

Group Theory, Algebra, and Number Theory



Hans Zassenhaus, November 1984

Group Theory, Algebra, and Number Theory

Colloquium in Memory of Hans Zassenhaus
held in Saarbrücken, Germany, June 4–5, 1993

Editor

Horst G. Zimmer



Walter de Gruyter · Berlin · New York 1996

Editor

Horst G. Zimmer
Fachbereich 9 Mathematik
Universität des Saarlandes
66041 Saarbrücken
Germany

1991 Mathematics Subject Classification: 01–06, 11Hxx, 11Rxx, 11Yxx, 16Sxx, 17Bxx,
20–XX

Keywords: Near fields, linear groups, transitive permutation groups, modular Lie algebras, complex simple Lie algebras, crystallographic groups, space groups, Galois groups, commutative group rings

⊗ Printed on acid-free paper which falls within the guidelines of the ANSI to ensure permanence and durability.

Library of Congress Cataloging-in-Publication-Data

Group theory, algebra, and number theory : colloquium in memory of Hans Zassenhaus, held in Saarbrücken, Germany, June 4-5, 1993 / editor, Horst G. Zimmer.

p. cm.

English and German.

Includes bibliographical references.

ISBN 3-11-015347-5 (acid-free paper)

1. Group theory – Congresses. 2. Algebra – Congresses.

3. Number theory – Congresses. I. Zassenhaus, Hans.

II. Zimmer, Horst G.

QA 174.G 735 1996

512–dc21

96–46367

CIP

Die Deutsche Bibliothek – CIP Einheitsaufnahme

Group theory, algebra, and number theory / Colloquium in Memory of Hans Zassenhaus, held in Saarbrücken, Germany, June 4-5, 1993. Ed.

Horst G. Zimmer. – Berlin ; New York : de Gruyter, 1996

ISBN 3-11-015347-5

NE: Zimmer, Horst G. [Hrsg.]; Colloquium in Memory of Hans Zassenhaus <1993, Saarbrücken>

© Copyright 1996 by Walter de Gruyter & Co., D-10785 Berlin.

All rights reserved, including those of translation into foreign languages. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording or any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Printed in Germany. Typeset using the authors' T_EX files: I. Zimmermann, Freiburg.

Printing: Arthur Collignon GmbH, Berlin. – Binding: Lüderitz & Bauer, Berlin.

Cover design: Thomas Bonnie, Hamburg.

Preface

On June 4 and 5, 1993, a mathematical colloquium in memory of the late Hans Zassenhaus took place at the University of Saarbrücken. As originally scheduled, the scientific program was to consist of the following lectures:

Peter Roquette, Über das Lokal-Global-Prinzip.

Klaus Hoechsmann, Zur Arithmetik in endlichen abelschen Gruppenringen.

Wilhelm Plesken, Kristallographische Gruppen.

Alexei I. Kostrikin, The beginnings of modular Lie algebras theory.

Michael E. Pohst, Die Berechnung von Invarianten algebraischer Zahlkörper.

When it turned out that A. I. Kostrikin could not travel to Germany at that time, Bernd Fischer saved the day by agreeing, on short notice, to contribute a lecture on Zassenhaus's seminal work in finite group theory:

Bernd Fischer, Beiträge zur endlichen Gruppentheorie.

Fortunately, however, Professor Kostrikin's talk was only delayed and did take place in Saarbrücken on January 17, 1994. With this counted in, the colloquium now included both finite groups and modular Lie algebras.

As far as these Proceedings are concerned, things were not to remain so simple. Ill health prevented Professor Kostrikin from writing up all but a Russian summary of his lecture, which was subsequently worked out in detail and rendered into English by his former student Pham Huu Tiep. Thanks to Dr. Tiep, this volume contains not only an account of Kostrikin's lecture, but also a paper on complex simple Lie algebras, related to the work of Zassenhaus.

Professors Roquette and Fischer, on the other hand, could not be persuaded to produce transcripts of their very fine lectures: the former saying that his topic was too far removed from the work of Zassenhaus, the latter suggesting that an article by Helmut Bender of Kiel University would be more apt to do full justice to Zassenhaus's impact on group theory. I thank Professor Bender for accepting this onerous assignment and contributing the desired report on finite groups.

So much for the history behind the Proceedings of the Colloquium in Memory of Hans Zassenhaus. As will be noted, they are written partly in English, partly in German, and they include Horst Tietz's talk on his friendship with Zassenhaus, as well as the slightly revised introductory remarks by the host and organizer.

I wish to express my heartfelt thanks to the speakers at the colloquium and the contributors to this volume. Thanks are due also to Franz-Josef Heisel from the administration of this University for finding financial means to support the colloquium and to Christine Wilk for her engagement in helping me organize it.

