de Gruyter Lehrbuch programmiert

Zimmermann · Zielinski · Lineare Programmierung

Lineare Programmierung

Ein programmiertes Lehrbuch
für Studierende des Faches Operations Research

von
Hans-Jürgen Zimmermann
Johannes Zielinski

Mitarbeit
Basistext: Sebastian Dworatschek
Programmierung: Wilhelm Keller

Walter de Gruyter & Co · Berlin · New York 1971

Satz: IBM-Composer, Walter de Gruyter & Co. · Fotosatz J. Prill, Berlin
Druck: Sala, Berlin – Printed in Germany

ISBN 3 11 001992 2

Vorwort

Seit fast 15 Jahren beschäftigt man sich auch in Deutschland mit Methoden des Operations Research oder der Unternehmensforschung, wie dieses Gebiet im deutschen Sprachgebiet oft genannt wird. Anwendungen der Methoden dieser Disziplin sind sowohl auf wirtschaftswissenschaftlichen als auch auf technischen und naturwissenschaftlichen Gebieten zu finden, und der Nutzen ihrer Anwendung konnte inzwischen in vielen Fällen gezeigt werden.

Die Ausbildung in Unternehmensforschung an deutschen Universitäten nimmt seit einigen Jahren – vor allem im Rahmen des wirtschaftswissenschaftlichen Studiums – einen immer größeren Raum ein. Leider ist die Zahl der Lehrbücher auf diesem Gebiet in Deutschland noch immer verschwindend klein. Das gleiche gilt in noch stärkerem Maße für Bücher, die es dem Praktiker erlauben, sich in das Gebiet der Unternehmensforschung ohne oder nur mit geringer fremder Hilfe einzuarbeiten. Es ist das Hauptanliegen dieses Buches, diese Lücke auf einem kleinen, aber wichtigen Teilgebiet der Unternehmensforschung schließen zu helfen.

Das Lineare Programmieren bietet sich hierfür aus verschiedenen Gründen an:

1. Es ist eine der am häufigsten angewandten Methoden der Unternehmensforschung. Die meisten Hersteller von elektronischen Rechenanlagen bieten dafür bereits fertige Programme an, und in einigen deutschen Unternehmen gehört die Anwendung des Linearen Programmierens zur Entscheidungsvorbereitung zu den Routineaufgaben.

   Hauptanwendungsgebiete sind dabei die Produktionsplanung und -steuerung, die Investitionsplanung, Probleme des Vertriebsbereiches sowie Probleme des Transportwesens.

2. Die für das Verständnis des Linearen Programmierens notwendigen mathematischen Vorkenntnisse lassen sich ohne große Schwierigkeiten im Rahmen des vorliegenden Buches vermitteln, so daß vom Leser keine speziell mathematische Vorbildung verlangt werden muß.

3. Das Lineare Programmieren ist in vielen Beziehungen typisch für Methoden der Unternehmensforschung: neben dem iterativen Vorgehen bei der Bestimmung optimaler Lösungen mit Hilfe der Simplex-Methode sind heuristische Züge (z. B. bei der im Buch behandelten Vogel'schen Approximationsmethode) zu finden, die auf diesem Gebiet immer wichtiger werden. Die Beschäftigung mit dem Linearen Programmieren eignet sich also besonders gut als Einführung in die Unternehmensforschung.

Das vorliegende Buch führt den Lernenden von den mathematischen Grundlagen des Linearen Programmierens über die am häufigsten benutzte Methode, das sogenannte Simplex-Verfahren, bis in das Gebiet der Dualitätsbetrachtungen im Linearen Programmieren. Diese sind die Basis, auf der alle weitergehenden Methoden des Linearen Programmierens (wie z. B. das parametrische Programmieren, das ganzzahlige Programmieren usw.) aufbauen. Außerdem erschließen Dualitätsbetrachtungen dem Verwender von Linearem Programmieren weitere Informationen, die bereits in den normalen Simplex Tableaus enthalten sind, jedoch nicht ohne weiteres erkannt werden können. Nach einem erfolgreichen Studium des vorliegenden Textes sollte der Leser in der Lage sein, sowohl elementares Lineares Programmieren selbst anzuwenden als auch in anspruchsvollere Gebiete des Linearen Programmierens einzudringen.

Das programmierte Lehrbuch als besondere und neuartige Form der Vermittlung von Lernstoff bedarf einiger ausführlicherer Erläuterungen:

Unsere Gesellschaft und ihre Kultur benötigen heute Menschen, die ihre individuelle Begabung durch persönliche Akte des Lernens voll ausschöpfen und entfalten, um sie dann, verwandelt in ein verantwortetes Können, in den Dienst des Allgemeinwohls zu stellen.

Diese Bedingung läßt sich auch so formulieren: Lerninteresse und Lernmöglichkeiten (Neigung und Eignung) der Einzelperson sind zu fördern und human zu nutzen. Das zwingt die Pädagogik in eine zentrale Aufgabe: Methoden bereitzustellen, die den individuellen Lernprozeß ermöglichen, ihn institutionell konzipieren und sicherstellen.

