

Heinz Schade, Ewald Kunz, Frank Kameier und Christian Oliver Paschereit

Strömungslehre

De Gruyter Studium

Weitere empfehlenswerte Titel



Physik im Studium – Ein Brückenkurs

Jan Peter Gehrke und Patrick Köberle, 2021

ISBN 978-3-11-070392-4, e-ISBN (PDF) 978-3-11-070393-1



Experimentalphysik

Band 1 Mechanik, Schwingungen, Wellen

Wolfgang Pfeiler, 2020

ISBN 978-3-11-067560-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-067586-3



Klassische Mechanik

Vom Weitsprung zum Marsflug

Rainer Müller, 2020

ISBN 978-3-11-073538-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-073078-4



Mathematical Fluid Mechanics

B. Mahanthesh (Ed.), 2021

ISBN 978-3-11-069603-5, e-ISBN: 978-3-11-069608-0

Heinz Schade, Ewald Kunz, Frank Kameier
und Christian Oliver Paschereit

Strömungslehre

Bearbeitet von
Frank Kameier und Christian Oliver Paschereit

5. Auflage

DE GRUYTER

Autoren

Prof. Dr.-Ing. Frank Kameier
Hochschule Düsseldorf
FB Maschinenbau u. Verfahrenstechnik
Münsterstr. 156
40476 Düsseldorf
frank.kameier@hs-duesseldorf.de

Prof. Dr.-Ing. Christian Oliver Paschereit
Technische Universität Berlin
Institut für Strömungsmechanik u.
Technische Akustik (ehem. HFI)
Müller-Breslau-Str. 8
10623 Berlin
oliver.paschereit@tu-berlin.de

ISBN 978-3-11-064144-8

e-ISBN (PDF) 978-3-11-064145-5

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-064155-4

Library of Congress Control Number: 2021948864

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2022 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Coverabbildung: Jürgen Wagner

Satz: VTeX UAB, Lithuania

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com

Vorwort

Dieses Buch enthält den Stoff der Lehrveranstaltungen Strömungslehre oder Grundlagen der Strömungstechnik für Studierende des Maschinenbaus, der Verfahrenstechnik, der Physikalischen Ingenieurwissenschaft, des Verkehrswesens (Luft- und Raumfahrt), der Energie- und der Umwelttechnik. Konzipiert wurde es für einen Umfang von 8 Semesterwochenstunden (auf zwei Semester verteilt). Aufgebaut ist das Buch aus einzelnen Lehreinheiten, die größtenteils auch unabhängig voneinander studiert werden können. Aus diesem Grund ist es für Bachelor-Studiengänge im Rahmen der Grundausbildung genauso geeignet wie für fachliche Vertiefungen im Rahmen von Master-Studiengängen. Es ist geeignet für Studierende an Hochschulen oder Fachhochschulen und Universitäten.

Zahlreiche Beispiele mit ausführlichen Lösungen und viele Verständnisfragen, deren ausführliche Lösungen in einem Feedback-Teil gebündelt wurden ermöglichen die Selbstkontrolle des eigenen Lernstandes.

Das Buch sollte für Studierende der Ingenieurwissenschaften vom dritten Semester an verständlich sein; wir haben uns deshalb darum bemüht, an Vorkenntnissen möglichst wenig vorauszusetzen: aus der Mathematik die Infinitesimalrechnung für eine und mehrere Variable und die elementare Vektoralgebra, außerdem die Grundlagen der Mechanik. Einige Zusatzaufgaben behandeln gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Gasdynamik benötigt Grundlagenkenntnisse der Thermodynamik.

- Das Feedback enthält zu jeder Übungsaufgabe die Lösung und gelegentlich weiterführende Erläuterungen. Natürlich sollte der Leser die Aufgaben zunächst ohne Zuhilfenahme des Feedbacks zu lösen versuchen.
- Formeln und Sätze, die der Leser durchaus auswendig lernen sollte, haben wir eingerahmt.
- Die kleingedruckten Texte stellen weiterführende und zum Teil mathematisch anspruchsvollere Ergänzungen des eigentlichen Stoffes dar; auf solches Material wird im Folgenden auch wieder nur in kleingedruckten Texten Bezug genommen. Das Feedback zu diesen Zusatzaufgaben ist etwas knapper gefasst; elementare Zwischenrechnungen sind hier häufig weggelassen worden.

In der fünften Auflage wurden zwei Lehreinheiten *Strömungslehre lernen mittels CFD* und *Turbulenzmodelle für die numerische Simulation* ergänzt, und somit werden zeitgemäße numerische Methoden (Computational Fluid Dynamics) nun didaktisch genutzt. Ziel dabei ist nicht die exakte und bestmögliche Berechnung einer Strömungskonfiguration. Vielmehr sollen die Leserinnen und Leser unter Zuhilfenahme der Industriesoftware ANSYS und einer Reihe von YouTube-Filmen motiviert werden, auch theoretisch noch tiefer in die Materie einzudringen.

Das Buch geht in Auswahl und Anordnung der Kapitel noch auf den 1973 verstorbenen Professor Wille zurück. Durch zahlreiche Hinweise haben seine Nachfolger und mehrere Generationen von wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern sowie Studierende des Hermann-Föttinger-Instituts der TU Berlin und inzwischen auch der Hochschule Düsseldorf daran mitgewirkt. Auch in der fünften Auflage unterscheidet sich das von Heinz Schade und Ewald Kunz Ende der siebziger Jahre erdachte und erprobte didaktische Konzept dieses Buchs von vielen anderen und macht es zu einem noch heute wertvollen Lehrbuch der Strömungsmechanik. Natürlich konnten wir in der vorliegenden Auflage auf Abbildungen zurückgreifen, die von Frau Schröteler, Herrn Eckardt und ganz wesentlich von Frau Albert-Kunz bereits 1980 gestaltet wurden. Auch das Kapitel 15 zur Strömungsmesstechnik, seinerzeit von Jorg-Dieter Vagt verfasst, bildet weiter eine wichtige Grundlage, wurde aber umfangreich überarbeitet. Matthias Pfizenmaier danken wir für den sorgfältigen Transfer des Textes und der Formeln nach LaTeX. Evelin Kulzer, Dijana Hallmann, Jürgen Hahn, Tobias Pohlmann und Martin Mohr haben die zahllosen Verbesserungen an den Grafiken eingearbeitet und eine Reihe neuer Bilder gestaltet und erstellt. Tobias Pohlmann ist in diesem Zusammenhang besonders zu danken, da ohne sein Zutun die Lehreinheiten 5.7 und 13.7 zur numerischen Simulation nicht entstanden wären. Auch an Thomas Gietl geht ein besonderer Dank für inhaltliches und redaktionelles Engagement.

Nicht zuletzt danken wir Frau Vivien Schubert vom Verlag Walter de Gruyter für das unserer Arbeit entgegengebrachte Vertrauen. Dem Team von VTeX.lt (Ieva Spudulytė, Vilma Vaičeliūnienė und Ina Talandienė) danken wir für die gute Zusammenarbeit. Ieva, Ina and Vilma thank's a lot for solving the tricky LaTeX problems.

Düsseldorf und Berlin, im November 2021

Frank Kameier
Christian Oliver Paschereit

Die Fotos der Strömungssichtbarmachung auf dem Cover stammen von dem 2018 leider viel zu früh verstorbenen Jürgen Wagner, der viele Jahre als Tutor am Institut in Berlin tätig war und sich u. a. auch mit der künstlerischen Verwertung von Strömungstopologien beschäftigt hat #RIP Jürgen smart-flow.de.

Inhalt

Vorwort — V

1 Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen — 1

- LE 1.1 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 1) — 1
- LE 1.2 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 2) — 4
- LE 1.3 Fluide — 7
- LE 1.4 Extensive und intensive Größen — 11
- LE 1.5 Der Druck — 17
- LE 1.6 Die thermische Zustandsgleichung — 20
- LE 1.7 Die Zähigkeit — 23
- LE 1.8 Nicht-newtonsche Fluide — 27
- LE 1.9 Die Grenzflächenspannung (Teil 1) — 34
- LE 1.10 Die Grenzflächenspannung (Teil 2) — 37

2 Hydrostatik — 41

- LE 2.1 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik — 41
- LE 2.2 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik bei barotroper Schichtung — 46
- LE 2.3 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik für inkompressible Fluide — 50
- LE 2.4 Kräfte auf Behälterwände — 55
- LE 2.5 Die Vertikalkraft — 57
- LE 2.6 Die Horizontalkraft — 59
- LE 2.7 Der hydrostatische Auftrieb — 63

3 Kinematik — 67

- LE 3.1 Lagrangesche und Eulersche Darstellung — 67
- LE 3.2 Transporttheorem, Geschwindigkeit, Beschleunigung — 70
- LE 3.3 Stromlinien, Bahnlinien, Streichlinien — 73
- LE 3.4 Die Kontinuitätsgleichung (Teil 1) — 78
- LE 3.5 Die Kontinuitätsgleichung (Teil 2) — 83

4 Eulersche und Bernoullische Gleichung — 89

- LE 4.1 Der Impulssatz — 89
- LE 4.2 Die Eulersche Bewegungsgleichung in Bahnlinienkoordinaten. Die radiale Druckgleichung — 94

- LE 4.3 Die Bernoullische Gleichung für inkompressible Fluide (Teil 1) — 97
- LE 4.4 Die Bernoullische Gleichung für inkompressible Fluide (Teil 2) — 106

5 Rohrhydraulik und numerische Simulationen — 113

- LE 5.1 Die Rohrströmung — 113
- LE 5.2 Die Bernoullische Gleichung mit Strömungsverlusten und Energiezufuhr — 118
- LE 5.3 Druckverluste durch Reibung — 120
- LE 5.4 Druckverluste durch Einbauten (Teil 1) — 124
- LE 5.5 Druckverluste durch Einbauten (Teil 2) — 128
- LE 5.6 Rohrleitungsberechnung — 132
- LE 5.7 Strömungslehre lernen mittels CFD — 136

6 Impulssatz und Drehimpulssatz — 143

- LE 6.1 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 1) — 143
- LE 6.2 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 2) — 149
- LE 6.3 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 3) — 155
- LE 6.4 Der Drehimpulssatz — 161
- LE 6.5 Die Eulersche Strömungsmaschinenhauptgleichung — 164

7 Gasdynamik — 175

- LE 7.1 Der Energiesatz für ein materielles Volumen — 175
- LE 7.2 Der Energiesatz für einen Stromfaden — 178
- LE 7.3 Gibbssche Gleichung und Entropieungleichung — 183
- LE 7.4 Ideale Gase. Die Strömungsberechnung für reibungsfreie ideale Gase — 189
- LE 7.5 Schallgeschwindigkeit und Schallausbreitung — 194
- LE 7.6 Die Bernoullische Gleichung für ein ideales Gas — 198
- LE 7.7 Isentrope stationäre Stromfadentheorie — 202
- LE 7.8 Die Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung — 205
- LE 7.9 Die Durchflussfunktion — 208
- LE 7.10 Der senkrechte Verdichtungsstoß — 210
- LE 7.11 Der schiefe Verdichtungsstoß — 215
- LE 7.12 Die Lavaldüse — 219
- LE 7.13 Thermodynamische Wirkungsgrade — 221

8 Die Navier-Stokessche Gleichung — 226

- LE 8.1 Der Spannungstensor — 226
- LE 8.2 Der allgemeine Newtonsche Schubspannungsansatz — 230

- LE 8.3 Die Navier-Stokessche Gleichung — 234
- LE 8.4 Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichung — 238
- LE 8.5 Näherungsgleichungen — 245
- LE 8.6 Schleichströmungen — 248

- 9 Ebene und wirbelfreie Strömungen — 254**
 - LE 9.1 Wirbelstärke und Zirkulation — 254
 - LE 9.2 Ebene Strömungen — 258
 - LE 9.3 Wirbelfreie Strömungen (Potentialströmungen) — 262
 - LE 9.4 Die Grundgleichungen für ebene Potentialströmungen — 267
 - LE 9.5 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 1) — 268
 - LE 9.6 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 2) — 274
 - LE 9.7 Die Umströmung eines Kreiszylinders — 279
 - LE 9.8 Die Methode der konformen Abbildung — 285
 - LE 9.9 Kräfte auf umströmte Körper — 290
 - LE 9.10 Rotationssymmetrische Potentialströmungen — 294
 - LE 9.11 Die Singularitätenmethode — 298

- 10 Wirbelströmungen — 302**
 - LE 10.1 Das Biot-Savartsche Gesetz — 302
 - LE 10.2 Die ebene Wirbelschicht — 310
 - LE 10.3 Der Thomsonsche Satz — 314
 - LE 10.4 Die Helmholtzschen Wirbelsätze — 317
 - LE 10.5 Rankinewirbel und Hamel-Oseen-Wirbel — 320
 - LE 10.6 Die Umströmung eines Tragflügels endlicher Spannweite — 323