Horst G. Zimmer

Table of Contents

HORST G. ZIMMER

Introductory address xi

HORST TIETZ

After-dinner speech xvii

PHAM HUU TIEP

On the solvability of the kernel of any orthogonal decomposition

1. Introduction	1
2. Lie algebras of types B_n , C_n , and D_n	3
3. Exceptional Lie algebras	4
4. Lie algebras of type A_n	7
References	12

ALEXEI I. KOSTRIKIN

The beginnings of modular Lie algebra theory

1. Introduction	13
2. Zassenhaus algebra	15
3. Lie algebras of Cartan type	19
4. Derivations	22
5. Sandwiches, filtrations, ‘classicality’ criterion	26
6. Linear representations and Cartan prolongations	33
7. Lie algebras over fields of small characteristic	37
7.1. Characteristic $p = 5$	37
7.2. Characteristic $p = 3$	38
7.3. Characteristic $p = 2$	42
8. Miscellaneous	44
References	45

MICHAEL E. POHST

Computing invariants of algebraic number fields

1. Introduction	53
2. Galois groups	54
2.1. (B) Approximation of Γ from below	55
2.2. (A) Approximation of Γ from above and verification	56
3. Integral basis	57
3.1. Round 2-method	58
3.2. Round 4-method	60
4. Unit group and class group	61
4.1. Method I (assuming GRH)	64
4.2. Method II (unconditional)	65
5. Examples and applications	69
References	71

WILHELM PLESKEN

Kristallographische Gruppen

1. Einleitung	75
2. Die Periode bis 1950 aus heutiger Sicht	75
3. Die vierdimensionalen Raumgruppen	81
4. Spätere Entwicklungen	84
5. Beispiele von Bravaismannigfaltigkeiten	86
Literatur	94

HELMUT BENDER

Endliche Fastkörper und Zassenhausgruppen

1. Einleitung	97
2. Zur Kommutativität endlicher Divisionsringe	99
3. Gruppen mit Partition	102
4. Mehr über fixpunktfreie Operation	107
5. Gruppen mit pq -Bedingung	110
6. Ausnahmecharaktere und der $SL_2(5)$ -Satz von Zassenhaus	118

7. Das Isomorphieproblem	123
8. Die 2-dimensionalen linearen Gruppen und der $SL_2(5)$ -Satz von Dickson . . .	126
9. Vollständige Fastkörper	131
10. Zassenhausgruppen	136
Literatur	141

KLAUS HOECHSMANN

On the arithmetic of commutative group rings

1. Introduction	146
2. Constructible units	149
3. Cyclic p -groups	152
4. Functors on cyclotomic algebras	157
4.1. Admissible functors	158
4.2. Cyclogenic functors	160
5. Local units and logarithms	163
5.1. Polarized bases	163
5.2. Logarithms and applications	166
6. Regular primes	170
6.1. Arithmetical background	170
6.2. Abelian p -groups	172
7. Irregular primes	176
7.1. A converse	176
7.2. Non-constructible units	179
8. Local units and global ideal classes	182
8.1. Normal bases for local units	179
8.2. Comparison with global units	186
8.3. Kernel groups	189
9. Cyclic groups of composite order	191
9.1. An exact sequence	191
9.2. Even order	193
9.3. Odd order	195
References	199

Contributors

HELMUT BENDER

Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,
Ludewig-Meyn-Str. 4, 24118 Kiel, Germany

KLAUS HOECHSMANN

Department of Mathematics, University of British Columbia,
Vancouver, V6T 1Y4, Canada

ALEXEI I. KOSTRIKIN

Department of Mathematics, MEHMAT, Moscow State University,
Vorob'evu Goru, 119899 Moscow, Russia

WILHELM PLESKEN

Lehrstuhl B für Mathematik, Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen,
Templergraben 64, 52062 Aachen, Germany

MICHAEL E. POHST

Fachbereich 3 Mathematik, Technische Universität Berlin,
Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin, Germany

PHAM HUU TIEP

Department of Mathematics, The Ohio State University,
Columbus, OH 43210-1174, U.S.A.

HORST TIETZ

Röddinger Str. 31, 30823 Garbsen, Germany

HORST G. ZIMMER

Fachbereich 9 Mathematik, Universität des Saarlandes,
Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken, Germany

Introductory address

Verehrte Gäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Studierende!

Im Namen des Fachbereichs Mathematik der Universität des Saarlandes begrüße ich Sie herzlich zum

Gedenkkolloquium

für den Ehrendoktor der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät unserer Universität,

Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Hans Zassenhaus,

der nach einem erfüllten, von vielseitigen Interessen, Ideenreichtum und großer Schaffenskraft geprägten, auch etwas rastlosen Leben

am 21. November 1991 in Columbus, Ohio,

seiner Wahlheimatstadt, für uns alle überraschend gestorben ist.