Bislang überließ man es dem Lernenden, mit dem Lehrstoff, so gut und so schlecht es ging, fertig zu werden. Wenn hin und wieder ein sparsamer Hinweis gegeben wurde, wie man anwendungsbereites Wissen erwerben und zu sachverpflichtetem Können und Verhalten ausbauen könne, dann geschah dies aus der gütigen Stimmung eines menschenfreundlichen Pädagogen, nicht aber grundsätzlich, nicht theoretisch fundiert und wenig zielbewußt.

Die Methode der programmierten Unterweisung ist u. W. die erste Methode, die prinzipiell vom Lernenden her entwickelt und für den Lernenden als ein praktikabler und erfolgversprechender Weg des Lernens gestaltet wurde.

Wenn im folgenden kurz auf die theoretische Begründung der programmierten Unterweisung eingegangen wird, soll gleichzeitig für den aufmerksamen Leser deutlich werden, wie er von einem Lernprogramm nützlichen und rechten Gebrauch machen kann.

Ein Lernprogramm stellt die Anwendung der Methode der programmierten Unterweisung in einem bestimmten thematisch eingegrenzten Fall dar. Hier heißt das Thema des Lernprogramms „Lineare Programmierung".

Das Lernprogramm ist unterteilt in kleine, leicht überschaubare und faßliche Lerneinheiten, Lernelemente genannt. Daß jedes Lernelement eine fortlaufende Nummer erhält, dient der Übersicht und Gliederung.

Entscheidend für den Lernerfolg sind Aufbau und Struktur eines Lernelements. Dem Lernenden – dem Adressaten, wie man ihn in der einschlägigen Fachsprache nennt – werden in einem Lernelement in der Regel folgende Denk- und Arbeitsschritte abverlangt:

1. Lesen und denkendes Erfassen einer Information eines neuen wohlabgemessenen Stoffteils.
2. Durchdenken und Bearbeiten einer Aufgabe, die so geartet ist, daß eine anschauliche Vorstellungsbildung zu disponiblem Wissen führt.
3. Erarbeiten der Lösung und schriftliche Fixierung der Lösung.
4. Nunmehr folgt der wichtigste und für den Lernfortschritt ebenso wie für die nachhaltige Wirksamkeit des Lernens entscheidende Schritt. Das Lernprogramm enthält nämlich die richtigen Lösungen jeder Aufgabe. Damit fordert es zu einem sofortigen Antwortvergleich oder zu einer Lösungskontrolle heraus. Diese Selbstkontrolle des Lernenden enthebt ihn aus der Bevormundung, die unweigerlich mit einer Fremdkontrolle verbunden ist. Im Prinzip der Selbstkontrolle werden nicht nur lernkybernetische Tatsachen („Regelkreis des Lernens") wirksam, sondern auch solche, die die geistige Mündigkeit und die Dynamik der Selbstverantwortung herausfordern. Erst durch die institutionell verankerte Selbstkontrolle werden Akte individuellen Lernens möglich. Der Lehrende, der diesen Prozeß bedenkt und vorbereitet, kann ohne Belastung für seine pädagogische Verantwortung aus dem Unterweisungsgeschehen heraustreten. Er weiß, daß das Lernprogramm eine methodische Veranstaltung ist, die es dem Lernenden gestattet, in individuellem Vorgehen, im eigenen Tempo, nach eigenem Rhythmus und in strenger Verantwortung vor sich selbst das definierte Lernziel mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit zu erreichen.

Überlegen wir, warum die Lernwirksamkeit von Lernprogrammen so erstaunlich ist, dann haben uns die Darlegungen über den Aufbau eines Lernelements wichtige Gründe dafür genannt:

1. Der Lernende bearbeitet jede Information des Lernstoffes in je verschiedenen Denkstationen mindestens fünf- bis sechsmal (Lesen, Erfassen, Durchdenken einer Aufgabe, Lösen der Aufgabe, schriftliches Fixieren der Lösung, Antwortvergleich). Oft geschieht das in derartigen mikrostrukturellen Verfeinerungen, daß ihm dieser Durchgang durch eine Information bis zu dem Punkt, da er sie operationabel beherrscht, gar nicht bewußt wird.
2. Die programmierte Unterweisung macht ernst mit der individuellen Verantwortung im Lernprozeß. Das stellt einen ungeahnten Fundus an Motivation zum Lernen dar. Gleichzeitig bedeutet es eine Herausforderung an den einzelnen Lernenden, seine Lernmöglichkeiten zu aktualisieren, ohne daß eine andere Person in diese Realisierung hineinredet.

Kurz: Das Lernprogramm sagt dem Adressaten also nicht nur, was gelernt werden soll; es gibt zugleich völlig unaufdringlich permanente Hinweise, wie das Was rasch, sicher und angenehm gelernt werden kann.