- 11 Dimensionsanalyse und Ähnlichkeitslehre — 331**
 - LE 11.1 Dimensionsanalyse — 332
 - LE 11.2 Ähnlichkeitslehre — 340

- 12 Grenzschichttheorie — 349**
 - LE 12.1 Grenzschichten — 350
 - LE 12.2 Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen (Teil 1) — 354
 - LE 12.3 Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen (Teil 2) — 363
 - LE 12.4 Grenzschichtdicken — 369
 - LE 12.5 Wandschubspannung und Reibungswiderstand — 375
 - LE 12.6 Die Plattenströmung — 378

- 13 Turbulente Strömungen — 383**
 - LE 13.1 Laminare, periodische und turbulente Strömungen — 383

- LE 13.2 Die Reynoldssche Gleichung — **386**
- LE 13.3 Wirbelzähigkeit, Mischungswegansatz, Ähnlichkeitshypothese — **393**
- LE 13.4 Turbulente Wandgrenzschichten — **396**
- LE 13.5 Die turbulente Rohrströmung — **403**
- LE 13.6 Die turbulente Plattenströmung — **410**
- LE 13.7 Turbulenzmodelle für die numerische Simulation — **415**

14 Umströmung von Körpern — 420

- LE 14.1 Kräfte auf umströmte Körper — **420**
- LE 14.2 Der Widerstandsbeiwert von Kreisscheibe, Kugel und Zylinder — **424**
- LE 14.3 Körper geringsten Widerstandes — **430**
- LE 14.4 Der hydrodynamische Auftrieb eines Tragflügels — **431**
- LE 14.5 Bauwerksaerodynamik — **432**
- LE 14.6 Windkanaleinbauten — **434**

15 Strömungsmesstechnik — 439

- LE 15.1 Das Pitotrohr — **439**
- LE 15.2 Die (statische) Drucksonde — **442**
- LE 15.3 Das Prandtlsche Staurohr — **444**
- LE 15.4 Hitzdrahtanemometrie — **445**
- LE 15.5 Laser-Doppler-Anemometry — **447**
- LE 15.6 Particle-Image-Velocimetry — **449**
- LE 15.7 Volumenstrommessung — **449**
- LE 15.8 Viskosimetrie — **459**

Feedback — 463

- FB 1.1 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 1) — **463**
- FB 1.2 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 2) — **463**
- FB 1.3 Fluide — **464**
- FB 1.4 Extensive und intensive Größen — **464**
- FB 1.5 Der Druck — **465**
- FB 1.6 Die thermische Zustandsgleichung — **466**
- FB 1.7 Die Zähigkeit — **466**
- FB 1.8 Nicht-newtonsche Fluide — **468**
- FB 1.9 Die Grenzflächenspannung (Teil 1) — **470**
- FB 1.10 Die Grenzflächenspannung (Teil 2) — **470**
- FB 2.1 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik — **471**

- FB 2.2 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik bei barotroper Schichtung — **473**
- FB 2.3 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik für inkompressible Fluide — **475**
- FB 2.4 Kräfte auf Behälterwände — **476**
- FB 2.5 Die Vertikalkraft — **477**
- FB 2.6 Die Horizontalkraft — **478**
- FB 2.7 Der hydrostatische Auftrieb — **480**
- FB 3.1 Lagrangesche und Eulersche Darstellung — **482**
- FB 3.2 Transportgleichung, Geschwindigkeit, Beschleunigung — **483**
- FB 3.3 Stromlinien, Bahnlinien, Streichlinien — **483**
- FB 3.4 Die Kontinuitätsgleichung (Teil 1) — **488**
- FB 3.5 Die Kontinuitätsgleichung (Teil 2) — **489**
- FB 4.1 Der Impulssatz — **489**
- FB 4.2 Die Eulersche Bewegungsgleichung in Bahnlinienkoordinaten. Die radiale Druckgleichung — **490**
- FB 4.3 Die Bernoullische Gleichung für inkompressible Fluide (Teil 1) — **491**
- FB 4.4 Die Bernoullische Gleichung für inkompressible Fluide (Teil 2) — **495**
- FB 5.1 Die Rohrströmung — **497**
- FB 5.2 Die Bernoullische Gleichung mit Strömungsverlusten und Energiezufuhr — **497**
- FB 5.3 Druckverluste durch Reibung — **498**
- FB 5.4 Druckverluste durch Einbauten (Teil 1) — **499**
- FB 5.5 Druckverluste durch Einbauten (Teil 2) — **501**
- FB 5.6 Rohrleitungsberechnung — **501**
- FB 6.1 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 1) — **502**
- FB 6.2 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 2) — **504**
- FB 6.3 Der Impulssatz für einen Stromfaden (Teil 3) — **506**
- FB 6.4 Der Drehimpulssatz — **507**
- FB 6.5 Die Eulersche Strömungsmaschinenhauptgleichung — **509**
- FB 7.1 Der Energiesatz für ein materielles Volumen — **511**
- FB 7.2 Der Energiesatz für einen Stromfaden — **512**
- FB 7.3 Gibbssche Gleichung und Entropieungleichung — **513**
- FB 7.4 Ideale Gase. Die Strömungsberechnung für reibungsfreie ideale Gase — **515**
- FB 7.5 Schallgeschwindigkeit und Schallausbreitung — **516**
- FB 7.6 Die Bernoullische Gleichung für ein ideales Gas — **517**
- FB 7.7 Isentrope stationäre Stromfadentheorie — **518**

- FB 7.8 Die Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung — **519**
- FB 7.9 Die Durchflussfunktion — **521**
- FB 7.10 Der senkrechte Verdichtungsstoß — **521**
- FB 7.11 Der schiefe Verdichtungsstoß — **524**
- FB 7.12 Die Lavaldüse — **524**
- FB 7.13 Thermodynamische Wirkungsgrade — **526**
- FB 8.1 Der Spannungstensor — **527**
- FB 8.2 Der allgemeine Newtonsche Schubspannungsansatz — **528**
- FB 8.3 Die Navier-Stokessche Gleichung — **529**
- FB 8.4 Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichung — **532**
- FB 8.5 Näherungsgleichungen — **538**
- FB 8.6 Schleichströmungen — **539**
- FB 9.1 Wirbelstärke und Zirkulation — **539**
- FB 9.2 Ebene Strömungen — **541**
- FB 9.3 Wirbelfreie Strömungen (Potentialströmungen) — **542**
- FB 9.4 Die Grundgleichungen für ebene Potentialströmungen — **544**
- FB 9.5 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 1) — **545**
- FB 9.6 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 2) — **549**
- FB 9.7 Die Umströmung eines Kreiszyinders — **550**
- FB 9.8 Die Methode der konformen Abbildung — **552**
- FB 9.9 Kräfte auf umströmte Körper — **555**
- FB 9.10 Rotationssymmetrische Potentialströmungen — **556**
- FB 9.11 Die Singularitätenmethode — **558**
- FB 10.1 Das Biot-Savartsche Gesetz — **559**
- FB 10.2 Die ebene Wirbelschicht — **565**
- FB 10.3 Der Thomsonsche Satz — **565**
- FB 10.4 Die Helmholtzschen Wirbelsätze — **566**
- FB 10.5 Rankinewirbel und Hamel-Oseen-Wirbel — **566**
- FB 10.6 Die Umströmung eines Tragflügels endlicher Spannweite — **567**
- FB 11.1 Dimensionsanalyse — **568**
- FB 11.2 Ähnlichkeitslehre — **571**
- FB 12.1 Grenzschichten — **572**
- FB 12.2 Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen (Teil 1) — **573**
- FB 12.3 Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen (Teil 2) — **574**
- FB 12.4 Grenzschichtdicken — **575**
- FB 12.5 Wandschubspannung und Reibungswiderstand — **576**
- FB 12.6 Die Plattenströmung — **576**
- FB 13.1 Laminare, periodische und turbulente Strömungen — **578**
- FB 13.2 Die Reynoldssche Gleichung — **578**

- FB 13.3 Wirbelzähigkeitsansatz, Mischungswegansatz, Ähnlichkeitshypothese — **579**
- FB 13.4 Turbulente Wandgrenzschichten — **580**
- FB 13.5 Die turbulente Rohrströmung — **581**
- FB 13.6 Die turbulente Plattenströmung — **582**
- FB 14.1 Kräfte auf umströmte Körper — **584**
- FB 14.2 Der Widerstandsbeiwert von Kreisscheibe, Kugel und Zylinder — **585**
- FB 14.3 Körper geringsten Widerstandes — **586**
- FB 14.4 Bauwerksaerodynamik — **586**
- FB 14.5 Windkanaleinbauten — **587**
- FB 15.1 Das Pitotrohr — **588**
- FB 15.2 Die (statische) Drucksonde — **589**
- FB 15.3 Das Prandtl'sche Staurohr — **589**
- FB 15.4 Hitzdrahtanemometrie — **590**
- FB 15.5 Laser-Doppler-Anemometry — **590**
- FB 15.6 Particle-Image-Velocimetry — **591**
- FB 15.7 Volumenstrommessung — **591**
- FB 15.8 Viskosimetrie — **592**

Anhang — **593**

- 1 Zum Rechnen mit Tensoren — **593**
- 1.1 Die Einsteinsche Summationskonvention — **593**
- 1.2 Punkte, Vektoren, Tensoren — **594**
- 1.3 Symbolische und Koordinatenschreibweise — **596**
- 1.4 Gleichheit, Addition und Subtraktion von Tensoren. Transponierte, symmetrische und antimetrische Tensoren — **596**
- 1.5 δ -Tensor und ϵ -Tensor. Isotrope Tensoren — **598**
- 1.6 Die tensorielle Multiplikation von Tensoren — **599**
- 1.7 Die skalare Multiplikation von Tensoren — **601**
- 1.8 Die vektorielle Multiplikation von Tensoren — **604**
- 1.9 Gradient, vollständiges Differential — **604**
- 1.10 Divergenz, Rotation, Laplace-Operator — **606**
- 1.11 Normalenvektor und Flächenvektor eines Flächenelements — **609**
- 1.12 Integrale von Tensorfeldern — **610**
- 1.13 Gaußscher und Stokesscher Satz — **611**
- 1.14 Zylinderkoordinaten — **613**
- 2 Kurven im Raum — **616**
- 3 Wiederholungen aus der Funktionentheorie — **617**
- 4 Tabellen und Diagramme — **620**

XIV — Inhalt

Literaturverzeichnis zu den Tabellen — **630**

5 Weiterführende Literatur — **631**

6 Symbolverzeichnis — **635**

Namen- und Sachverzeichnis — 641

Kapitel 1

Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen

Die Strömungslehre ist die Physik der Flüssigkeiten und Gase. In diesem ersten Kapitel wollen wir zunächst das Wichtigste über den Aufbau der Materie aus Molekülen und über die Unterschiede zwischen den drei klassischen Aggregatzuständen der Materie zusammenstellen (Lehreinheiten 1.1 und 1.2). Anschließend wollen wir das physikalische Modell des Fluids und als dessen Teil das mathematische Modell des Kontinuums und zugleich die Grenzen eines solchen Modells für die Beschreibung realer Flüssigkeiten und Gase kennen lernen (Lehreinheiten 1.3 bis 1.5). Schließlich wollen wir drei wichtige physikalische Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen, die Dichte (Lehreinheit 1.6), die Zähigkeit (Lehreinheiten 1.7 und 1.8) und die Grenzflächenspannung (Lehreinheiten 1.9 und 1.10) näher betrachten.

Wie häufig ist das einleitende Kapitel nicht das einfachste, weil es die begrifflichen Grundlagen für alles Folgende zusammenstellt und sowohl in der Auswahl des Stoffes wie in der Präzision der Darlegung dem Leser nicht unbedingt einleuchtet. Wem das Schwierigkeiten bereitet, der lese es zunächst nur oberflächlich und arbeite es nach der Lektüre einiger weiterer Kapitel noch einmal sorgfältig durch.

LE 1.1 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 1)

Wir wollen in den ersten beiden Lehreinheiten die uns allen vertraute Einteilung in feste Körper, Flüssigkeiten und Gase etwas genauer untersuchen.

Die klassischen Aggregatzustände

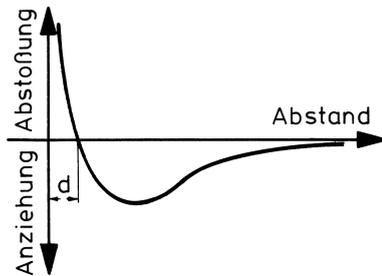
Seit alters teilt man die Körper in feste Körper, Flüssigkeiten und Gase ein: ein fester Körper hat eine bestimmte Gestalt; eine Flüssigkeitsmenge hat zwar keine bestimmte Gestalt, aber ein bestimmtes Volumen; eine Gasmenge hat auch kein bestimmtes Volumen. Seit langem weiß man auch, dass ein Stoff in allen drei Erscheinungsformen (Aggregatzuständen) auftreten kann: bei hinreichend niedriger Temperatur als fester Körper, bei höherer Temperatur als Flüssigkeit und bei noch höherer Temperatur als Gas.