Leider sah sich Frau Zassenhaus, wie sie mir schrieb, nicht in der Lage, an diesem Kolloquium teilzunehmen. In ihrem Brief vom 14. Mai des Jahres heißt es u. a.:

„Meine Gedanken werden in diesen Tagen nach Saarbrücken wandern, wo mein Mann und ich immer gern zu Gast gewesen sind und wo die Hilfsbereitschaft und Gastfreundlichkeit der Universität und Mathematischen Fakultät mir immer in guter Erinnerung bleiben werden

Meine Grüße und Dank gehen an alle Teilnehmer und besonders an die vortragenden Herren.“

Bedauerlicherweise mußte auch Professor Alexei Kostrikin aus Moskau seinen Vortrag absagen. Für ihn ist jedoch kurzfristig und spontan

Professor Bernd Fischer aus Bielefeld

eingesprungen. Er wird einen Vortrag mit dem Thema

„Beiträge zur endlichen Gruppentheorie“

zu der ursprünglich für Herrn Kostrikin vorgesehenen Zeit halten. Dafür bin ich Herrn Fischer sehr dankbar!

Mit diesem Gedenkkolloquium bringen wir die besondere Verbundenheit des Fachbereichs Mathematik mit Herrn Zassenhaus, der

am 28. Mai dieses Jahres 81 Jahre alt

geworden wäre, zum Ausdruck.

Es ist – glaube ich – gelungen, ein interessantes wissenschaftliches Programm aus Vorträgen von ehemaligen Schülern, Mitarbeitern und Kollegen, die Herrn Zassenhaus persönlich oder vom Arbeitsgebiet her nahestanden, zusammenzustellen, das weitgehend die Breite seines mathematischen Werks widerspiegelt.

Herr Zassenhaus hat in Saarbrücken wie überhaupt in ganz Deutschland insbesondere die

„Konstruktive oder Experimentelle oder Algorithmische Zahlentheorie“

unterstützt und gefördert und so dazu beigetragen, daß diese neue Richtung der Zahlentheorie auch hier (wenn auch langsam) Fuß faßt.

An der Universität des Saarlandes ist die Konstruktive Zahlentheorie sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik vertreten. Überregional zeigt sich die wachsende Bedeutung dieses neuen Zweigs der Zahlentheorie z. B.

- an der Einrichtung internationaler Tagungen über „Computational Number Theory“ (wie dieses Gebiet im internationalen Sprachgebrauch heißt) in Oberwolfach und auf Schloß Dagstuhl sowie
- in der Gründung des DFG-Schwerpunktprogramms mit dem Titel „Algorithmische Zahlentheorie und Algebra“.

Dennoch ist die Algorithmische Zahlentheorie meiner persönlichen Einschätzung nach in Deutschland noch nicht voll etabliert: So gehören z.B. den Entscheidungsgremien und Forschungskommissionen in der Mathematik auf Bundesebene keine Vertreter dieses relativ neuen Gebiets an, und es besteht ein Defizit in der Akzeptanz dieser Richtung der Zahlentheorie, z. B. bei den mathematischen Zeitschriften.

Hier gilt es – ganz im Sinne von Herrn Zassenhaus – durch Forschung auf hohem Niveau und angemessene Darstellung nach außen unter Distanzierung von „Dünnbrettbohrern“ dafür zu sorgen, daß die Algorithmische Zahlentheorie als gleichberechtigtes und gleichrangiges Gebiet neben der heute modernen abstrakten algebraischen Zahlentheorie und arithmetischen Geometrie Anerkennung findet.

Die Zusammenarbeit mit Herrn Zassenhaus entstand bei seinen zahlreichen Besuchen zu Kolloquiumsvorträgen und Forschungsaufenthalten in Saarbrücken. Besonders hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang

- vier dreimonatige Aufenthalte in den Jahren 1979 und 1980 als Humboldt-Preisträger (US-Senior Scientist Awardee der Humboldt-Stiftung) und

- die Verleihung der Ehrendoktorwürde

am 22. November 1985

durch unsere (damals noch vollständige, also die Mathematik *und* Informatik einschließende) Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät „in Anerkennung seiner bahnbrechenden wissenschaftlichen Leistungen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik“, wie es in der Ehrenurkunde heißt.

Ich selbst war bereits in den Jahren 1967–1970 als damaliger Assistenzprofessor an der Ohio State University in Columbus bzw. an der University of California at Los Angeles durch Professor Zassenhaus auf die Spur der „Computational Number Theory“ gesetzt worden und arbeite noch heute auf diesem Gebiet.

In meiner Saarbrücker Arbeitsgruppe hatte Herr Zassenhaus insbesondere

- den ORDMAX-Algorithmus für Zahl- und Funktionenkörper und
- die Einheiten- und Klassengruppenberechnung für Kongruenzfunktionenkörper

angeregt.

Die Hinwendung zur Konstruktiven Zahlentheorie erfolgte bei Herrn Zassenhaus unter dem Einfluß von Brouwers Kritik an der klassischen Mathematik vom intuitionistischen Standpunkt. Statt nur abstrakt theoretische Resultate zu beweisen, setzt man sich bekanntlich zum Ziel, die betrachteten Größen auch in endlich vielen Schritten nach einem Verfahren, eben einem *Algorithmus*, effizient zu berechnen. Jedenfalls zitierte Zassenhaus in einem Vortrag vor der Rheinisch-Westfälischen Akademie im Jahre 1980 Erret Bishop:

„Constructive existence is much more restrictive than the ideal existence of classical mathematics. The only way to show that an object exists is to give a finite routine for finding it, whereas in classical mathematics other methods can be used“,

z. B. Widerspruchsbeweise.