Wir meinen daher und hoffen, dem interessierten Studierenden der Wirtschaftswissenschaften – speziell im Fach Operations Research – für das Thema LINEARE PROGRAMMIERUNG eine Arbeitshilfe für sein Studium an die Hand geben zu können, mit der er sein Pensum selbständig bewältigen und erfolgreich abschließen wird.

Neben den bereits genannten Mitarbeitern, den Herren Dworatschek und Keller, gilt unser Dank Herrn Professor Dr. Georg Menges und seinen Mitarbeitern sowie Herrn Professor Dr. Peter Mertens, die uns bei der Validierung der Texte unterstützt haben. Besonders sei an dieser Stelle auch Herrn Dr. Dick für seine Mitarbeit vor allem bei der Erstellung des Basistextes für das Gebiet der Transportmethoden sowie dem Verlag De Gruyter für seine tatkräftige Hilfe und seine überaus große Geduld gedankt.

Aachen, Januar 1971

Prof. Dr. Hans-Jürgen Zimmermann
Prof. Dr. Johannes Zielinski

Inhaltsverzeichnis

Hinweise für den Lernenden

Das Lernprogramm zerlegt den in Hauptteile gegliederten Lernstoff in kurze Lerneinheiten, die schrittweise durchzuarbeiten sind. Jede dieser Lerneinheiten besteht in der Regel aus dem

LE = Lernelement, das eine bestimmte Stoff-Information oder Informationsgruppe und meist eine daraus abgeleitete Aufgabe bzw. Frage enthält, und der

A = Antwort auf diese Frage zur Selbstkontrolle.

LE und A sind zur Kennzeichnung der Lernfolge durchgehend numeriert und durch die jeweilige Nummer aufeinander bezogen. Jede Antwort ist grundsätzlich von der entsprechenden Frage aus nicht sichtbar, also erst auf dem nächsten Blatt wiedergegeben, und dient ausschließlich zur Überprüfung der eigenen Entscheidung.

Beachten Sie die Aufteilung jeder Buchseite in zwei Flächen. Beim Beginn der Arbeit ist von der rechten oberen (weiß) Seitenhälfte auszugehen und die Lektüre schrittweise durch Umblättern jeweils auf der folgenden rechten oberen (weiß) Seitenhälfte fortzusetzen. Haben Sie die LE 1 – LE 90 bis zum Schluß des Buches auf Seite 221 durchgearbeitet, so beginnen Sie wiederum bei Seite 17 auf der rechten unteren (orange) Seitenhälfte (LE 91) und setzen die Lektüre schrittweise beim Umblättern jeweils auf der folgenden rechten unteren (orange) Seitenhälfte bis zur Seite 221 (LE 174) fort.

Beim Drehen des Buches um 180 Grad werden die bisher linken Seiten mit den auf dem Kopf stehenden Texten zu rechten, gut lesbaren Buchseiten, und Sie können nun entsprechend die Seiten 222–18 mit den LE 175 – LE 260 (rechts oben) und den LE 261–LE 334 (rechts unten) studieren.

Im Text finden Sie häufig Hinweise auf grundlegende Arbeitsmittel, die dem Buch als Anleitungs- und Übungsblätter (Tasche im hinteren Buchdeckel) beigegeben sind. Es empfiehlt sich, diesen Anhang während des Lernens neben das Buch zu legen, um ihn schnell zur Verfügung zu haben.

Bemühen Sie sich bei der Arbeit, konsequent schrittweise vorzugehen, auch dann, wenn Ihnen der Inhalt einer Information selbstverständlich oder nicht niveaugerecht erscheint. Im Programm werden eventuelle Vorkenntnisse berücksichtigt, indem den Lernenden unterschiedlicher Bildungsstufen durch Hinweise das Überspringen bestimmter Informationsgruppen empfohlen wird.

Lernprogramm

Erster Teil

Mathematische Vorübungen aus der linearen Algebra

A 90

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	15			20
A_2		5	5		10
A_3			5	15	20
b_j	5	20	10	15	50

Zusammenfassung der „Nordwestecken"-Regel in allgemeiner Form **LE 91**

Man beginnt mit der Festlegung der Menge ....

Dabei können 3 Fälle auftreten:

1. $b_1 < a_1$

Es wird eingetragen ....

Man schreitet sodann (waagerecht/senkrecht) .... fort. Es wird die Menge .... durch Vergleich von .... und a_1 - .... festgelegt usw.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

m-Komponenten A 259

Sie haben die ausführliche Matrizenschreibweise benutzt. **LE 260**

Formen Sie bitte noch weiter um, d. h. schreiben Sie das Restriktionssystem ausführlich hin.