Die Grenzen zwischen diesen drei klassischen Aggregatzuständen sind jedoch keineswegs immer eindeutig: Nur einige Stoffe, z. B. Eis, Salze oder Metalle

(man nennt sie kristallin), gehen bei Erwärmung bei einer bestimmten Temperatur unter sprunghafter Änderung ihrer Eigenschaften vom festen in den flüssigen Zustand über; bei anderen Stoffen, z. B. Wachs oder Pech (man nennt sie amorph), geschieht dieser Übergang allmählich. Stoffe wie Plastilin oder Sand haben keine bestimmte Gestalt und sind trotzdem keine Flüssigkeiten. Auch die Unterscheidung von Flüssigkeit und Gas ist bei hinreichend hohen Temperaturen und Drücken (oberhalb des so genannten kritischen Punktes, s. u.) nicht möglich. Trotzdem kommen wir auch in der Wissenschaft nicht ohne diese Begriffe aus; sie entsprechen auch jeweils typischen Erscheinungsformen im Aufbau der Materie.

Intermolekulare Kräfte

Bekanntlich setzt sich jeder Stoff aus Molekülen zusammen, zwischen denen sehr starke Kräfte wirken. Größe und Richtung der resultierenden Kraft zwischen zwei Molekülen als Funktion des Abstands verlaufen im Allgemeinen wie nebenstehend skizziert: Bei sehr kleinem Abstand herrscht eine starke abstoßende Kraft, bei größerem Abstand eine zunächst mit dem Abstand zunehmende und dann



sehr schnell gegen null gehende Anziehungskraft. Man sieht, dass der Abstand d , für den die resultierende Kraft durch null geht, eine stabile Gleichgewichtslage der beiden Moleküle darstellt: Presst man sie stärker zusammen, so sind dazu mit abnehmendem Abstand sehr schnell wachsende Kräfte nötig, und beim Nachlassen dieser Kräfte kehren die Moleküle in die Ausgangslage zurück. Zieht man sie auseinander, so ist dazu eine zunächst mit dem Abstand ebenfalls sehr schnell wachsende Kraft nötig, bei deren Nachlassen die Moleküle ebenfalls in die Ausgangslage zurückkehren. Zieht man sie weiter auseinander, so nimmt die Anziehungskraft zwischen den Molekülen mit zunehmendem Abstand wieder ab und wird bald so klein, dass sie praktisch keine Rolle mehr spielt. Der stabile Abstand zwischen den Molekülen liegt im Allgemeinen in der Größenordnung von 10^{-10} m.

Feste Körper und Flüssigkeiten

Bei festen Körpern und Flüssigkeiten befinden sich die Moleküle alle ungefähr im stabilen Abstand voneinander, deshalb setzen sie der Verringerung wie der Ver-

Vergrößerung ihres Volumens großen Widerstand entgegen. Man sagt dafür auch, die Moleküle seien dicht gepackt (und spricht von einem mittleren Moleküldurchmesser in der Größenordnung von 10^{-10} m), nur darf diese Redeweise nicht zu der Vorstellung verleiten, der gesamte Raum in einem festen Körper sei dicht mit Materie angefüllt. In Wirklichkeit ist die Materie auf einen Bruchteil des Raumes konzentriert, nämlich im Wesentlichen auf die Atomkerne der das Molekül bildenden Atome; die Ausdehnung eines Atomkerns liegt in der Größenordnung von 10^{-15} bis 10^{-14} m. Die Moleküle können also um eine Mittellage schwingen und werden nur im zeitlichen Mittel durch die intermolekularen Kräfte der sie umgebenden Moleküle an ihrem Platz im Molekülverband gehalten.

In kristallinen Festkörpern bilden die Moleküle (genauer ihre mittleren Orte) ein räumlich geordnetes Kristallgitter, in amorphen Festkörpern sind sie unregelmäßig angeordnet; in beiden Fällen ändert sich die mittlere Lage der Moleküle relativ zueinander praktisch nicht. Es kann zwar vorkommen, dass ein Molekül sich einmal besonders weit aus seiner Ruhelage entfernt und dann in eine Leerstelle im Molekülverband übertritt oder mit einem anderen Molekül seinen Platz tauscht; das geschieht jedoch so selten, dass der Zusammenhalt des Molekülverbandes dadurch nie gefährdet wird.

In Flüssigkeiten sind die Moleküle wie in amorphen Festkörpern unregelmäßig angeordnet, die Schwingungsamplituden sind aber größer und die Platzwechsel häufiger. Die mittlere Lage der Moleküle zueinander ändert sich also laufend, man hat eine Flüssigkeit in dieser Hinsicht treffend mit einem Kasten voll Ameisen verglichen.

Schmelzen und Erstarren

Ganz allgemein steigt mit wachsender Temperatur die mittlere Geschwindigkeit und die mittlere Schwingungsamplitude der Moleküle (man kann zeigen, dass die Temperatur der mittleren kinetischen Energie der Moleküle proportional ist), man kann sich also gut vorstellen, wie amorphe Körper mit zunehmender Temperatur allmählich vom festen in den flüssigen Aggregatzustand übergehen. Bei Kristallen stellt die Gitterstruktur offenbar eine besonders stabile Anordnung dar, die sich beim Überschreiten einer bestimmten Temperatur schnell auflöst.

Bei einigen organischen Stoffen mit länglichen Molekülen bleiben die Moleküle auch nach dem Schmelzen zunächst teilweise in kleinen, lang gestreckten Verbänden geordnet. Man spricht dann von flüssigen Kristallen oder kristallinen Flüssigkeiten. Solche Substanzen haben zwei Schmelzpunkte: einen unteren Schmelzpunkt, bei dem der Stoff vom festen in diesen flüssig-kristallinen Zustand übergeht, und einen oberen Schmelzpunkt, oberhalb dessen sich der Stoff wie eine normale Flüssigkeit verhält.

Aufgabe 1

Wie unterscheidet sich der molekulare Aufbau von (kristallinen und amorphen) Festkörpern von dem von Flüssigkeiten?

Aufgabe 2

Wodurch unterscheiden sich amorphe Festkörper und Flüssigkeiten von kristallinen Festkörpern?

LE 1.2 Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase (Teil 2)

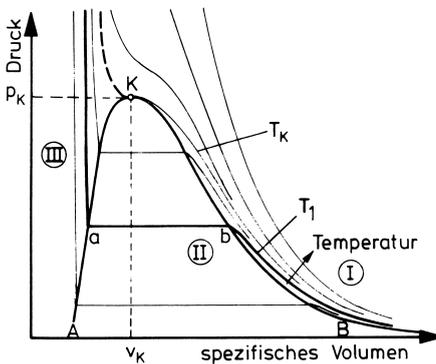
Gase

In einem Gas liegt der mittlere Abstand der Moleküle bei normalem Druck und normaler Temperatur etwa beim Zehnfachen des stabilen Abstands, die potentielle Energie der Anziehungskraft der benachbarten Moleküle ist gegenüber der kinetischen Energie ihrer Bewegung zu vernachlässigen. Die Moleküle fliegen also im Wesentlichen unbeeinflusst voneinander frei umher. Nur wenn sich dabei zwei Moleküle auf etwa den stabilen Abstand nahe kommen, treten sie in Wechselwirkung: Im Anziehungsbereich werden sie zunächst beschleunigt, geraten dann in den Abstoßungsbereich und werden dort so stark zurückgestoßen, dass sie insgesamt in guter Näherung einen elastischen Stoß wie zwei Billardkugeln ausführen. Im Normzustand, d. h. bei der Normtemperatur von $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ und dem Normdruck von $1\text{ atm} = 101325\text{ Pa} = 1,01325\text{ bar}$, ist die mittlere freie Weglänge in einem Gas, also der Weg, den ein Molekül im Mittel zwischen zwei solchen Zusammenstößen zurücklegt, von der Größenordnung 10^{-7} m ; sie beträgt damit etwa das Hundertfache des mittleren Abstandes der Moleküle.

Verdampfen und Kondensieren

An der Oberfläche einer Flüssigkeit kann ein Molekül bei seinen unregelmäßigen Schwankungen an eine Stelle kommen, wo seine Geschwindigkeit ausreicht, um es aus dem Kraftfeld der übrigen Moleküle zu befreien, so wie eine Rakete bei genügend hoher Geschwindigkeit das Schwerefeld der Erde verlassen kann. Ein solches Molekül verdampft, d. h. es geht vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand über. Ebenso können in der Nähe einer Flüssigkeitsoberfläche Gasmoleküle von der Flüssigkeit eingefangen werden wie Meteore von der Erde. In einem

geschlossenen, teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäß bildet sich so ein Gleichgewicht zwischen der Flüssigkeit und dem Gas darüber aus. Im Gleichgewicht hat das Gas oberhalb der Flüssigkeit einen bestimmten Druck, den man den Dampfdruck nennt; offenbar steigt der Dampfdruck mit wachsender Temperatur. Über einem offenen Gefäß kann sich kein Gleichgewicht einstellen: Die Flüssigkeit verdampft im Laufe der Zeit vollständig. Herrscht über einer Flüssigkeit der Dampfdruck, so können sich auch im Innern der Flüssigkeit Dampfblasen bilden: die Flüssigkeit siedet, und die Verdampfung verläuft sehr viel heftiger und schneller als bei höherem Außendruck. Tabelle 6 enthält als Beispiel den Dampfdruck von Wasser für einige charakteristische Temperaturen.



Die Bedingungen, unter denen ein Stoff in einem geschlossenen Behälter im flüssigen und im gasförmigen Zustand existieren kann, veranschaulicht man sich in einem Zustandsdiagramm. Darin sind eine Reihe von Isothermen (Kurven konstanter Temperatur) in ein Diagramm eingetragen, das den Druck über dem spezifischen Volumen¹ darstellt. Zu jedem Wertepaar von spezifischem Volumen und Druck gehört genau eine Temperatur. Als Gedankenexperiment stelle man sich eine geeignete Stoffmenge in

einem Gefäß vor, dessen Volumen sich durch Verschiebung eines Kolbens verändern lässt und das sich in einem Wärmebad befindet. Für eine bestimmte Temperatur des Wärmebads und ein bestimmtes Volumen stellt sich dann ein bestimmter Druck ein. Wir wollen die Änderung des Druckes und des Aggregatzustands beobachten, während wir das Volumen bei konstanter Temperatur verkleinern. Wir beginnen bei der relativ niedrigen Temperatur T_1 und bei einem so großen Volumen, dass das Medium vollständig gasförmig ist, also im Bereich I unseres Diagramms, und bewegen uns im Diagramm längs der Isothermen T_1 nach links. Der Druck steigt, bis wir den rechten Ast KB der kritischen Kurve AKB erreichen. Verringern wir das Volumen weiter, so kondensiert ein Teil des Gases zur Flüssigkeit; der Druck bleibt währenddessen konstant. Wenn wir den linken Ast AK der kritischen Kurve erreicht haben, ist alles Gas kondensiert, und das gesamte Volumen ist mit Flüssigkeit ausgefüllt. Bei weiterer Volumenverkleinerung steigt der Druck sehr steil an; die Kompressibilität eines Stoffes im flüssigen Zustand ist um mehrere Größenordnungen kleiner als im gasförmigen Zustand. Im Bereich I kann der Stoff nur als Gas existieren, im Bereich III nur als Flüssigkeit. Im Bereich II (Nassdampfgebiet) existieren der flüssige und der gasförmige Zustand als zwei Phasen nebeneinander; nur in diesem Bereich gibt es die für unser Bewusstsein mit dem Begriff der Flüssigkeit verbundene freie Oberfläche, welche die beiden Phasen trennt.

¹ Als spezifisches Volumen bezeichnet man den Quotienten aus Volumen und Masse eines Körpers oder einer Stoffmenge.

Das spezifische Volumen der flüssigen Phase entspricht längs des gesamten waagerechten Stücks einer Isothermen dem Wert im Schnittpunkt a mit dem linken Ast der kritischen Kurve, das spezifische Volumen der gasförmigen Phase entspricht währenddessen dem Wert im Schnittpunkt b mit dem rechten Ast der kritischen Kurve. Mit zunehmender Temperatur rücken die spezifischen Volumina beider Phasen (die Punkte a und b) immer mehr zusammen, für die kritische Temperatur T_k fallen sie zusammen, die beiden Äste der kritischen Kurve treffen sich im kritischen Punkt K , zu dem ein kritischer Druck p_K und ein kritisches spezifisches Volumen v_K gehört. Unterhalb des kritischen Drucks werden die drei Bereiche I , II und III im Zustandsdiagramm durch die kritische Kurve eindeutig getrennt. Eine physikalisch ebenso eindeutige Grenze zwischen den Bereichen I und III , d. h. zwischen gasförmiger und flüssiger Phase, existiert oberhalb des kritischen Drucks nicht. Man sagt häufig, dass oberhalb der kritischen Temperatur ein Gas nicht verflüssigt werden kann; damit wird der gestrichelt gezeichnete Ast der kritischen Isotherme als Grenzkurve zwischen den beiden Aggregatzuständen festgelegt.

