varepsilon .$$

Daher ist nach Satz 1.7

$$\begin{aligned} &\left|\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} - \mu\left((D_1 f)^{x_1}\right)\right| \\ = &\left|\frac{\mu(f^{x_2}) - \mu(f^{x_1})}{x_2 - x_1} - \mu\left((D_1 f)^{x_1}\right)\right| \\ \leqq \mu &\left(\left|\frac{f^{x_2} - f^{x_1}}{x_2 - x_1} - (D_1 f)^{x_1}\right|\right) \leqq \mu(\varepsilon) = \varepsilon \mu(1) . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

2.3 Satz. *Seien $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ kompakte Intervalle in* $\mathbf{R}$. *Für jede Funktion $f \in \mathscr{C}([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n])$ und jede Permutation π von $\{1, \ldots, n\}$ auf sich existiert das iterierte Integral*

$$\int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}} \left(\ldots\left(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{\pi(1)}\right) \ldots\right) dx_{\pi(n)} .$$

Es ist unabhängig von der speziellen Permutation π.

Beweis. Die Existenz der Integrale ergibt sich durch vollständige Induktion aus 2.1, angewandt auf die Lebesgue-Maße $\lambda_{[a_{\pi(1)}, b_{\pi(1)}]}, \ldots, \lambda_{[a_{\pi(n)}, b_{\pi(n)}]}$. Es genügt, die Unabhängigkeit für