Das bedeutet sicher nicht, daß Zassenhaus Intuitionist gewesen ist, hat aber seine mathematische Einstellung entscheidend geprägt.

Zur Rechtfertigung seiner Beschäftigung mit der Experimentellen Zahlentheorie nennt Zassenhaus an anderer Stelle des Vortrags

„das Verlangen, wieder mit Zahlen und Figuren unter Einsetzung moderner Hilfsmittel (Computer) zu experimentieren, wie es mit anderen Hilfsmitteln noch üblich war zu Zeiten von Gauß und Kummer.“

In einem Aufsatz von David Epstein und Silvio Levy über „Experimentation and Proof in Mathematics“ in den Notices der American Mathematical Society, Bd. 42, Heft 6, vom Juni 1995 heißt es auf S. 672:

„There is a feedback loop: computers in mathematics enhance the importance of the constructivist point of view, and the constructivist point of view increases the use of computers.“

Experimentelle Zahlentheorie im Sinne von Zassenhaus ist gekennzeichnet durch das Ineinandergreifen von Theorie und praktischen Verfahren, die sich gegenseitig beeinflussen und in ständiger Wechselwirkung miteinander stehen.

Eine Arbeit von Dade und Zassenhaus aus dem Jahre 1963 trägt den bezeichnenden Titel

„How programming difficulties can lead to theoretical advances“.

Softwareentwicklung als Teil der Experimentellen Zahlentheorie erschöpft sich also nicht in mechanischer und langweiliger Programmierarbeit, sondern basiert auf der sicheren Beherrschung fortgeschrittener Theorie und kann diese ihrerseits vorantreiben. Auf diesem Gebiete ausgebildete Studenten haben besonders viel Spaß an der wissenschaftlichen Arbeit und gewinnen einen tieferen Einblick in die Mathematik, und sie sind besser motiviert und höher qualifiziert als andere.

Bei Epstein und Levy (loc. cit.) heißt es dazu

„Another consequence of computer experimentation we have observed is psychological—the theory achieves concreteness and immediacy.“

Und mit Hilfe des Computers erzielte Resultate sind genausowenig anzuzweifeln wie mit traditionellen Methoden bewiesene. Wir zitieren noch einmal Epstein und Levy:

„The dangers of taking the results of a computer program on trust are not that different from taking a traditional result on trust.“

Andererseits soll die Beschäftigung mit Computern natürlich nicht dem Selbstzweck dienen, sondern immer im Dienste der Theorie stehen.

Ich bin hier zugegebenermaßen etwas einseitig auf die Experimentelle Zahlentheorie eingegangen. Die Arbeitsgebiete von Herrn Zassenhaus hingegen zeichnen sich durch große Vielfalt und eine enorme Breite aus:

In meiner Laudatio anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde hatte ich folgende grobe Übersicht über sein mathematisches Werk gegeben:

1. Gruppentheorie
2. Endliche Fastkörper

3. Geometrie
4. Idealtheorie in Ordnungen
5. Algebren- und Darstellungstheorie, insbesondere Lie-Algebren
6. Geometrie der Zahlen, Packungsprobleme
7. Algebraische, insbesondere konstruktive Zahlentheorie
8. Mathematische Physik
9. Didaktik der Mathematik
10. Geschichte der Mathematik

Dieser weite Themenkreis kann auf dem Kolloquium natürlich nicht vollständig anklingen. Ich bin aber sicher, daß sich die bevorstehenden Vorträge zu einer würdigen Gedenkfeier und zu einem hochkarätigen mathematischen Kolloquium zusammenfügen.

Ich danke den Vortragenden für ihre bereitwillige Mitwirkung und Frau Christine Wilk dafür, daß sie die Hauptlast bei der Organisation dieser Veranstaltung getragen hat.

Dem Kolloquium wünsche ich gutes Gelingen!

Horst G. Zimmer

After-dinner speech

Horst Tietz

Entschuldigen Sie bitte, daß ich für einige Minuten Ihre Gespräche störe, meine Damen und Herren: als derjenige unter den Anwesenden, der Hans Zassenhaus am längsten gekannt hat, möchte ich Ihnen einiges über den Menschen Zassenhaus erzählen, das Ihnen vielleicht neu ist.