Aufgabe 1

Stellen Sie die typischen Größenordnungen zusammen, die Sie in den ersten beiden Lehrinhalten kennen gelernt haben!

- A. Atomkernradius _____
- B. Moleküldurchmesser _____
- C. Abstand der Moleküle in einem festen Körper _____
- D. Abstand der Moleküle in einer Flüssigkeit _____
- E. Abstand der Moleküle in einem Gas _____
- F. mittlere freie Weglänge in einem Gas _____

Aufgabe 2

Siedet Wasser auf dem Gipfel eines Berges normalerweise

- A. bei höherer Temperatur,
- B. bei niedrigerer Temperatur,
- C. bei derselben Temperatur

wie im Tal? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 3

Wie kommt es, dass eine Schneedecke auch bei scharfem Frost allmählich dünner wird?

LE 1.3 Fluide

In den ersten beiden Lehreinheiten haben wir eine Klassifikation der in der Natur vorkommenden Körper in feste Körper, Flüssigkeiten und Gase vorgenommen. In dieser Lehreinheit wollen wir einen anderen Weg beschreiten und uns ein gedachtes Medium mit bestimmten einfachen (und gegenüber der Natur vereinfachten) Eigenschaften definieren: das Fluid. In der Physik ersetzt man häufig die in der Natur vorkommenden Stoffe durch solche Modellmedien. Das Fluid ist ein Modellmedium, mit dem man viele Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen zutreffend beschreiben kann.

Ein Fluid ist durch zwei Eigenschaften bestimmt:

- Es ist ein Kontinuum.
- Es kann in der Ruhe an der Oberfläche nur Druckkräfte, also weder Zugkräfte noch Scherkräfte (Kräfte tangential zur Oberfläche) aufnehmen.

(In der Literatur wird der Begriff Fluid abweichend von dieser Definition häufig als bloßer Sammelbegriff für Flüssigkeiten und Gase verwendet.) Was mit diesen beiden Eigenschaften gemeint ist und wie weit wirkliche Flüssigkeiten und Gase sich durch dieses Modell beschreiben lassen, wollen wir jetzt genauer betrachten.

Die Kontinuumshypothese

Ein Kontinuum lässt sich mit für unsere Zwecke ausreichender Präzision durch das folgende mathematische Modell erklären:

- Es besteht aus Teilchen, die wie die Punkte des Raumes keine Ausdehnung und keine Zwischenräume haben. Man kann deshalb jedem Teilchen X des Fluids (in einem bewegten Fluid: zu jedem Zeitpunkt t) einen Punkt \underline{x} des Raumes zuordnen:²

$$\underline{x} = \underline{x}(X, t). \quad (1.3-1)$$

Wir werden auf diese Art der Beschreibung eines Fluids im Kapitel 3 näher eingehen.

² Für „ y ist eine Funktion von x “ schreibt man häufig $y = f(x)$, d. h. man verwendet für die abhängige Variable y und für das Funktionssymbol f verschiedene Buchstaben. Wir verwenden im Allgemeinen beide Male denselben Buchstaben, schreiben also in diesem Falle $y = y(x)$. Dabei bedeutet das Funktionssymbol y dann nicht eine bestimmte, sondern eine beliebige Funktion; es kann bei mehrmaligem Auftreten auch verschiedene Funktionen bezeichnen, z. B. in $y = y(x(t)) = y(t)$.

- Die charakteristischen physikalischen Größen wie Dichte, Geschwindigkeit, Druck, Temperatur sind Eigenschaften der Teilchen und der Zeit. Wenn also ψ eine solche Größe ist, dann gilt unter Verwendung von (1.3-1)

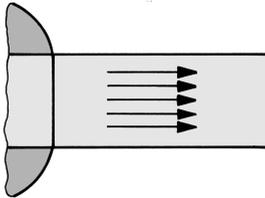
$$\psi = \psi(X, t) = \psi(X(\underline{x}, t), t) = \psi(\underline{x}, t),$$

die Größe ψ lässt sich also wie das Teilchen X als Funktion von Ort und Zeit darstellen:

$$\psi = \psi(\underline{x}, t). \quad (1.3-2)$$

Eine solche Größe nennt man eine Feldgröße.

- Im Allgemeinen ändern sich die Feldgrößen von Teilchen zu Teilchen und damit auch von Punkt zu Punkt stetig; die Funktionen (1.3-2) sind dann stetige Funktionen. Es soll aber auch zugelassen sein, dass Feldgrößen auf beiden Seiten einzelner Flächen verschiedene Werte annehmen; eine solche Fläche nennt man eine Diskontinuitätsfläche.



Das mathematische Modell einer Diskontinuitätsfläche benötigt man z. B. zur Beschreibung eines in die Atmosphäre austretenden Triebwerksstrahls: Im Triebwerksstrahl bewegt sich das Gas näherungsweise wie ein starrer Körper mit konstanter Geschwindigkeit, in der Umgebung des Triebwerksstrahls kann man die Luft bei stehendem Triebwerk in guter Näherung als ruhend annehmen. Den Mantel des Triebwerksstrahls kann man also als eine Diskontinuitätsfläche beschreiben: auf seiner Innenseite herrscht die Geschwindigkeit des Triebwerksstrahls, auf seiner Außenseite die Geschwindigkeit null. Da der Triebwerksstrahl in der Regel wärmer als die umgebende Luft sein wird, springt auch die Temperatur beim Durchgang durch die Mantelfläche, während z. B. der Druck – wie wir später sehen werden – beim Durchgang durch die Mantelfläche stetig bleibt. Es müssen sich an einer Diskontinuitätsfläche also nicht alle Feldgrößen unstetig ändern.

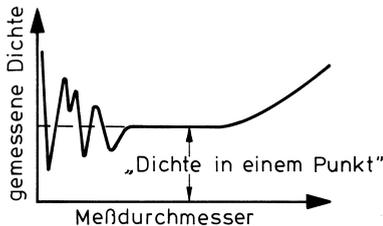
Ein anderes Beispiel für die Anwendung von Diskontinuitätsflächen sind die Verdichtungsstöße (Stoßfronten), die in Gasen häufig beim Übergang von Überschall- zu Unterschallströmung auftreten.

Ein anderes Beispiel für die Anwendung von Diskontinuitätsflächen sind die Verdichtungsstöße (Stoßfronten), die in Gasen häufig beim Übergang von Überschall- zu Unterschallströmung auftreten.

Die Grenzen der Kontinuumshypothese

Wie weit lassen sich nun die in der Natur vorkommenden Körper als Kontinuen beschreiben? Wir haben in den vorigen Lehreinheiten gesehen, dass die Materie aus Molekülen besteht, die sich aufgrund intermolekularer Kräfte nur bis auf einen bestimmten Abstand nähern können. Die Masse der Moleküle ist im Wesentlichen in den Atomkernen konzentriert, also keineswegs gleichmäßig über den Raum verteilt. Auch die Geschwindigkeit ist von Molekül zu Molekül ganz verschieden, ist also diskontinuierlich verteilt.

Um irgendeine Größe zu messen, benötigen wir ein Messgerät. Ein Messgerät misst seine Messgröße jedoch nicht genau in einem Punkt, sondern mittelt ihre räumliche Verteilung über ein bestimmtes Messvolumen. Einen charakteristischen Durchmesser dieses Messvolumens nennen wir den Messdurchmesser des Messgeräts. Der Messwert, den ein Messgerät an einem Ort aufnimmt, hängt offenbar von seinem Messdurchmesser ab. Stellen wir uns etwa ein Dichtemessgerät in einer Strömung vor, so wird seine Anzeige in Abhängigkeit von seinem Messdurchmesser den nebenstehend skizzierten Verlauf haben: Im Bereich



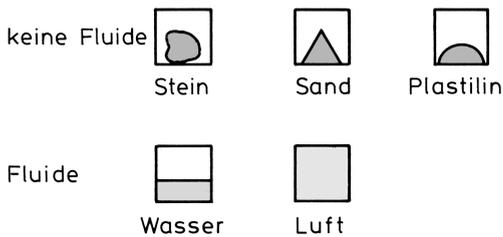
molekularer Dimensionen zeigt das Messgerät erhebliche Änderungen der Dichte als Folge der ungleichmäßigen Massenverteilung. Bereits bei einem Messdurchmesser von 10^{-7} m, also einem Messvolumen von 10^{-21} m³, mittelt das Messgerät bei Luft unter Normalbedingungen über etwa $3 \cdot 10^4$ Moleküle, die molekulare Struktur macht sich also nicht mehr bemerkbar. Dichteunterschiede aufgrund äußerer Einflüsse, et-

wa aufgrund des Schwerefeldes oder eines Temperaturfeldes, werden sich unter Laborbedingungen vielleicht bei einem Messdurchmesser von 10^{-3} m bemerkbar machen. In unserem Beispiel existiert also ein Bereich von 4 Größenordnungen, über den die Dichte unabhängig vom Messdurchmesser eines Messgeräts ist. Dieser Bereich trennt die Änderungen der Feldgrößen im Kleinen aufgrund der molekularen Struktur der Materie (man sagt dafür auch: die mikroskopischen Änderungen) von den Änderungen der Feldgrößen im Großen aufgrund der äußeren Einwirkungen, die man untersuchen möchte (die makroskopischen Änderungen). Immer wenn ein solcher Bereich existiert, kann man das Medium durch das Modell eines Kontinuums beschreiben. In diesem Modell werden die mikroskopischen Änderungen nicht berücksichtigt, d. h. es wird angenommen, dass der bei mittlerem Messdurchmesser erreichte Wert der Feldgröße auch gilt, wenn der

Messdurchmesser gegen null geht: Man spricht in diesem Sinne z. B. von der Dichte eines Teilchens des Kontinuums oder von der Dichte in einem Punkt des Kontinuums.

Damit sind gleichzeitig die Grenzen für die Gültigkeit des Kontinuumsmodells abgesteckt. Wenn man ein Gas z. B. so weit verdünnt, dass die mittlere freie Weglänge der Moleküle nicht mehr klein gegen die Abmessungen eines Flugkörpers ist, kann man das Gas nicht mehr als Fluid im Sinne obiger Definition behandeln. Das ist z. B. bei Raumflugkörpern am äußeren Rand der Atmosphäre der Fall. Oder ein anderes Beispiel: Die Dicke eines Verdichtungsstoßes ist von der Größenordnung von 10^{-6} m. Interessiert man sich nur für die Strömung auf beiden Seiten des Verdichtungsstoßes, kann man den Verdichtungsstoß als Diskontinuitätsfläche und das strömende Medium als Kontinuum ansehen. Will man die Vorgänge im Verdichtungsstoß selbst untersuchen, versagt das Kontinuumsmodell, weil sich die Vorgänge in der Größenordnung von wenigen freien Weglängen abspielen.

Die Schubspannungsfreiheit in der Ruhe



Ein Fluid kann definitionsgemäß in der Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen: Auch sehr kleine Schubspannungen sollen also zu einer Formänderung (Bewegung) führen, welche die Schubspannungen abbaut. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass ein ruhendes Fluid unter dem Einfluss der Schwerkraft

den waagerechten Boden eines Gefäßes stets vollständig bedeckt: Offenbar zeigen alle Flüssigkeiten in größeren Mengen und alle Gase diese Eigenschaft. Ein Wassertropfen breitet sich jedoch in einem trockenen Gefäß nicht über den ganzen Boden aus. Man kann sich diese Erscheinung erklären, wenn man annimmt, dass in der Oberfläche des Wassertropfens eine Schubspannung wirkt. Diese Eigenschaft von Flüssigkeiten werden wir in den Lehreinheiten 1.9 und 1.10 näher behandeln.

Aufgabe 1

Durch welche Eigenschaften ist das physikalische Modellmedium Fluid bestimmt?

- | | ja | nein |
|---|--------------------------|--------------------------|
| A. Es besteht aus Teilchen, denen man zu jedem Zeitpunkt einen Punkt des Raumes zuordnen kann. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| B. Die charakteristischen physikalischen Größen sind Eigenschaften der Teilchen und der Zeit. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C. Die charakteristischen physikalischen Größen ändern sich bis auf etwaige Diskontinuitätsflächen von Punkt zu Punkt stetig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D. Es kann in der Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2

Ist eine Diskontinuitätsfläche dadurch definiert, dass

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------|
| A. alle Feldgrößen, | <input type="checkbox"/> |
| B. mindestens eine Feldgröße oder | <input type="checkbox"/> |
| C. nur eine Feldgröße | <input type="checkbox"/> |

auf beiden Seiten dieser Fläche verschiedene Werte annimmt?

Aufgabe 3

Warum bedeckt ein ruhendes Fluid unter dem Einfluss der Schwerkraft stets den ganzen Boden eines Gefäßes?