Die optimale (primale) Lösung lautet:

$$x_1 = 8$$
$$x_{S2} = 32$$
$$x_4 = 14 \qquad x_2 = x_3 = x_{S1} = x_{S3} = 0$$

$$\text{Min } z' = -\text{ Max } z' = -(-2 \cdot 8 - 0 \cdot 32 - 1 \cdot 14) = -(-30) = 30$$

Das Ergebnis zeigt, daß für die Futtermittelzusammensetzung nur die Produkte A und D, und zwar in den Mengen
A: 8 Einheiten
D: 14 Einheiten
gekauft werden müssen. Aus der optimalen Lösung geht weiter hervor, daß der Nährstoff M_2 in einem Überschuß von 32 Einheiten verfüttert wird. Die minimalen Kosten für die Futtermittelmischung betragen je Einheit Futtermittel 30 Geld

1. Vorbemerkung

Die nachfolgenden Vorübungen sollen soweit in die lineare Algebra einführen, wie es zum Verständnis und zur Anwendung der Linearen Programmierung (LP) notwendig ist.
Dabei läßt es sich nicht umgehen, einzelne Ergebnisse ohne mathematische Beweisführung wiederzugeben.

Entnehmen Sie bitte den Arbeitsmitteln das Anleitungsblatt Nr. 1.

Lesen Sie zunächst das Anleitungsblatt Nr. 1 ganz durch und entscheiden Sie sich dann für einen der folgenden drei Wege:

1. Weg: Der gesamte Stoff ist bekannt.
⇒ Gehen Sie bitte weiter zum 2., 3. oder 4. Teil des LP-Programms.

2. Weg: Es existieren Unklarheiten auf einigen Gebieten.
⇒ Arbeiten Sie bitte die betreffenden Stoffteile durch, d. h. diejenigen Lernelemente, welche in der Übersicht stehen.

3. Weg: Der gesamte Stoff ist unbekannt oder unklar.
⇒ Beginnen Sie bitte mit LE 2.

2. $b_1 > a_1$
Eingetragen wird ....
Man schreitet in diesem Falle (waagerecht/senkrecht) ....
weiter und bestimmt die Menge ....

3. $b_1 = a_1$
x_{11} ist in diesem Falle $x_{11} = b_1 = a_1$.
Man trägt die gemeinsame Menge ein.
Welche Transportmenge ist jetzt als nächste festzulegen? ....
Man schreitet also in diesem Falle

waagerecht weiter.	
senkrecht weiter.	
diagonal weiter.	

(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

Bei m Ausgangsorten und n Bestimmungsorten wird als letzte die Menge .... festgelegt.

Falls Sie keine Form hingeschrieben haben, gehen Sie bitte nach LE 259 **A 258**

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{H1} \\ x_{H2} \\ \vdots \\ x_{Hm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{array}{llll} x_{H1} & + a_{11}x_1 & + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ x_{H2} & + a_{21}x_1 & + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{Hm} & + a_{m1}x_1 & + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Haben Sie die 1. Form, gehen Sie bitte nach LE 260, bei der 2. Form nach LE 261.

Die m-dimensionale Identitätsmatrix ist gleich der m-dimensionalen Einheitsmatrix. **LE 259**

Weiterhin ist $\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{x}_H$ ein Matrizenprodukt (wie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$).

$\mathbf{x}_H$ ist also ein Spaltenvektor mit .... Komponenten.

Gehen Sie bitte wieder nach LE 258, und lösen Sie die dortige Aufgabe.

0	x_{S1}	-64/3	1	0	-1/3	-8/3	-1/3	-10/3	0	min$\{x_{Bi}\}$
0	x_{S2}	-8/3	0	1	-2/3	-13/3	7/3	1/3	0	
-1	x_4	50/3	0	0	-1/3	1/3	5/3	2/3	1	
z_j			0	0	1/3	-1/3	-5/3	-2/3	-1	
Δz_j			0	0	-1/3	-5/3	-4/3	-13/3	0	
φ_j			–	–	1	5/8	4	13/10	–	

↑

min$\{\varphi_j\} = 5/8$

-2	x_1	8	-3/8	0	1/8	1	1/8	5/4	0	
0	x_{S2}	32	-13/8	1	-1/8	0	23/8	23/4	0	
-1	x_4	14	1/8	0	-3/8	0	13/8	1/4	1	
z_j			5/8	0	1/8	-2	-15/8	-11/4	-1	
Δz_j			-5/8	0	-1/8	0	-9/8	-9/4	0	

Fortsetzung auf der nächsten Seite

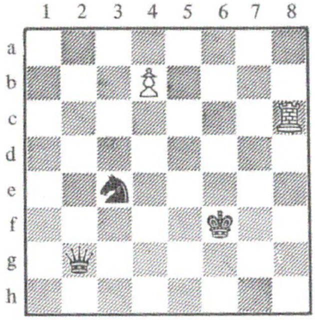
2. Matrizen

LE 2

2.1. Begriff einer Matrix

Betrachten Sie bitte die nachfolgende Zeichnung.

Sie sehen ein Schachbrett, dessen Felder durch Angabe von Buchstabe und Zahl gekennzeichnet sind. (Die Buchstabenreihe läuft hier von oben nach unten.)



Welche Position haben die abgebildeten Figuren?

Figur	Feld
(Bauer)	
(Turm)	
(Springer)	
(König)	
(Dame)	

(Menge) x_{11}

A 91

1. b_1 / waagerecht / x_{12} / $\mathbf{b_2}$ (und) $a_1 - b_1$
2. a_1 / senkrecht / x_{21}
3. die Menge x_{22}

diagonal weiter	$\times$

(Menge) x_{mn}

Die „Nordwestecken"-Regel ist auf dem Anleitungsblatt 2 zusammengefaßt.