Als 19-jähriger Student lernte ich in Hamburg Herrn Zassenhaus in seiner Vorlesung *Analytische Geometrie* kennen. Er war immer in geistiger Hochspannung: Den Weg vom Dammtor-Bahnhof zum Mathematischen Seminar an der Rothenbaumchaussee (neben dem Curio-Haus) legte er meistens zwischen der Baumreihe und dem Kantstein zurück, mit schlenkernder Aktentasche und auf dem Zipfel eines Taschentuches kauend; hier lief er nicht Gefahr, mit anderen Passanten zu kollidieren und aus seinen Gedanken gerissen zu werden. In seiner Vorlesung sprühte er vor Temperament, als versuche er, seine Hochspannung auf die Hörer zu übertragen. Ein beachtliches Tempo war das Ergebnis: die beiden Bände von Schreier-Sperner hatte er in 1 1/2 Trimestern (die gab es im 1. Kriegsjahr) geschafft und schlug mit der Begründung „das kann ich selbst noch nicht“ vor, in der verbleibenden Zeit *Darstellende Geometrie* zu treiben; wir besorgten uns das Buch von Ulrich Graf, holten verstaubte Zeichenbretter aus dem Seminarkeller und legten mit Schwung und Vergnügen los. Die letzte Aufgabe bestand darin, einen Würfel in allgemeiner Lage in Zentralprojektion zu zeichnen; als Herr Zassenhaus auf seinem Inspektionsgang durch die Reihen der zeichnenden Studenten bei mir stehen blieb, fragte ich: „Herr Doktor, ist das allgemein genug?“ und erhielt von ihm die tröstliche Antwort: „Ist ja großartig – ist ja kaum noch zu erkennen!“

Mit der Anschauung schien er permanent in einem fröhlichen Clinch zu liegen: einmal versuchte er uns anschaulich klar zu machen, daß die gelochte 2-Sphäre einer Kreisscheibe homöomorph sei; als ich seine komplizierten Argumente mit dem Hinweis unterbrach, man brauche das Loch doch bloß auseinander zu ziehen und in die Ebene auszubreiten, stockte er eine Weile und entgegnete schließlich: „Dann muß das Loch aber groß genug sein!“ Mir scheint, daß von diesem Ringen mit der Anschauung ein ständiger Impuls für sein Denken ausging: das gewaltige Spektrum der von ihm bearbeiteten Probleme kann man vielleicht aus dem Ringen heraus verstehen: sowohl direkt als auch indirekt als Schärfung der Methoden, die er hierfür geschaffen hatte.

Eine Peinlichkeit sollte ich erwähnen: unter seinen Hörern war auch Klaus Junge, Deutschlands große Schachhoffnung; es traf Herrn Zassenhaus schwer, als seine Bitte um eine Schachpartie abgelehnt wurde: „Dafür ist mir meine Zeit zu schade!“ Zassenhaus, der immer für seine Mitmenschen da war und der gar keine Ader für Starallüren hatte, suchte als Grund für diesen Korb die Schuld sogar bei sich selbst: „Meine Bitte war wohl wirklich unbescheiden; seine Zeit ist doch zu kostbar“. Sie war kostbar – in einem anderen Sinne: Klaus Junge war wenige Wochen danach gefallen . . .

Als mir Ende 1940 das Studium verboten wurde, suchte ich Trost bei Erich Hecke; seine politische Haltung war mir klar, war er doch der einzige Professor, der nie die Hand zum befohlenen (!) „deutschen Gruß“ hob, sondern beim Betreten des Hörsaals die Hörer nur mit einem freundlichen Kopfnicken grüßte. Hecke erlaubte mir, bei ihm schwarz zu hören und riet mir, auch Zassenhaus anzusprechen: der sei, trotz NS-Gebahrens, nicht nur nicht gefährlich, sondern im Gegenteil „vorgeschobener Posten“ der Nazi-Gegner unter den Dozenten der Hamburger Universität! Ich ging zu Herrn Zassenhaus, und es entstand eine herzliche Freundschaft, die auf meiner Seite mit tiefer Dankbarkeit verbunden ist.

Nie werde ich den nächtlichen Anruf Mitte 1942 vergessen, als Zassenhaus mich beschwor, mein illegales Studium abzubrechen, weil er von einer beabsichtigten Denunziation erfahren habe. Am nächsten Abend rief er wieder an: durch die Zusicherung, daß ich mich in der Uni nicht mehr sehen lassen würde, hätte er die Denunzianten zur Zurückhaltung veranlassen können; außerdem erzählte er mit hörbarem Schmunzeln: „Herr Hecke hat heute die Zahlentheorie-Vorlesung abgebrochen und den Hörern das Kolleggeld zurückgezahlt“, er selbst, Hans Zassenhaus, wolle jetzt persönlich mit mir arbeiten. Und ein Jahr lang, bis zu unserer Ausbombung im Juli 1943, besuchte ich ihn an jedem Donnerstag in seiner Wohnung in Othmarschen, Jungmannstraße 1, und dieses Intensivstudium war mein beglückendstes Erlebnis in dieser dunklen Zeit.