LE 1.4 Extensive und intensive Größen

Die Kontinuumshypothese hat zur Folge, dass wir zur mathematischen Beschreibung der Fluide die Infinitesimalrechnung verwenden können. Mit ihrer Hilfe lassen sich aus geeigneten physikalischen Größen andere, für Kontinuen typische, Größen definieren. Wir wollen das an den Beispielen der Masse einer Fluidmenge und der auf die Fluidmenge wirkenden Kraft erläutern und zugleich die grundlegende Einteilung der physikalischen Größen in extensive und intensive Größen darlegen.

Kontinuumshypothese und Infinitesimalrechnung

Wir betrachten ein abgegrenztes Volumen ΔV in einem Fluid, dessen Größe gerade in dem Bereich liegt, wo sich die mikroskopischen Änderungen nicht mehr und die makroskopischen Änderungen noch nicht bemerkbar machen; wenn im Folgenden von einem kleinen Volumen die Rede ist, meinen wir immer ein Volumen dieser Größenordnung. Das in dem Volumen ΔV enthaltene Fluid habe die Masse Δm , dann definiert man die Dichte in diesem Volumen durch

$$\rho := \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (1.4-1)$$

Solange wir in diesem Bereich bleiben, wo sich die mikroskopischen Änderungen nicht mehr und die makroskopischen Änderungen noch nicht bemerkbar machen, ist der Wert der auf diese Weise definierten Dichte unabhängig davon, ob das gewählte Volumen die Form einer Kugel oder eines Würfels oder eine ganz unregelmäßige Form hat, und er ändert sich auch nicht, wenn wir das Volumen verdoppeln oder halbieren: Er ist unabhängig von der Form und Größe des kleinen Volumens. Im Sinne der Kontinuumshypothese können wir statt (1.4-1) auch

$$\rho := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.4-2)$$

schreiben. Damit können wir zur Beschreibung eines Fluids die Infinitesimalrechnung verwenden, wir können also

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (1.4-3)$$

und insbesondere

$$dm = \rho dV, \quad m = \int \rho dV \quad (1.4-4)$$

schreiben. Wir nennen dann dV ein Volumenelement und dm ein Massenelement und rechnen mit diesen Elementen wie mit den Differentialen der Infinitesimalrechnung; physikalisch dürfen wir uns unter einem Volumenelement dV aber nichts anderes, insbesondere nichts Kleineres als unter einem kleinen Volumen ΔV vorstellen.

Dichte und spezifisches Volumen

Neben der durch (1.4-2) definierten Dichte verwendet man häufig das spezifische Volumen

$$\boxed{v = \frac{1}{\rho}} \quad (1.4-5)$$

Infolge der Kontinuumshypothese sind beide Größen (höchstens bis auf Diskontinuitätsflächen) stetige Funktionen von Ort und Zeit, also Feldgrößen,

$$\rho = \rho(\underline{x}, t), \quad v = v(\underline{x}, t), \quad (1.4-6)$$

und zwischen einem endlichen Volumen V und der Masse m des darin enthaltenen Fluids gelten die Beziehungen

$$\boxed{m = \int \rho \, dV}, \quad \boxed{V = \int v \, dm}. \quad (1.4-7)$$

Volumenkräfte und Oberflächenkräfte

Die Kräfte, die an den Teilchen eines Fluids angreifen, können physikalisch sehr verschiedene Ursachen haben. Vom Standpunkt der Kontinuumstheorie lassen sie sich jedoch alle in zwei Gruppen einteilen: die einen greifen an *allen* Teilchen einer Fluidmenge an, die anderen nur an den Teilchen *an der Oberfläche* der Fluidmenge. Man fasst die einen als Volumenkraft \underline{F}_V und die anderen als Oberflächenkraft \underline{F}_O zusammen; die gesamte Kraft \underline{F} auf eine beliebige Fluidmenge ist dann offenbar die Summe dieser beiden Anteile:

$$\boxed{\underline{F} = \underline{F}_V + \underline{F}_O}. \quad (1.4-8)$$

Für die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, gilt das Wechselwirkungsgesetz (auch 3. Newtonsches Axiom oder Prinzip „*actio = reactio*“ genannt):

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte (Wirkung und Gegenwirkung) haben gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung.

Wenn wir die Kraft zwischen einer Fluidmenge und ihrer Umgebung durch einen Symbolbuchstaben bezeichnen, müssen wir deshalb festlegen, welche dieser beiden Kräfte wir meinen. Wir vereinbaren:

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, bezeichnet \underline{F} immer die von außen auf die betrachtete Fluidmenge wirkende Kraft.

Ihrer physikalischen Ursache nach gehören zu den Volumenkräften zunächst die Anziehungskraft zwischen zwei Massen (Gravitationskraft) und die Anziehungs- und Abstoßungskräfte zwischen elektrischen Ladungen und elektrischen Strömen oder Magnetpolen. Sie alle nehmen mit der Entfernung nur relativ schwach ab (abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Körper mit dem Quadrat ihres Abstands), man nennt sie deshalb Fernwirkungskräfte. Über die Abmessungen der betrachteten Fluidmengen ändern sie sich im Rahmen der Messgenauigkeit oft gar nicht (Schwerkraft). Zu den Volumenkräften gehören aber auch die Zusatzkräfte (Scheinkräfte) wie die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft, die in beschleunigten Bezugssystemen zusätzlich auftreten. Oberflächenkräfte sind zunächst die intermolekularen Anziehungskräfte. Sie nehmen mit der Entfernung so stark ab (abgesehen von einem Nahbereich mit der siebten bis achten Potenz des Abstands), dass sie praktisch nur auf die unmittelbar benachbarten Moleküle wirken; man nennt sie deshalb Nahwirkungskräfte. Von außen wirken sie also nur auf die Teilchen an der Oberfläche, und im Inneren heben sie sich nach dem Wechselwirkungsgesetz auf. Zu den Oberflächenkräften gehören aber auch die Druckkräfte, die Gase und Flüssigkeiten auf Behälterwände ausüben. Die Druckkräfte in Gasen entstehen durch die Impulsänderungen von Molekülen, die beim „Auf-treffen“ auf eine Wand in den Abstoßungsbereich der intermolekularen Kräfte der Wandmoleküle geraten und dabei wie bei einem elastischen Stoß zurückgestoßen werden. Die hydrostatische Druckkraft auf den Boden eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Behälters rührt vom Gewicht der auf den Boden lastenden Flüssigkeit her.

Kraftdichte und Spannungsvektor

Auf ein Volumenelement dV mit der Masse dm wirke die Volumenkraft $d\underline{F}_V$, dann definieren wir die (Massen-)Kraftdichte³ oder spezifische Volumenkraft \underline{f} durch

$$\underline{f} := \frac{d\underline{F}_V}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{d\underline{F}_V}{dV}, \quad (1.4-9)$$

wobei wir bei der letzten Gleichung (1.4-4) ausgenutzt haben.

³ Andere Autoren führen statt \underline{f} die (Volumen-)Kraftdichte $\underline{k} = \rho \underline{f}$ ein.

Auf ein Flächenelement dA wirke die Oberflächenkraft $d\underline{F}_O$, dann definieren wir den Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ durch

$$\underline{\sigma} := \frac{d\underline{F}_O}{dA}. \quad (1.4-10)$$

Nach der Kontinuumshypothese sind Kraftdichte und Spannungsvektor wieder (höchstens bis auf Diskontinuitätsflächen) stetige Funktionen von Ort und Zeit. Der Spannungsvektor hängt jedoch außerdem noch vom Normalenvektor⁴ \underline{n} des Flächenelements ab, auf das er wirkt:

$$\underline{f} = \underline{f}(\underline{x}, t), \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{x}, t, \underline{n}). \quad (1.4-11)$$

Für ein beliebiges endliches Volumen in einem Kontinuum erhalten wir aus (1.4-9) und (1.4-10) durch Integration $\underline{F}_V = \int \underline{f} dm$, $\underline{F}_O = \oint \underline{\sigma} dA$; für die gesamte Kraft auf das Volumen ergibt sich damit nach (1.4-8)

$$\underline{F} = \underbrace{\int \rho \underline{f} dV}_{\underline{F}_V} + \underbrace{\oint \underline{\sigma} dA}_{\underline{F}_O}. \quad (1.4-12)$$

Extensive und intensive Größen

Wenn wir die bisherigen Überlegungen dieser Lehrinheit überblicken, können wir zwischen zwei verschiedenen Arten von physikalischen Größen unterscheiden: Es gibt einerseits Größen wie die Dichte, das spezifische Volumen, die Kraftdichte und den Spannungsvektor, die für jeden Punkt des Raums definiert sind, und es gibt andererseits Größen wie das Volumen, die Fläche (offene Fläche oder Oberfläche), die Masse, die Volumenkraft, die Oberflächenkraft und die (Gesamt-) Kraft, die nur für einen räumlichen Bereich, d. h. ein Volumen, eine Fläche oder (was hier nicht vorgekommen ist) eine Kurve definiert sind. Größen, die für jeden Punkt definiert und deshalb mathematische Funktionen des Ortes sind, nennen wir intensive Größen (manchmal spricht man auch von Qualitätsgrößen); Größen, die für einen räumlichen Bereich definiert sind und die deshalb nicht Funktionen des Ortes sind, nennen wir extensive Größen (Quantitätsgrößen). Dass extensive

⁴ Zum Begriff des Normalenvektors vgl. Abschnitt 1.11 des Anhangs „Zum Rechnen mit Tensoren“.

Größen keine Funktionen des Ortes sind, erkennt man auch daran, dass sie mit intensiven Größen über Bereichsintegrale (Volumen-, Flächen- oder Kurvenintegrale) zusammenhängen, vgl. (1.4-7) und (1.4-12), und solche Bereichsintegrale sind ja bestimmte Integrale über die Ortskoordinaten.

Intensive Größen wie die Dichte lassen sich nur in Kontinuen als stetige Funktionen definieren, sie sind sogar die für Kontinuen typischen Größen. Meistens hängen sie außer vom Ort nur von der Zeit ab, in diesem Falle nennen wir sie auch Feldgrößen; dann kann man sie, vgl. Lehreinheit 1.3, als Eigenschaften der kontinuierlich verteilten Teilchen interpretieren. (Diese begriffliche Unterscheidung von intensiven Größen und Feldgrößen erscheint uns nützlich; sie ist allerdings unüblich.)

Extensive Größen wie die Kraft sind sowohl für Kontinuen wie für diskontinuierliche Systeme (z. B. Massenpunkte, Systeme von Massenpunkten) sinnvoll. Aus der Definition von extensiven Größen als Bereichsintegrale folgt die folgende wichtige Eigenschaft: Teilt man einen Bereich in mehrere Teilbereiche, so ist die extensive Größe für den Gesamtbereich gleich der Summe der extensiven Größen für die Teilbereiche. Man sagt dafür, extensive Größen seien additiv. Extensive Größen sind häufig anschaulicher als Feldgrößen: Masse und Volumen sind anschaulicher als die Dichte.

Intensive wie extensive Größen können Skalare (Dichte, spezifisches Volumen; Masse) oder Vektoren (Kraftdichte, Spannungsvektor; Kraft) oder Tensoren höherer Stufe (Beispiele später) sein.

Aufgabe 1

Wie sind extensive und intensive Größen in Kontinuen miteinander verknüpft?

- A. Extensive Größen sind Bereichsintegrale von intensiven Größen.
- B. Intensive Größen lassen sich als Dichtegrößen schreiben, d. h. als (Differential-)Quotient einer extensiven Größe und eines Volumens, einer Fläche oder einer Strecke, vgl. (1.4-3) oder (1.4-10).

Aufgabe 2

Wie ist die Oberflächenkraft F_O definiert?

- A. Als Kraft aus der betrachteten Fluidmenge auf ihre Umgebung.
- B. Als Kraft aus der Umgebung auf die betrachtete Fluidmenge.

Aufgabe 3

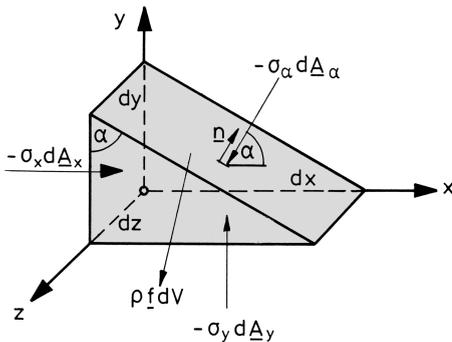
In welcher Beziehung stehen der Normalenvektor eines Flächenelements und der Spannungsvektor, der an dem Flächenelement angreift, in einem ruhenden Fluid?

- A. Beide sind parallel.
- B. Beide stehen aufeinander senkrecht.
- C. Beide können beliebige Winkel einschließen.

LE 1.5 Der Druck

Durch Betrachtung des Kräftegleichgewichts wird gezeigt, dass der Spannungszustand in einem ruhenden Fluid durch eine einzige skalare Feldgröße, den Druck, beschrieben werden kann.