LE 92

Entnehmen Sie dieses Blatt bitte Ihren Arbeitsmitteln.

Lösen Sie damit folgende Aufgabe:

$a_1 = 14$	$b_1 = 15$
$a_2 = 6$	$b_2 = 21$
$a_3 = 22$	$b_3 = 7$
$a_4 = 12$	$b_4 = 13$
$a_5 = 5$	$b_5 = 3$

Benutzen Sie dazu Übungsblatt 1, Tab. 1.3.

Einheitsvektoren
oder
Einheitsmatrix

A 257

Es ist Ihnen nun folgende Matrizengleichung gegeben:

LE 258

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{x}_H + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit

$\mathbf{I}_m$ als m-dimensionale Identitätsmatrix.

Schreiben Sie bitte die obige Gleichung in ausführlicher Form hin.

c) Lösung:

			0	0	0	-2	-3	-5	-1	
c_B	x_B	b	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	a_4	
0	x_{S1}	-38	1	0	0	-3	-2	-4	-1	
0	x_{S2}	-36	0	1	0	-5	-1	-1	-2	
0	x_{S3}	-50	0	0	1	-1	-5	-2	-3	$x_{Bl} = \min \{x_{Bi}\}$
	z_j		0	0	0	0	0	0	0	
	Δz_j		0	0	0	-2	-3	-5	-1	
	φ_j		–	–	–	2	3/5	5/2	1/3	

$\uparrow$

$\varphi_k = \min \{\varphi_j\} = 1/3$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

(Bauer)	b4
(Turm)	c8
(Springer)	e3
(König)	f6
(Dame)	g2

A 2

LE 3

Die Position einer Schachfigur wird durch Angabe der zugehörigen waagerechten Reihe (Zeile) und senkrechten Reihe (Spalte) gekennzeichnet.

Ein ähnliches Arbeitsschema verwendet man in der linearen Algebra; man bezeichnet es als Matrix.

→ Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Schema von Zahlen.
→ Die Zahlen nennt man Elemente der Matrix.
→ Als Symbol für eine Matrix werden hier große halbfette Groteskbuchstaben **A B C** ... verwendet.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Die nebenstehende Matrix hat
.... Zeilen (waagerechte Reihen) und
.... Spalten (senkrechte Reihen).

A 92

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	14					
A_2	1	5				
A_3		16	6			22
A_4			1	11		12
A_5				2	3	5
b_j	15	21	7	13	3	59

LE 93

Bitte entscheiden Sie:

a) Die „Nordwestecken"-Regel dient zur Bestimmung einer **zulässigen** Lösung aufgrund der Transportmengen.	
b) Die „Nordwestecken"-Regel dient zur Bestimmung einer **zulässigen** Lösung aufgrund der Transportkosten.	
c) Die „Nordwestecken"-Regel dient zur Bestimmung einer **zulässigen** Lösung aufgrund der Transportmengen und -kosten.	

Der zutreffende Satz ist anzukreuzen.

m Einheitsvektoren $\boxed{\text{X}}$ A 256

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\;\, \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Kurz geschrieben lautet also das nichtkanonische Gleichungssystem: LE 257

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

wobei die Matrix **A** keine .... enthält.

(sinngemäß:) A 334

a) Lösungsansatz:

$$\begin{aligned}
\min \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4\\
\text{s. d.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \geqslant 38\\
& 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 36\\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geqslant 50
\end{aligned}$$

und: $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{o}$

b)

$$\begin{aligned}
\max \quad z' &= -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4\\
\text{s. d.} \quad & -x_{S1} + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 38\\
& -x_{S2} + 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 36\\
& -x_{S3} + x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 50
\end{aligned}$$

und: $\mathbf{x}_S, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{o}$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

3 Zeilen A 3
4 Spalten

Bei einer Matrix werden sowohl die Zeilen als auch die Spalten mit Zahlen (1, 2, 3, . . .) gekennzeichnet. **LE 4**

Welche Elemente befinden sich a) in der 2. Zeile und b) in der 3. Spalte der Matrix **A** aus LE 3?

a) b)

a) Die „Nordwestecken"-Regel dient zur Bestimmung einer **zulässigen** Lösung aufgrund der Transportmengen.	☒

A 93

Im Gegensatz zur „Nordwestecken"-Regel berücksichtigen alle folgenden Verfahren neben den Transportmengen auch die unterschiedlichen Kosten pro Transporteinheit.* **LE 94**

Das bedeutet: Die Verfahren, die ab LE 95 beschrieben werden, benutzen neben der Matrix der Transportmengen zusätzlich die Matrix der Kosten pro Transporteinheit.