Nach dem Kriege versuchte ich, wieder in Hamburg Fuß zu fassen, um weiter zu studieren. Gerade hatte ich eine Unterkunft gefunden, als ich auf einem Postamt hinter mir eine bekannte Stimme hörte: „Das ist doch Herr Horst Tietz!“ – die alte Herzlichkeit war ungebrochen! Ich blieb nur im ersten Nachkriegssemester in Hamburg: Hecke war sterbenskrank, und Zassenhaus hatte neben der Seminarleitung nur noch Zeit für eine Anfängervorlesung. Es hatte sich damals spontan ein *Zentralausschuß Hamburger Studenten*, kurz ZA, gebildet, der später in den ASTA überging; in diesem ZA übernahm ich das Sozialreferat. Obgleich meine Eignung zum Politiker mir damals höchst fragwürdig wurde, konnte ich mich Zassenhaus nützlich machen. Er sah für die weltfremde Mathematik in Deutschland keine Zukunft und hatte daher die Planung eines *Institutes für Praktische Mathematik* konzipiert; ich fand das bestehend und lud ihn ein, vor dem ZA darüber zu berichten; der ZA beschloß daraufhin, dies Projekt zu unterstützen und beauftragte mich, beim englischen Hochschuloffizier dafür zu werben; denn der ZA hatte bei der Militärregierung größere Resonanz als Rektor und Senat – die Entnazifizierung stand ja noch bevor. Ich bilde mir ein, daß

dieser Schritt etwas Erfolg gehabt hatte: das Institut wurde eingerichtet! – aber doch zu spät, als daß Zassenhaus' Auswanderung über Schottland und Kanada nach USA hätte gestoppt werden können.

In diesem letzten gemeinsamen Semester erlebte ich Herrn Zassenhaus unbeschwerter als zur Nazi-Zeit. Ich erfuhr, daß er gemeinsam mit Gleichgesinnten einige Verfolgte vor dem Zugriff des Staates hatte verbergen können; er machte mir sogar Vorwürfe, daß ich mich für meine Familie nicht rechtzeitig an ihn gewandt hätte. Um etwaiger Ungläubigkeit zu begegnen, verweise ich nur auf das Buch seiner Schwester *Ein Baum blüht im November*.

Hans Zassenhaus war ein ausgesprochen heiterer Mensch; sein ansteckendes Lachen haben sicherlich manche von Ihnen noch im Ohr! Drei Beispiele möchte ich erzählen.

- Er amüsierte sich königlich über seine Kriegstätigkeit an der Seewarte: sie hatten jeden Mittag um 12 Uhr das Zeitzeichen im Rundfunk zu liefern; die Normalzeit dafür erhielten sie ihrerseits von der Bergedorfer Sternwarte; nun war aber in dieser Kette ein gleichermaßen unentbehrliches wie unersetzbares Gerät ausgefallen, so daß man einfach das vorherige Zeitzeichen des Rundfunks an diesen zurückgab.
- Ich erzählte ihm einen der ersten Nachkriegswitze: In Düsseldorf hatte eine alte Dame mit der Straßenbahn zum Adolf-Hitler-Platz fahren wollen; als der Schaffner sie belehrte, der heiße jetzt Graf-Adolf-Platz, meinte sie aus vollem Herzen: „Ach, der Gute! Das hat er aber auch verdient!“ Hans Zassenhaus fragte, während er noch lachend nach Luft rang: „Und was hat der Schaffner gesagt?“ – Humor ohne Problem war ihm wohl schwer erreichbar
- Das hätte beinahe zu einer Handgreiflichkeit gegen Herrn Maak geführt: Wir fuhren zu dritt mit der S-Bahn abends nach Othmarschen, als eine der häufigen Stromsperrren nicht nur unsere Fahrt für lange Zeit unterbrach, sondern uns in Kälte und Dunkelheit in der vollbesetzten Bahn stehen ließ; wir vertrieben uns die Zeit mit immer raffinierteren Denksportaufgaben, die schließlich in der folgenden von Herrn Maak gipfelten: „Ein Jäger, sein Gehilfe und ein Hund fliehen vor einem Löwen in ein leeres Haus, in dem nur ein Schrank mit 4 Füßen steht; sie klettern auf den Schrank, der Löwe kommt herein und legt sich zum Schlafen, als er die drei auf dem Schrank sitzen sieht; in das lange Schweigen dieser Pattsituation hinein stellt der Gehilfe plötzlich fest: „Hier sind 7 Füße im Haus.“ – wie kam er darauf?“ Nach langem ebenso scharfsinnigen wie vergeblichen Raten gab Herr Maak endlich dem fast flehentlichen Bitten seines gemarterten Kollegen nach: „Der Gehilfe konnte nicht zählen“. Es war glücklicherweise stockdunkel in der Bahn

Vor wenigen Wochen genossen Herr Wefelscheid und ich die herzliche Gastfreundschaft von Frau Zassenhaus in Columbus, Ohio; im Auftrag der DFG sichteten wir

den umfangreichen wissenschaftlichen Nachlaß ihres Mannes und machten ihn für den Transport ins Mathematiker-Archiv der Universitätsbibliothek Göttingen zurecht. Diese letzte Begegnung mit dem großen Geist war in mancher Hinsicht ergreifend; lassen Sie mich mit zwei Beispielen hierzu schließen:

- In einer undatierten Dankesrede fanden wir die Feststellung, es mache ihm nichts aus, einem Studenten die Thesis aufzuschreiben, er hasse es aber, wenn er sie ihm dann noch erklären müsse!
- Obgleich in seinen letzten Monaten die Krankheit seine Kräfte schwinden ließ, arbeitete er intensiv fast bis zuletzt – fast: in den letzten Wochen konnte er nicht mehr aufstehen, aber er las bis zuletzt: Kriminalromane und die Bibel

On the solvability of the kernel of any orthogonal decomposition

*Pham Huu Tiep**

In Memory of Professor H. Zassenhaus

Abstract. The aim of the article is to make a step toward the classification of orthogonal decompositions of complex simple Lie algebras. Namely, we show that the kernel of an orthogonal decomposition of a complex simple Lie algebra \mathcal{L} (i.e., the group consisting of all automorphisms of \mathcal{L} that act trivially on the set of components of the decomposition) is near to be soluble. An essential ingredient of our arguments is a long-standing theorem of H. Zassenhaus characterizing the group $SL_2(5)$.

1. Introduction

Let \mathcal{L} be a finite dimensional complex simple Lie algebra. By an *orthogonal decomposition* (abbreviated as OD) of \mathcal{L} we understand its decomposition

$$\mathcal{D} : \mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{h+1} \mathcal{H}_i \quad (1.1)$$

into a direct sum of Cartan subalgebras, which are pairwise orthogonal with respect to the Killing form K of \mathcal{L} . Here h stands for the Coxeter number of \mathcal{L} . The notion of OD's emerges from the pioneering works [Tho 1, Tho 2] of J. G. Thompson on constructing the sporadic finite simple group F_3 . They turn out to be very interesting not only by their inner geometric structures, but also by their interconnections with other areas of mathematics. A systematic investigation of orthogonal decompositions has been undertaken by A. I. Kostrikin and others. We refer the reader to the book [KoT] for a survey on this activity, and to [Kan] for some interconnections of OD's with combinatorics. There is, in particular, an interesting connection between OD's of Lie algebras of type A_n and the so-called *extremal line-sets* in \mathbb{C}^{n+1} , which are investigated in detail in [CCKS].

*The results in this article were obtained during my stay at the University of Essen. I am very grateful to Prof. G. O. Michler and his colleagues at the Institute for Experimental Mathematics for stimulating conversations and their generous hospitality. I am also grateful to the Alexander von Humboldt Foundation for its financial support. My sincere thanks go to Prof. W. M. Kantor for many valuable comments on the article. Finally, I am thankful to Prof. H. G. Zimmer and Walter de Gruyter & Co. for suggesting me to submit this article to the Zassenhaus Proceedings.

The main conjecture concerning OD's is the following:

Conjecture 1.1 (A. I. Kostrikin, about 1983). *A complex simple Lie algebra \mathcal{L} admits an OD if and only if \mathcal{L} is not of the types: A_n , $n + 1$ is not a prime power, and C_n , n is not a power of two.*

The “if” part of Conjecture 1.1 was completely established about twelve years ago. In the meantime, the “only if” part still remains open, even in the simplest cases of Lie algebras of type A_5 and C_3 . The main achievement in this direction is the proof of Conjecture 1.1 under the assumption that the *automorphism group*,

$$\text{Aut}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{L}) \mid \forall i, \exists j, \varphi(\mathcal{H}_i) = \varphi(\mathcal{H}_j)\},$$

acts absolutely irreducibly on \mathcal{L} (and \mathcal{L} is not of type C_n , D_n), see [KoT].

Let \mathcal{D} be any orthogonal decomposition. Then its *kernel* is defined as

$$\text{Ker}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{L}) \mid \forall i, \varphi(\mathcal{H}_i) = \varphi(\mathcal{H}_i)\}.$$

It seems that the following conjecture is very plausible:

Conjecture 1.2. *The kernel of any orthogonal decomposition is a finite solvable group.*

Observe that in all currently known examples of OD's, $\text{Ker}(\mathcal{D})$ is either a 2-group, or a finite extension of a *Jordan subgroup* (which is elementary abelian by definition) of the inner automorphism group $\mathcal{G} = \text{Inn}(\mathcal{L})$ of \mathcal{L} by a group of order 1, 2, 4 or 6. The notion of Jordan subgroups of complex Lie groups was introduced by A. V. Alekseevskii [Ale]. Due to the remarkable results of M. Aschbacher [Asch], A. V. Borovik [Bor], A. M. Cohen – M. W. Liebeck – J. Saxl – G. M. Seitz [CLSS], Jordan subgroups turn out to play an important role in the classification of

- finite Lie primitive subgroups of complex Lie groups (here Lie primitive means that the subgroup is maximal among all proper closed Lie subgroups);
- (local) maximal subgroups of groups of Lie type, algebraic or finite.