Ein Fluid hat definitionsgemäß u. a. die Eigenschaft, dass es in der Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen kann. Das bedeutet, dass die Kraft auf eine beliebige Schnittfläche in einem ruhenden Fluid immer senkrecht auf dieser Fläche steht. Durch Betrachtung des Kräftegleichgewichts an einem infinitesimalen Prisma lässt sich dann zeigen, dass der Betrag des Spannungsvektors unabhängig von der Orientierung der Fläche ist, an der er angreift.



Wir betrachten ein Volumenelement eines ruhenden Fluids in Form des skizzierten dreieckigen Prismas und wollen die Gleichgewichtsbedingung für die x -Komponenten aller daran angreifenden Kräfte aufstellen. Von den Oberflächenkräften haben nur die Kräfte auf die Fläche in der y, z -Ebene und auf die schräge Fläche eine x -Komponente; dazu kommt dann die x -Komponente der Volumenkraft.⁵

Wir beginnen mit dem Beitrag der Prismenfläche in der y, z -Ebene und bezeichnen die daran angreifende Oberflächenkraft mit dF_{Ox} , den daran angreifen-

⁵ Für die folgenden Ableitungen werden die in Abschnitt 1.11 des Anhangs dargestellten Zusammenhänge benötigt.

den Spannungsvektor mit $\underline{\sigma}_x$, seinen Betrag mit σ_x , den Flächenvektor dieser Fläche mit $d\underline{A}_x$, seinen Betrag mit dA_x , dann gilt nach (1.4-10) $d\underline{F}_{Ox} = \underline{\sigma}_x dA_x$.

Nach unserer Konvention sind die Oberflächenkräfte die von außen an dem Prisma angreifenden Kräfte; weil in der Oberfläche Druck- und nicht Zugkräfte wirken, sind Oberflächenkraft und Spannungsvektor also nach innen gerichtet. Der Flächenvektor ist dagegen definitionsgemäß nach außen gerichtet, Oberflächenkraft und Flächenvektor sind demnach antiparallel, es gilt also auch

$$d\underline{F}_{Ox} = -\sigma_x d\underline{A}_x.$$

Der Betrag des Flächenvektors ist offenbar $dy dz$, seine Richtung $-\underline{e}_x$, wir erhalten also schließlich

$$d\underline{F}_{Ox} = \sigma_x dy dz \underline{e}_x.$$

Wir berechnen nun den Beitrag der schrägen Fläche. Wir nennen die daran angreifende Oberflächenkraft $d\underline{F}_{O\alpha}$, den daran angreifenden Spannungsvektor $\underline{\sigma}_\alpha$, seinen Betrag σ_α , den zugehörigen Flächenvektor $d\underline{A}_\alpha$, seinen Betrag dA_α und seinen Normalenvektor \underline{n} , dann gilt entsprechend

$$d\underline{F}_{O\alpha} = \underline{\sigma}_\alpha dA_\alpha = -\sigma_\alpha d\underline{A}_\alpha = -\sigma_\alpha \frac{dy}{\cos \alpha} dz \underline{n} \quad \text{mit} \quad \underline{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0).$$

Für die Volumenkraft $d\underline{F}_V$ schließlich erhalten wir nach (1.4-9)

$$d\underline{F}_V = \rho \underline{f} dV = \rho \underline{f} \frac{1}{2} dx dy dz \quad \text{mit} \quad \underline{f} = (f_x, f_y, f_z).$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die x-Komponenten dieser drei Kräfte lautet dann

$$\sigma_x dy dz - \sigma_\alpha dy dz + \rho f_x \frac{1}{2} dx dy dz = 0.$$

Für ein infinitesimales Volumen sind offenbar die Oberflächenkräfte von zweiter Ordnung klein und die Volumenkraft von dritter Ordnung klein, man kann also die Volumenkräfte gegenüber den Oberflächenkräften vernachlässigen und erhält $\sigma_x = \sigma_\alpha$.

Der Betrag σ_α des Spannungsvektors, der an einer unter dem beliebigen Winkel α geneigten Fläche angreift, ist also unabhängig von α gleich σ_x . Man kann zeigen, dass er auch gleich σ_y und σ_z ist, wobei σ_z der Betrag des Spannungsvektors auf ein Flächenelement senkrecht zur z-Richtung ist, vgl. Aufgabe 1 und die Zusatzaufgabe.

Der Betrag des Spannungsvektors in einem Punkt ist damit unabhängig von der Orientierung des Flächenelements, auf das er wirkt. Der Spannungszustand in einem Punkt eines ruhenden Fluids kann deshalb durch eine einzige skalare Feldgröße, den örtlichen Druck p , beschrieben werden, den man zu

$$p = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_\alpha \quad (1.5-1)$$

definiert. Dann gilt für den Spannungsvektor wegen $d\underline{F}_O = \underline{\sigma}dA = -\sigma d\underline{A} = -pd\underline{A} = -p\underline{n}dA$

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n}. \quad (1.5-2)$$

Setzt man das in (1.4-12) ein, so erhält man als Spezialfall für ein ruhendes Fluid

$$\underline{F} = \int \rho \underline{f} dV - \oint p \underline{n} dA,$$

und unter Einführung des vektoriellen Flächenelements $d\underline{A}$ nach (A 40)⁶ ergibt sich für die Kraft auf ein endliches Volumen in einem ruhenden Fluid

$$\underline{F} = \int \rho \underline{f} dV - \oint p d\underline{A}. \quad (1.5-3)$$

Der Druck hat wie der Spannungsvektor die Dimension Kraft durch Fläche, im internationalen Einheitensystem werden beide Größen also in Newton durch Quadratmeter (N/m^2) oder Pascal (Pa) gemessen:⁷

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{m s}^2). \quad (1.5-4)$$

Zur Orientierung über die Größenordnungen dieser Einheiten merke man sich, dass der atmosphärische Luftdruck etwa 10^5 Pa beträgt und meist in Hektopascal (hPa) angegeben wird: $10^5 \text{ Pa} = 10^3 \text{ hPa}$. In der Literatur werden daneben viele andere Druckeinheiten verwendet, die wichtigsten sind in Tabelle 8 aufgeführt.

⁶ Die Gleichungsnummern mit A beziehen sich auf den mathematischen Anhang.

⁷ Wo bei der Beschreibung von Dimensionen oder von Einheiten wie in (1.5-4) mehrere Größen rechts (oder links) von einem schrägen Bruchstrich vorkommen, stehen sie alle im Nenner (bzw. im Zähler), ohne dass Klammern gesetzt werden.

Aufgabe 1

Leiten Sie aus dem Kräftegleichgewicht in y -Richtung an demselben infinitesimalen Prisma her, dass $\sigma_x = \sigma_y$ und damit auch $\sigma_x = \sigma_y$ ist!

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind in einem ruhenden Fluid richtig?

- A. Der Druck steht senkrecht auf dem Flächenelement, an dem er angreift.
- B. Der Spannungsvektor steht senkrecht auf dem Flächenelement, an dem er angreift.

Zusatzaufgabe

An welchem infinitesimalen Prisma könnte man zeigen, dass $\sigma_y = \sigma_z$ ist?

LE 1.6 Die thermische Zustandsgleichung

Die Dichte in einem Fluid lässt sich nicht nur als Funktion von Ort und Zeit, sondern auch als Funktion anderer Feldgrößen darstellen, in den meisten Fällen als Funktion des Druckes und der Temperatur. In dieser Lehreinheit wollen wir drei praktisch wichtige Modelle für diesen Zusammenhang einführen.

Die Dichte ρ und damit natürlich auch das spezifische Volumen v sind nicht nur von Stoff zu Stoff verschieden (vgl. Tabelle 1), sondern für ein und denselben Stoff auch noch von der Temperatur T und vom Druck p abhängig (vgl. Tabelle 2):

$$\rho = \rho(T, p) \quad \text{bzw.} \quad v = v(T, p). \quad (1.6-1)$$

Die Gleichung, die diese Abhängigkeit beschreibt, nennt man die thermische Zustandsgleichung des betreffenden Stoffes. Leider ist die thermische Zustandsgleichung für keinen Stoff für alle Temperaturen und Drücke bekannt. Für praktische Zwecke kommt man im Allgemeinen mit einer der drei folgenden Idealisierungen (Modellmedien) aus:

Ideale Gase

Für viele Gase gilt im technisch interessanten Bereich von Temperatur und Druck mit hinreichender Genauigkeit die thermische Zustandsgleichung

$$\boxed{\frac{p}{\rho} = RT}, \quad \boxed{p\nu = RT}, \quad (1.6-2)$$

wobei R eine Materialkonstante (d. h. eine von Stoff zu Stoff verschiedene Konstante) ist, die man spezifische oder spezielle Gaskonstante nennt; ihre Einheit im internationalen Einheitensystem ist Joule durch Kilogramm und Kelvin (J/kg K). Sie hängt mit der molaren Masse M des Stoffes (internationale Einheit:⁸ kg/mol) und der molaren oder allgemeine Gaskonstante, die unabhängig vom Stoff den Wert

$$R_m = 8,314 \text{ J}/(\text{mol K}) \quad (1.6-3)$$

hat, über die Gleichung

$$R_m = MR \quad (1.6-4)$$

zusammen. Ein Gas, das der thermischen Zustandsgleichung (1.6-2) genügt, nennt man ein (thermisch) ideales Gas.

Flüssigkeiten

Um für Flüssigkeiten (übrigens auch für feste Körper) wenigstens in engen Bereichen von Temperatur und Druck zu einer thermischen Zustandsgleichung zu kommen, definiert man mit Hilfe der beiden partiellen Ableitungen von (1.6-1) zwei neue Größen α_V und χ :

$$\alpha_V := \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p, \quad \chi := -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial p} \right)_T. \quad (1.6-5)$$

Man nennt α_V den Volumen-Ausdehnungskoeffizienten und χ die Kompressibilität. Nach ihrer Definition sind beide ebenfalls Funktionen von T und p . Der Volumen-Ausdehnungskoeffizient hat die Dimension Eins durch Temperatur; seine Einheit im internationalen Einheitensystem ist also Eins durch Kelvin (1/K). Die

⁸ Die in Gramm durch Mol gemessene molare Masse nannte man früher Molekulargewicht.

Kompressibilität hat entsprechend die Dimension Eins durch Druck; ihre Einheit im internationalen Einheitensystem ist demnach Eins durch Pascal (1/Pa).

Man kann sich die thermische Zustandsgleichung eines Stoffes als eine Fläche über einer T, p -Ebene veranschaulichen. Wenn man nur voraussetzt, dass diese Fläche eine Tangentialebene hat, was physikalisch plausibel ist, kann man diese Fläche in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes durch die Tangentialebene ersetzen. Hat man also für ein Wertepaar T_0 und p_0 die zugehörigen Werte α_{V0} und χ_0 gemessen, so gilt in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes die thermische Zustandsgleichung

$$v - v_0 = \alpha_{V0} v_0 (T - T_0) - \chi_0 v_0 (p - p_0). \quad (1.6-6)$$

Inkompressible Fluide

In vielen Fällen genügt sogar der noch einfachere Ansatz, ρ als Materialkonstante, also als unabhängig von Temperatur und Druck anzunehmen:

$$\rho = \text{const}, \quad v = \text{const}. \quad (1.6-7)$$

Dieses Modellmedium nennt man ein inkompressibles Fluid. Mit diesem Ansatz kann man bei Flüssigkeiten fast immer rechnen (bei Wasser ändert sich die Dichte bei einer Druckänderung von Atmosphärendruck auf das 10^3 -fache nur um 4%), aber auch bei Gasen, wenn keine großen Geschwindigkeitsdifferenzen in der Strömung auftreten, (bei 20°C und Atmosphärendruck entspricht in Luft eine Geschwindigkeitsdifferenz von 0 auf 50 m/s einer relativen Dichteänderung von 1%).

Aufgabe 1

Was versteht man unter einem idealen Gas?

- A. Es gilt $v = v(p, T)$.
- B. Es gilt $p v = RT$.

Aufgabe 2

Welche Gleichung haben wir als thermische Zustandsgleichung für Flüssigkeiten verwendet?

- A. $v = \text{const}$,
- B. $v - v_0 = \alpha_{V0} v_0 (T - T_0) - \chi_0 v_0 (p - p_0)$.

Aufgabe 3

Kann man Luft unter bestimmten Bedingungen als inkompressibles Fluid behandeln?

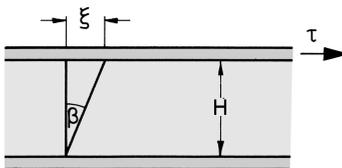
- A. Nein, bei Luft muss man die Kompressibilität stets berücksichtigen.
- B. Ja, wenn nur geringe Geschwindigkeitsdifferenzen auftreten.

LE 1.7 Die Zähigkeit

Die Zähigkeit ist eine charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten und Gase. Wir wollen uns in dieser Lehreinheit zunächst die Erscheinung der Zähigkeit klarmachen; dazu vergleichen wir das unterschiedliche Verhalten eines typischen festen Körpers und eines Fluids gegenüber einer Scherung. Anschließend wollen wir die physikalischen Ursachen der Zähigkeit kennen lernen.