Von LE 94 aus sind zwei verschiedene Wege möglich. Sie können nach eigener Wahl

a) zunächst auch die anderen Möglichkeiten zur Bestimmung einer zulässigen Lösung kennenlernen und dann zu den verschiedenen Methoden der optimalen Lösung übergehen;
oder
b) bereits jetzt die Methoden der optimalen Lösung studieren und dabei je nach Bedarf auf die übrigen Methoden zur Bestimmung einer zulässigen Lösung zurückgreifen.

Wenn Sie sich für Weg a) entschieden haben: bitte bei LE 95 weiterarbeiten.

Wenn Sie sich für Weg b) entschieden haben, gehen Sie bitte gleich vor nach LE 123, Lektion 4.2.

* Dies sagt jedoch nichts über die Güte der Ausgangslösung aus.

Im kanonischen Gleichungssystem enthält die Matrix **A**: **LE 256**

$\binom{n}{m}$ Basisvektoren ☐

m Einheitsvektoren ☐ (Bitte kreuzen Sie an.)

∞ Lösungsvektoren ☐

Eine Ausgangs-Basislösung für den Iterationsprozeß ist dabei also vorhanden (LE 255).
Diese Einschränkung soll nun aufgehoben werden. Das Gleichungssystem hat dann demnach eine nichtkanonische Form (oder auch allgemeine Form).

Schreiben Sie diese Form hier auf.

Zum Abschluß sei eine Aufgabe aus der Praxis gestellt. **LE 334**

Bestimmen Sie bitte mit Hilfe der Übungsblätter Nr. 9.1 und 9.2 die optimale Lösung unter Anwendung des Dualen-Simplex-Algorithmus'.

Hinweis: Übungsblätter Nr. 8.1/8.2
LE 324
LE 326

a) $-6,\ -5,\ 0,\ 2$ A 4

b)
$$\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} ,$$

oder $-1,\ 0,\ 6$

Nehmen Sie bitte das Anleitungsblatt Nr. 2 zur Hand. **LE 5**

Sie finden dort die Beschreibung einer Matrix.

1. Lesen Sie bitte den Text aufmerksam durch.
2. Bei eventuellen Unklarheiten gehen Sie nach LE 6.
3. Ist für Sie der Inhalt des Anleitungsblatts sofort verständlich, arbeiten Sie beim LE 7 weiter.

4.1.2 Die Methode mit Hilfe des Spaltenminimums **LE 95**

Entnehmen Sie bitte den Arbeitsmitteln
1. ein Übungsblatt 1, Tab. 1.4,
2. das Anleitungsblatt 3 (Lösung des Transportproblems mit Hilfe des Spaltenminimums).

Die Methode wird an dem bereits von der „Nordwestecken"-Regel her bekannten Beispiel erläutert. (vgl. LE 79.)

Die unterschiedlichen Transportkosten (pro Wareneinheit) zwischen den verschiedenen Ausgangs- und Bestimmungsorten sind bereits in die auf der nächsten Seite stehende **Transportkostenmatrix** (c_{ij}-Matrix) eingetragen.
In der Praxis müßten diese Werte natürlich von Fall zu Fall ermittelt werden.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	8	4	7
A_2	9	0	5	7
A_3	3	6	8	1

Wir arbeiten im folgenden mit der Kurzfassung des Lösungsganges auf Anleitungsblatt 3.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

1. kanonisches Gleichungssystem A 255

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & + a_{1,m+1}x_{m+1} & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
& x_2 & + a_{2,m+1}x_{m+1} & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

2.

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

3. Nullsetzen der Nicht-Basisvariablen, d. h.

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_B &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \\
&= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T
\end{aligned}
$$

Die optimale zulässige duale Basislösung lautet: **A 332**

$$
\begin{aligned}
w_2 &= 1/2 \\
w_{S1} &= 1/2 \qquad (w_{S2} = w_1 = 0)
\end{aligned}
$$

Wie vorher schon erwähnt wurde, verringert sich der Arbeitsaufwand bei Anwendung des Dualen-Simplex-Algorithmus' beträchtlich. **LE 333**

Nehmen Sie bitte die Anleitungsblätter Nr. 7.1 und 7.2 zur Hand.

Dort ist das Problem der Übungsblätter Nr. 8.1/8.2 mit Hilfe des gewöhnlichen Simplex-Algorithmus' durchgerechnet worden.

Durch die Einführung der beiden Hilfsvariablen hat sich hier die Anzahl der Tableaus verdoppelt.

Vergleichen Sie bitte die obigen Anleitungs- und Übungsblätter miteinander.

Folgende Aufgabenstellungen sollen Ihnen helfen, den Inhalt vom Anleitungsblatt Nr. 2 besser zu verstehen:

1. Die Matrixzeile verläuft ....,

   die Matrixspalte ....

2. Was bezeichnet der erste Index? Was bezeichnet der zweite Index?

   ....

   ....