Namely, the normalizers of Jordan subgroups represent a subclass of the class of maximal (closed) finite subgroups with abelian socle. The two other classes are those with non-abelian simple socle and with the socle equal to $\mathbb{A}_5 \times \mathbb{A}_6$.

Remark that $\text{Aut}(\mathcal{D})$ is a finite group, because it can be embedded in $W(\mathcal{L}) \wr \mathbb{S}_{h+1}$ (here and below $W(\mathcal{L})$ denotes the Weyl group corresponding to \mathcal{L}). Furthermore, one cannot strengthen Conjecture 1.2 by replacing solvability of $\text{Ker}(\mathcal{D})$ with nilpotency. For example, the so-called “standard” OD \mathcal{D} of the Lie algebra of type A_{p-1} (see [KoT]) has non-nilpotent kernel. (Even more, the subgroup $\text{Ker}(\mathcal{D}) \cap \text{Inn}(\mathcal{L})$ is not nilpotent.)

Strong evidence for Conjecture 1.2 is given by the main result of this article:

Theorem 1.3. *Let \mathcal{L} be a complex simple Lie algebra and \mathcal{D} an orthogonal decomposition of \mathcal{L} .*

- (i) *If \mathcal{L} is of type G_2, F_4, E_6 or E_7 , then $\text{Ker}(\mathcal{D})$ is solvable.*
- (ii) *If \mathcal{L} is of type B_n, C_n or D_n , then the odd part of $|\text{Ker}(\mathcal{D})|$ divides n .*
- (iii) *Assume that \mathcal{L} is of type A_n and set $\text{Ker}_0(\mathcal{D}) = \text{Ker}(\mathcal{D}) \cap \text{Inn}(\mathcal{L})$. Then $|\text{Ker}(\mathcal{D}) : \text{Ker}_0(\mathcal{D})| \leq 2$ and one of the following holds.*
 - (a) *$|\text{Ker}_0(\mathcal{D})|$ divides n .*
 - (b) *$\text{Ker}_0(\mathcal{D})$ is a split extension of a normal nilpotent subgroup A by $B \simeq \text{Ker}_0(\mathcal{D})/A$. The order of B divides n . Furthermore, either B is solvable, or $B \in \{\text{O}(B) \times \text{SL}_2(5), (\text{O}(B) \times \text{SL}_2(5)) \cdot 2\}$. Finally, $|A|$ divides either $(n+1)^2$ or n .*

As an immediate consequence of Theorem 1.3, we get

Corollary 1.4. *Conjecture 1.2 holds for Lie algebras of any of the following types:*

- (i) *A_n , where either n is not divisible by 4, or n is divisible by at most two distinct primes;*
- (ii) *B_n, C_n or D_n , where n is divisible by at most one odd prime.*

The rest of the article is devoted to the proof of Theorem 1.3. From now on, \mathcal{L} is a complex simple Lie algebra with an OD \mathcal{D} of type (1.1), $\mathcal{G} = \text{Inn}(\mathcal{L})$, $W(\mathcal{L})$ denotes the corresponding Weyl group, R its root system, $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \in R} \langle X_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ the Cartan decomposition corresponding to a Cartan subalgebra \mathcal{H} . Furthermore, $\chi, \rho_1, \dots, \rho_{h+1}$ denote the characters of $G = \text{Ker}(\mathcal{D})$ afforded by $\mathcal{L}, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{h+1}$, respectively. It is obvious that $\chi = \sum_{i=1}^{h+1} \rho_i$.

2. Lie algebras of types B_n, C_n , and D_n

We start with the following simple statement.

Lemma 2.1. *Let $g \in \mathcal{G}$ and $|g| < \infty$. Assume that*

- (i) *g fixes a Cartan subalgebra \mathcal{H} ;*
- (ii) *g acts on R with exactly ℓ fixed points.*

Then $|\text{Tr}(g|_{\mathcal{L}}) - \text{Tr}(g|_{\mathcal{H}})| \leq \ell$.

Proof. Observe that g acts on $\mathcal{H}^* = \langle R \rangle_{\mathbb{C}}$ as an element of $W(\mathcal{L})$. Therefore $\text{Tr}(g|_{\mathcal{H}}) \in \mathbb{Z}$. Denote by π the permutation on R induced by the action of g on \mathcal{H}^* . Then $g(\langle X_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}) = \langle X_{\pi(\alpha)} \rangle_{\mathbb{C}}$. So the contribution of $\langle X_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ to $\text{Tr}(g|_{\mathcal{L}})$ is 0 if $\pi(\alpha) \neq \alpha$, and a root of unity if $\pi(\alpha) = \alpha$. Hence, $|\text{Tr}(g|_{\mathcal{L}}) - \text{Tr}(g|_{\mathcal{H}})| \leq \ell$. \square