Elastizität und Zähigkeit

Materie setzt der Verschiebung ihrer Moleküle gegeneinander einen Widerstand entgegen. Die einfachste Konfiguration zur Untersuchung dieser Eigenschaft ist die einfache Scherung: Man bringt die Materialprobe zwischen zwei parallele Platten und verschiebt z. B. die obere in sich selbst gegen die untere. Diese Verschiebung überträgt sich auf die Materialprobe, und deren Widerstand gegen die Scherung lässt sich als Schubspannung in den Platten messen.



Es gibt stets einen spannungsfreien Zustand, in dem das Medium in Ruhe und die Schubspannung null ist. Bei festen Körpern hängt die Schubspannung τ in vielen Fällen nur vom Verhältnis der Verschiebung ξ aus dem spannungsfreien Zustand zum Plattenabstand H ab. Für kleine Verschiebungen ($\xi \ll H$) können wir dieses Verhältnis mit dem

Scherwinkel β identifizieren; β ist der Winkel, um den eine materielle Linie senkrecht zur Richtung der Scherung aus dem spannungsfreien Zustand durch die Scherung gedreht wird:

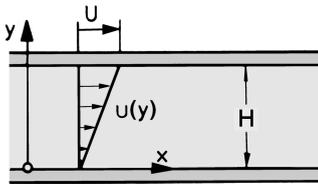
$$\tau = f\left(\frac{\xi}{H}\right) = f(\beta). \quad (1.7-1)$$

Solche Medien nennt man elastisch: Macht man die Verschiebung rückgängig, so kehrt das Medium in seine Ausgangslage zurück, und die Schubspannung

verschwindet wieder. Im einfachsten Fall ist die Schubspannung zum (kleinen) Scherwinkel proportional:

$$\tau = G\beta = G \frac{\xi}{H}. \quad (1.7-2)$$

Solche Medien nennt man linear-elastisch oder in der Terminologie der modernen Rheologie Hooke-Medien. Die Proportionalitätskonstante G heißt Schubmodul; sie ist von Stoff zu Stoff verschieden, d. h. eine Materialkonstante.



Bei Fluiden kann eine einmalige Verschiebung der einen Platte nicht zu einer Schubspannung führen: Sobald die Fluidteilchen ihre neue Lage eingenommen haben, ist das Fluid wieder in Ruhe und kann definitionsgemäß keine Schubspannung mehr übertragen. In einem Fluid kann eine Schubspannung also nur auftreten, solange sich die eine Platte bewegt und damit zwischen den Platten eine Scherströmung aufrechterhält.

In vielen Fällen hängt die Schubspannung nur vom Verhältnis der Plattengeschwindigkeit U zum Plattenabstand H ab; wegen $U = d\xi/dt$, $d\xi = Hd\beta$ ist dieses Verhältnis gleich der zeitlichen Änderung des Scherwinkels, der so genannten Schergeschwindigkeit $\dot{\beta} = U/H$:

$$\tau = f\left(\frac{U}{H}\right) = f(\dot{\beta}). \quad (1.7-3)$$

Solche Medien nennt man viskos oder zäh. Im einfachsten Fall ist die Schubspannung proportional der Schergeschwindigkeit, man führt dann im Allgemeinen die Querkoordinate y und die Geschwindigkeit $u(y)$ zwischen den Platten ein und schreibt

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}. \quad (1.7-4)$$

Solche Medien nennt man linear-viskos oder Newton-Medien; wir werden sie, dem in der Strömungslehre üblichen Sprachgebrauch folgend, newtonsche Fluide nennen. Die Gleichung (1.7-4) nennt man auch den Newtonschen Schubspannungsansatz. Die Proportionalitätskonstante η heißt Viskosität oder Zähigkeit; zur Unterscheidung von der häufig verwendeten Größe

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (1.7-5)$$

die man kinematische Zähigkeit nennt, heißt η auch dynamische oder absolute Zähigkeit. Auch der Ausdruck Scherviskosität ist gebräuchlich. η ist zunächst von Stoff zu Stoff verschieden, darüber hinaus aber auch eine Funktion der Temperatur. Genau genommen hängt η sogar noch vom Druck ab, die Druckabhängigkeit kann aber fast immer vernachlässigt werden.

Aus der Definitionsgleichung (1.7-4) für die Zähigkeit ergibt sich, dass η die Dimension Druck mal Zeit hat. Ihre Einheit im internationalen Einheitensystem ist demnach die Pascalsekunde (Pa s):

$$1 \text{ Pa s} = 1 \text{ N s/m}^2 = 1 \text{ kg/(m s)}. \quad (1.7-6)$$

Die physikalischen Ursachen der Zähigkeit

Wir wollen im Folgenden die physikalischen Ursachen der Zähigkeit kennen lernen. Wir werden sehen, dass es zwei verschiedene Mechanismen gibt, von denen der eine bei Flüssigkeiten und der andere bei Gasen überwiegt. Das hat z. B. ein entgegengesetztes Temperaturverhalten bei Flüssigkeiten und Gasen zur Folge: Bei Flüssigkeiten nimmt die Zähigkeit mit zunehmender Temperatur ab, bei Gasen steigt sie, vgl. Tabelle 5. Bei beiden Mechanismen muss man zur Erklärung der Zähigkeit die Vorstellung des Kontinuums verlassen und auf die molekulare Struktur der Materie zurückgehen.

Wir haben in Lehrinheit 1.1 gesehen, dass sich die Moleküle auch in einem äußerlich ruhenden Medium in ständiger Bewegung befinden. Man kann zeigen, dass die mittlere kinetische Energie dieser Bewegung proportional der Temperatur des Mediums ist, man nennt diese mikroskopische Bewegung deshalb auch thermische oder Wärmebewegung. Dass man im Großen keine Bewegung wahrnimmt, liegt daran, dass sich alle diese Bewegungen im Mittel aufheben, dass also der Mittelwert der Geschwindigkeit aller Moleküle eines Volumenelements null ist. In einem bewegten Medium ist das anders, und zwar ist das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten \underline{c}_v aller N -Moleküle eines Volumenelements gerade die makroskopische Geschwindigkeit \underline{c} des Volumenelements:

$$\underline{c} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \underline{c}_v. \quad (1.7-7)$$

Man kann die (mikroskopische) Geschwindigkeit \underline{c}_v jedes Moleküls aufspalten in die (makroskopische) Geschwindigkeit \underline{c} des Volumenelements nach (1.7-7) und die thermische Geschwindigkeit \underline{u}_v des Moleküls:

$$\underline{c}_v = \underline{c} + \underline{u}_v. \quad (1.7-8)$$

Wir betrachten wieder eine einfache Scherströmung zwischen zwei parallelen Platten. In einer Flüssigkeit rührt der Widerstand, der bei einer Scherung überwunden werden muss, vor allem von der Überwindung der intermolekularen Kräfte zwischen den Molekülen her; die Moleküle müssen gleichsam gegen diese Kräfte auseinander gerissen werden. Mit steigender Temperatur dehnt sich das Fluid in der Regel⁹ aus, der mittlere Abstand der Moleküle nimmt zu und damit die mittlere Anziehungskraft zwischen ihnen ab. Zugleich wächst die mittlere Amplitude der thermischen Bewegung und damit die Häufigkeit von Platzwechseln. Beides führt dazu, dass die Zähigkeit mit der Temperatur abnimmt. In einem Gas rührt der Widerstand gegen Scherung vor allem von der Querdiffusion der Moleküle her: Durch die thermische Bewegung quer zur Richtung der makroskopischen Geschwindigkeit gelangen ständig Moleküle einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit in Schichten höherer oder niedrigerer mittlerer Geschwindigkeit und werden dort durch Zusammenstöße mit Molekülen dieser Schicht beschleunigt oder gebremst. Diese Impulsänderung wirkt sich als Schubspannung aus. Mit steigender Temperatur nimmt die Querdiffusion und damit auch die Zähigkeit zu.

Zahlenwerte für die dynamische und die kinematische Zähigkeit verschiedener Stoffe und für die Änderung der dynamischen Zähigkeit von Wasser und Luft mit der Temperatur finden sich in den Tabellen 1 und 5.

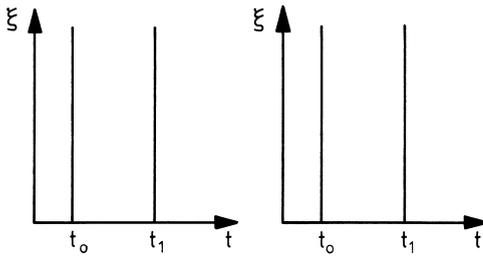
Bei den Zusammenstößen der Moleküle wird sicher ein Teil der makroskopischen kinetischen Energie in mikroskopische kinetische Energie, d. h. mechanische Energie in innere Energie umgewandelt. Eine solche Umwandlung nennt man Dissipation; Zähigkeit ist also stets mit Dissipation, thermodynamisch gesprochen mit einer Entropieproduktion verbunden.

Aufgabe 1

Wenn man ein Medium einer einfachen Scherung unterwirft, wird die auftretende Schubspannung im allgemeinen Fall sowohl vom Scherwinkel als auch von der Schergeschwindigkeit abhängen. Wie nennt man das Medium,

- A. wenn die Schubspannung nur vom Scherwinkel abhängt?
- B. wenn die Schubspannung linear vom Scherwinkel abhängt?
- C. wenn die Schubspannung nur von der Schergeschwindigkeit abhängt?
- D. wenn die Schubspannung linear von der Schergeschwindigkeit abhängt?

⁹ Wasser zwischen 0 °C und 4 °C bildet bekanntlich eine Ausnahme.

Aufgabe 2

Bei einem einfachen Scherver-
such zwischen zwei parallelen
Platten im Abstand H befinde
sich das zu untersuchende Me-
dium zunächst im spannungs-
freien Zustand. Von der Zeit t_0
bis zur Zeit t_1 werde die örtlich
und zeitlich konstante Schub-
spannung τ_0 aufgeprägt, danach
sei das Medium wieder span-

nungsfrei. Skizzieren Sie die Verschiebung ξ als Funktion der Zeit t und berechnen Sie die maximale Verschiebung

- für ein Hooke-Medium mit dem Schubmodul G ,
- für ein newtonsches Fluid mit der Zähigkeit η !

Aufgabe 3

Man sagt häufig, die Temperatur sei proportional der mittleren kinetischen Energie der Moleküle. Erhöht sich demnach die Temperatur in einer Strömung, wenn man die Strömung unter sonst gleichen Bedingungen beschleunigt?

LE 1.8 Nicht-newtonsche Fluide

In dieser Lehreinheit wollen wir eine Übersicht über verschiedene Klassen von Fluiden geben, die sich durch ihr Verhalten bei einer einfachen Scherung unterscheiden. Wir nehmen damit Einblick in die Rheologie, die ganz allgemein die Verformung oder Bewegung der verschiedenen Materialien unter dem Einfluss von Kompression und Scherung untersucht.

Je nach dem Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ und der Schergeschwindigkeit $\dot{\beta}$ bei einer einfachen Scherung kann man zwei Klassen von Fluiden unterscheiden: die viskosen und die elastoviskosen Fluide.

Viskose Fluide

Bei den bereits in Lehreinheit 1.7 eingeführten viskosen Fluiden (im Gegensatz zu den elastoviskosen Fluiden spricht man auch von reinviskosen Fluiden) be-

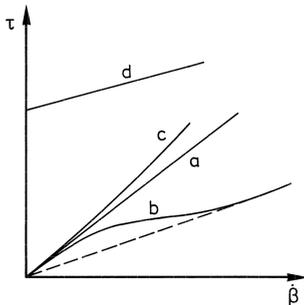
steht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der an einem Teilchen angreifenden Schubspannung τ und der zur selben Zeit darauf wirkenden Schergeschwindigkeit $\dot{\beta}$; es existiert also ein Fließgesetz der Form

$$f(\tau, \dot{\beta}) = 0, \tag{1.8-1}$$

in das außer τ und $\dot{\beta}$ nur noch Materialkonstanten eingehen; diese Material„konstanten“ können natürlich noch von Zustandsgrößen wie Temperatur und Druck abhängen. Das Fließverhalten eines viskosen Fluids lässt sich also (für jeden Satz Zustandsgrößen) unabhängig vom zeitlichen Verlauf der Schergeschwindigkeit durch eine einzige Fließkurve $\tau = \tau(\dot{\beta})$ beschreiben; auch die Darstellung $\dot{\beta} = \dot{\beta}(\tau)$ ist üblich.