3. Wie lautet die formale allgemeine Darstellung der Matrix **A** mit $m = 3$ und $n = 4$?

   $$= \left(\qquad\qquad \right)$$

4. Welche Elemente befinden sich a) in der zweiten Zeile
   und
   b) in der dritten Spalte
   von der Matrix **A** (gem. Ziffer 3.)?

   a) b)

5. Das Element in der dritten Zeile und vierten Spalte der Matrix **A** (gem. Ziffer 3.) heißt: ....

Zu 1.
Als erstes sind die Werte aus der Transportkostenmatrix in das Tableau 1.4 zu übertragen. Das geschieht in der Weise, daß diese Werte jeweils oben rechts in die entsprechenden Felder des Tableaus eingesetzt werden.

Das Beispiel führt das für das Feld $A_1 B_1$ vor.

A_i \ B_j	B_1
A_1	$\boxed{1}$

Nehmen Sie nun alle weiteren Eintragungen vor.

3.4 Gleichheitsrestriktionen in nichtkanonischer Form (Hilfsvariablen)

LE 255

Die Simplex-Methode bzw. den Simplex-Algorithmus haben Sie in der 2. Lektion kennengelernt.

1. Welche Form hatte dabei das Restriktionssystem?
2. Wie sah die Matrix **a** aus?
3. Wie wurde eine zulässige Ausgangslösung erstellt?

1.

2.

3.

Wie lautet die optimale zulässige duale Basislösung?

LE 332

Hinweis: Anleitungsblätter Nr. 3.1/3.2

1. Die Matrixzeile verläuft **waagerecht**, die Matrixspalte **senkrecht**. A 6

2. Erster Index: Angabe der Zeile
   Zweiter Index: Angabe der Spalte

3. $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

4. a) $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ b) a_{13}, a_{23}, a_{33}

5. a_{34}

2.2 Matrixformen LE 7

Am Anfang war gesagt worden, daß in der linearen Algebra vorwiegend ....
.... als Arbeitsschema benützt würde(n).

Im folgenden werden einige spezielle Matrixformen vorgeführt.

A 95

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	8	4	7	20
A_2	9	0	5	7	25
A_3	3	6	8	1	40
b_j	10	25	15	35	85

Zu 2.: LE 96

Lesen Sie bitte zuerst den Arbeitsschritt 2 auf dem Anleitungsblatt 3.

Zur Wiederholung:
Im Gegensatz zu einer Zeile verläuft eine Spalte (waagerecht/senkrecht)

....

In unserem Beispiel ist r die Zeile ....

In dem vorliegenden Fall (LE 252, 253) können gleiche Basislösungen wiederholt auftreten. Es treten damit ggf. Schleifen ohne Ausgang (cycling) auf; dies wirkt sich z. B. störend in Computer-Programmen aus, wo dann kostspielige Rechenzeit verbraucht wird, ohne daß ein entsprechendes Ergebnis erreicht wird. **LE 254**

Obwohl nun degenerierte Basislösungen des öfteren auftreten und damit in einigen Iterationsstufen $z_{neu} = z_{alt}$ wird, führt dies erfahrungsgemäß in praktischen Problemen doch i. a. nicht zum cycling.

Dennoch wurden u. a. folgende Verfahren entwickelt, auch für diesen Fall die Simplex-Methode endlich zu machen:

1. ϵ-Methode von Charnes,
2. Lexikografische Methode von B. Dantzig.

(Lit.: Zu 1: H. P. Künzi, H. G. Tzschach, C. A. Zehnder
„Mathematische Optimierung"
Teubner-Verlag, Stuttgart, 1966, S. 32 f.
Zu 2: G. B. Dantzig
„Lineare Programmierung und Erweiterungen"
Springer-Verlag, 1968, S. 256 f., 266 f.)

Zu A 331

d) Lösung mit Dualem-Simplex-Algorithmus

↓ nicht alle $b_j \geqslant 0$, d. h. unzulässige Basislösung

c			0	0	- 2	- 1
c_B	x_B	b	s_1	s_2	a_1	a_2
0	x_{s1}	- 4	1	0	- 1	- 2
0	x_{s2}	- 6	0	1	- 3	- 2
z_j			0	0	0	0
Δz_j			0	0	- 2	- 1
$\varphi_j = \Delta z_j / a_{lj}$			-	-	2/3	1/2

$x_{Bl} = \min \{x_{Bi}\} = \rightarrow$ (Zeile x_{s2})

$x_{B2} = x_{s2} = -6$

Pivotelement = - 2

← $\Delta z_j \leqslant 0$, d. h. optimale Basislösung

↑ $\varphi_k = \min \{\varphi_j\} = 1/2$

alle $b_j \geqslant 0$, d. h. Zulässigkeit wurde erreicht.
↓

0	x_{B1}	2	1	- 1	2	0
- 1	x_2	3	0	- 1/2	3/2	1
z_j		0	0	1/2	- 3/2	- 1
Δz_j			0	-1/2	-1/2	0

← $\Delta z_j \leqslant 0$, d. h. Optimalität bleibt erhalten.

die Matrix (Matrizen) **A 7**

Entnehmen Sie bitte den Arbeitsmitteln das Anleitungsblatt Nr. 3. Auf diesem Blatt finden Sie die Definitionen der hier interessierenden Matrixformen. **LE 8**

Wir erarbeiten auf der Grundlage der nachfolgenden Angaben Beispiele zu den speziellen Matrixformen.

1. Form: Die (Block-)Matrix **A** kann beispielsweise in zwei Untermatrizen **S** und **T** aufgeteilt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (\quad \mathbf{S} \qquad \mathbf{T} \quad)$$

2. Form: Quadratische Matrix mit $m = n = 3$ (formale allgemeine Darstellung)

$\mathbf{A} =$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

(Spalte) senkrecht **A 96**

(Zeile r) 1

Zu 3.: (Anleitungsblatt 3) **LE 97**

Wie lautet der 3. Abschnitt? ....

....

Der Vergleich von a_r und b_1 ergibt in unserem Beispiel das Minimum für

....

Tragen Sie bitte den entsprechenden Wert ein.

A 253

7	mindestens 1 Basisvariable mit dem Wert 0
degenerierte zulässige Basislösung	
wenigstens ein Element $b_i = 0$	

14	mindestens 1 Basisvariable mit dem Wert 0
degenerierte optimale zulässige Basislösung	
wenigstens ein Element $b_i = 0$	

$z_{m+1} = z_m$ bzw. $z_{neu} = z_{alt}$

A 331

c) Feststellung:
Die unzulässige Ausgangs-Basislösung lautet:

$$x_{S1} = b_1 = -4 < 0$$
$$x_{S2} = b_2 = -6 < 0$$

Sie erfüllt das Optimalitätskriterium: alle $\Delta z_j \leq 0$, wie das Ausgangstableau in d) zeigt.

d) Lösung mit Dualem-Simplex-Algorithmus
Siehe dazu nächstes Blatt

e) Lösungswerte:
Die optimale zulässige (primale) Basislösung lautet:

$$x_{S1} = 2$$
$$x_2 = 3 \quad (x_{S2} = x_1 = 0)$$
$$\text{Min } z = -\text{Max } z' = -(-2 \cdot 0 - 1 \cdot 3) = 3$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

3. Form: Einheitsmatrix

$I_4 =$
$\uparrow$

Dieser Index bedeutet: m = n = 4.

4. Form: Nullmatrix

Die Wahl von m und n bleibt Ihnen überlassen.

$\emptyset =$

(3. Abschnitt:) Setzen Sie $x_{r1} = \min\ (a_r, b_1)$ **A 97**

b_1 (= 10)

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 [1]	[8]	[4]	[7]	20
A_2	[9]	[0]	[5]	[7]	25
A_3	[3]	[6]	[8]	[1]	40
b_j	10	25	15	35	85

Zu 4.: (Anleitungsblatt 3) **LE 98**

Welcher der unter dem 4. Arbeitsschritt (Anleitungsblatt 3) angegebenen Fälle trifft für unser Beispiel zu?

Fall ....

Verfahren Sie bitte, wie dort für diesen Fall angegeben.

1) $\boxed{7}$ und $\boxed{14}$ **A 252**

2) $\Theta_l = \min\{\Theta_i\}$

Schreiben Sie bitte in das Übungsblatt 10 unter 7 und 14 die Bedingung ein, wann eine Degeneration auftritt. **LE 253**

Warum ist nun eine Degeneration nicht erwünscht? – In den beiden Fällen a) und b) (LE 252) kann sich in der folgenden Iterationsstufe der Minimalwert $\Theta_l = 0$ ergeben. Dies bedeutet: (siehe Anleitungsblatt 3.3 (9a))

$$z_{m+1} = z_m + \Theta \cdot (c_k - z_k)$$
$$= z_m + \Theta \cdot \Delta z_k \, .$$

Mit $\Theta_l = 0$ ergibt sich ....

Das heißt: der Wert der Zielfunktion erhöht sich nicht. Trotz endlicher Zahl von Basislösungen ist ein endlicher Iterationsprozeß nicht gesichert.

negativen **A 330**

b) max $z' = 0 \cdot x_{S1} + 0 \cdot x_{S2} - 2x_1 - x_2$

s. d. $-x_{S1} + x_1 + 2x_2 = 4$

$-x_{S2} + 3x_1 + 2x_2 = 6$

und: $x_{S1}, x_{S2}, x_1, x_2 \geqslant 0$

Bearbeiten Sie jetzt in den Übungsblättern Nr. 8.1/8.2 die Punkte c), d) und e). LE 331

2. Form: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 3. Form: $\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A 8

4. Form: $\boldsymbol{\emptyset} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m = 3,\; n = 4$

Zur Wiederholung nehmen Sie bitte das Übungsblatt Nr. 1 zur Hand. Lösen Sie die dort gestellten Aufgaben. **LE 9**

Fall a) **A 98**

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10 $\boxed{1}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	~~20~~ 10
A_2	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	25
A_3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$	40
b_j	10	25	15	35	85

Als nächstes ist die Spalte 2 zu bearbeiten. **LE 99**

Für die Spalte 2 gilt der Sonderfall.

Verfahren Sie bitte, wie für diesen Sonderfall angegeben.