Im einfachsten Fall der newtonschen Fluide ist das Fließgesetz linear, es gilt

$$\tau = \eta \dot{\beta} \tag{1.8-2}$$



- a newtonsches Fluid
- b strukturviskoses Fluid
- c dilatantes Fluid
- d Bingham-Medium

mit der Scherviskosität η als einziger Materialkonstante; die Fließkurve ist eine Gerade durch den Ursprung. Newtonsches Verhalten zeigen Luft und die meisten anderen Gase, Wasser, viele Öle, Benzin, Alkohol, Quecksilber und viele andere technisch wichtige Flüssigkeiten. Alle Fluide mit einem anderen Fließgesetz, also die nichtlinearviskosen und die elastoviskosen Fluide, fasst man als nicht-newtonsche Fluide zusammen.

Auch bei nichtlinear-viskosen Fluiden geht die Fließkurve durch den Ursprung: Wenn die auf ein Fluidteilchen wirkende Schergeschwindigkeit gegen null geht, muss auch die daran angreifende Schubspannung gegen null gehen. Man bezeichnet auch hier den Quotienten aus Schubspannung und Schergeschwindigkeit, also die Steigung der Sekante zu einem Punkt der Fließkurve, als (Scher-)Viskosität η ; sie ist hier eine Funktion von $\dot{\beta}$ (oder τ). Den Grenzwert der Viskosität für sehr kleine Schergeschwindigkeit, also die Steigung der Tangente an die Fließkurve im Ursprung, nennt man Nullviskosität und bezeichnet sie mit η_0 . In der Regel strebt die Viskosität auch für sehr große Schergeschwindigkeit einem Grenzwert zu, den man obere Grenzviskosität¹⁰ nennt und mit η_∞ bezeichnet.

¹⁰ Auch obere newtonsche Grenzviskosität, weil die Viskosität für große Schergeschwindigkeit praktisch konstant ist und das Fluid sich deshalb in diesem Bereich wie ein newtonsches verhält.

Nimmt die Viskosität eines viskosen Fluids mit steigender Schergeschwindigkeit ab, nennt man das Fluid strukturviskos oder pseudoplastisch. Solches Verhalten zeigen z. B. Lösungen und Schmelzen vieler hoch polymerer Stoffe sowie Suspensionen mit länglichen Partikeln wie Kautschuke und Seifenlösungen. Man kann strukturviskoses Verhalten folgendermaßen erklären: Im Ruhezustand sind die Moleküle oder suspendierten Partikel stark verkettet und setzen deshalb einer Scherung großen Widerstand entgegen. Mit zunehmender Schergeschwindigkeit richten sich die Moleküle aus, und der Widerstand gegen Scherung nimmt ab.

Steigt die Viskosität mit zunehmender Schergeschwindigkeit, so nennt man das Fluid dilatant. Dilatantes Verhalten ist seltener, es findet sich z. B. bei einigen hoch konzentrierten Suspensionen und nassem Sand. Man versucht sich dieses Verhalten so zu erklären, dass in der Ruhe die Sandkörner dicht gepackt und ihr Zwischenraum völlig mit Wasser ausgefüllt ist. Mit wachsender Scherbeanspruchung vergrößert sich der Abstand der Sandkörner, so dass die Wasserumhüllung aufreißt und die Schmierwirkung des Wassers abnimmt.

Besonders im Bereich mittlerer Schergeschwindigkeiten kann man das Fließgesetz nichtlinear-viskoser Fluide durch eine Gleichung der Form

$$\tau = k\dot{\beta}^m \quad (1.8-3)$$

approximieren, wobei bei strukturviskosen Fluiden $m < 1$ und bei dilatanten Fluiden $m > 1$ ist.

Es gibt auch Medien, die sich unter dem Einfluss einer Schubspannung unterhalb einer sog. Fließspannung τ_0 wie ein fester Körper und darüber wie ein Fluid verhalten; solche Medien nennt man plastisch. Da sie in der Ruhe eine Schubspannung aufnehmen können, gehören sie nicht zu den Fluiden. Sie werden hier mitbehandelt, weil sich ihr Verhalten im fluiden Bereich auch durch eine Fließkurve beschreiben lässt; die Fließkurve schneidet die Ordinatenachse bei der Fließspannung. Das einfachste Modell eines plastischen Mediums ist das Bingham-Medium: Es verhält sich im festen Bereich linear-elastisch und im fluiden Bereich linear-viskos, sein Fließgesetz (das natürlich nur sein fluides Verhalten beschreibt) lautet demnach

$$\tau = \tau_0 + \eta\dot{\beta}. \quad (1.8-4)$$

Viele industrielle Schlämme, z. B. Suspensionen von Kalk (Mörtel) und Kreide (Zahnpaste) zeigen dieses Verhalten.

Elastoviskose Fluide

Es gibt auch Fluide, bei denen die an einem Teilchen bei einfacher Scherung angreifende Schubspannung nicht nur von der momentanen Schergeschwindigkeit, sondern auch von der Schergeschwindigkeit in der Vergangenheit abhängt. Wenn z. B. eine scherende Beanspruchung plötzlich aufhört, sinkt die Schubspannung in solchen Fluiden nicht momentan, sondern erst allmählich auf null, was dazu führt, dass ein Teil der durch die Scherung hervorgerufenen Deformation rückgängig gemacht wird. Solche Fluide nennt man deshalb elastoviskos; im Blick auf die Nachwirkung der Schergeschwindigkeit spricht man auch von Fluiden mit Gedächtnis. (Der Unterschied zwischen viskosen und elastoviskosen Fluiden macht sich natürlich nur bei zeitlich veränderlicher Schergeschwindigkeit bemerkbar.)

Bei elastoviskosen Fluiden lässt sich der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Schergeschwindigkeit praktisch immer durch ein Fließgesetz darstellen, in das außer τ und $\dot{\beta}$ (und Materialkonstanten) auch zeitliche Ableitungen von τ und $\dot{\beta}$ eingehen:

$$f(\tau, \dot{\tau}, \dots, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots) = 0. \quad (1.8-5)$$

Ist diese Gleichung in allen Variablen linear, also von der Form

$$\tau + a_1 \dot{\tau} + \dots + b_1 \dot{\beta} + b_2 \ddot{\beta} + \dots = 0, \quad (1.8-6)$$

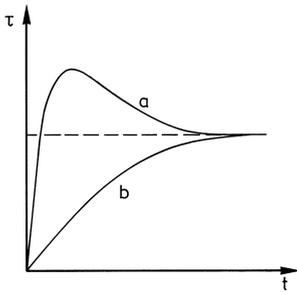
so spricht man von einem linear-elastoviskosen Fluid.

Der einfachste Fall ist das sog. Maxwell-Fluid, für das eine Beziehung

$$\dot{\beta} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G} \quad (1.8-7)$$

mit den Materialkonstanten η und G existiert. Für $\tau/\eta \gg \dot{\tau}/G$, also wenn sich die Schubspannung hinreichend langsam ändert, reduziert sich das Fließgesetz zu $\tau = \eta \dot{\beta}$, das Fluid verhält sich also rein newtonsch; für $\tau/\eta \ll \dot{\tau}/G$, also wenn sich die Schubspannung hinreichend schnell ändert, erhält man $\dot{\tau} = G \dot{\beta}$ oder $\tau = G \beta$, das Fluid verhält sich also wie ein Hooke-Medium. Sind beide Terme von gleicher Größenordnung, zeigt das Fluid sowohl viskose wie elastische Eigenschaften.

Man kann das elastoviskose Verhalten auch dadurch charakterisieren, wie sich die Schubspannung und damit die Viskosität mit der Zeit ändert, nachdem dem bisher ruhenden Fluid zur Zeit $t = 0$ eine zeitlich konstante Schergeschwindigkeit aufgeprägt wurde. Nähert sich die Schubspannung dem stationären Wert



a thixotropes Verhalten
b rheopexes Verhalten

von oben, wird das Fluid also bei konstanter Scherbeanspruchung mit der Zeit dünnflüssiger, spricht man von thixotropem Verhalten; nähert sich die Schubspannung dem stationären Wert von unten, wird das Fluid also bei konstanter Scherbeanspruchung mit der Zeit dickflüssiger, spricht man von rheopexem Verhalten. Dabei ist jeweils vorausgesetzt, dass die Änderungen der Viskosität reversibel verlaufen, dass die Viskosität also bei Aufhören der Scherbeanspruchung nach einer gewissen Zeit auf ihren Ausgangswert zurückgeht.

Thixotropie ist uns von vielen Farben und Lacken vertraut: Beim Rühren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zeigen thixotrope Fluide zunächst einen sehr großen Widerstand und damit eine sehr große Viskosität, im Laufe der Zeit nimmt der Widerstand und damit die Viskosität dann deutlich ab. Offenbar muss bei solchen Fluiden die Schergeschwindigkeit eine Zeit lang wirken, um die Struktur zu zerstören. Der Endwert der Viskosität ist bei solchen Fluiden in der Regel um so kleiner, je größer die aufgeprägte Schergeschwindigkeit ist; bei stationärer Schergeschwindigkeit verhalten sich solche Fluide also meist wie strukturviskose Fluide. Rheopexie kommt in der Praxis kaum vor; wie in der Zusatzaufgabe gezeigt wird, ist das Maxwell-Fluid rheopex.

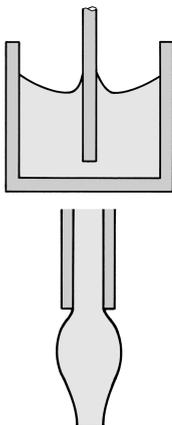
Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass ein Medium mit elastischen und viskosen Eigenschaften kein Fluid sein muss. Zum Beispiel ist das Kelvin-Medium mit dem Stoffgesetz $\tau = G\beta + \eta\dot{\beta}$ ein Modell für einen Festkörper: Bei hinreichend großer Scherung, vom spannungslosen Zustand aus gemessen, verhält es sich wie ein Hooke-Medium. Man nennt solche Medien auch viskoelastisch.

Zusammenstellung der Einteilung von Medien nach ihrem mechanischen Verhalten

<p><u>elastisch</u> $f(\tau, \beta) = 0$ zum Beispiel $\tau = G \beta$ (Hooke)</p>	<p><u>viskos</u> $f(\tau, \dot{\beta}) = 0$ zum Beispiel $\tau = \eta \dot{\beta}$ (Newton) oder $\tau = K \dot{\beta}^m$ (nichtlinear-viskos, z. B. strukturviskos)</p>
<p><u>viskoelastisch</u> $f(\tau, \dot{\tau}, \dots, \beta, \dot{\beta}, \dots) = 0$ zum Beispiel $\tau = G \beta + \alpha \dot{\beta}$ (Kelvin)</p>	<p><u>elastoviskos</u> $f(\tau, \dot{\tau}, \dots, \dot{\beta}, \beta, \dots) = 0$ um Beispiel $\dot{\beta} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G}$ (Maxwell)</p>
<p><i>fest</i></p>	<p><i>flüssig, gasförmig</i></p>

<p><u>plastisch</u> $f(\tau, \beta) = 0$ für $\tau < \tau_0$ $f(\tau, \dot{\beta}) = 0$ für $\tau > \tau_0$ zum Beispiel $\tau = G \beta$ für $\tau < \tau_0$ $\tau = \tau_0 + \eta \dot{\beta}$ für $\tau > \tau_0$ (Bingham)</p>
--

Normalspannungseffekte



Bei viskosen wie elastoviskosen Fluiden mit nichtlinearem Fließgesetz hat eine Schergeschwindigkeit nicht nur eine Schubspannung zur Folge, sondern sie führt auch zu unterschiedlichen Normalspannungen in verschiedenen Richtungen. In der Regel ist die Differenz der Normalspannungen in Strömungsrichtung und in Scherrichtung positiv und deutlich größer als die Differenz der Normalspannungen in Scherrichtung und in der indifferenten Richtung. Die auffälligste Folge der Normalspannungsdifferenzen ist also das Auftreten einer Zugspannung in Strömungsrichtung. Das führt z. B. dazu, dass der Flüssigkeitsspiegel an einem Rührstab steigt (Weissenberg-Effekt), und dass ein aus einer Öffnung austretender Flüssigkeitsstrahl sich zunächst aufweitet.

Aufgabe 1

Was versteht man unter

- A. einem viskosen Fluid,
- B. einem newtonschen Fluid,
- C. einem Bingham-Medium,
- D. einem strukturviskosen Fluid,
- E. einem elastoviskosen Fluid,
- F. einem thixotropen Fluid,
- G. einem Fluid mit Gedächtnis?

Aufgabe 2

Wie kann man sich strukturviskoses, wie thixotropes Verhalten erklären?

Aufgabe 3

Nennen Sie ein Beispiel für

- A. ein Bingham-Medium,
- B. ein newtonsches Fluid,
- C. ein thixotropes Fluid,
- D. ein dilatantes Fluid,
- E. ein strukturviskoses Fluid!

Zusatzaufgabe

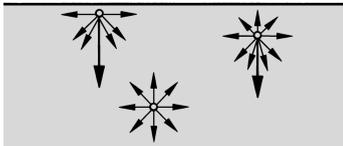
Berechnen Sie $\tau = \tau(t)$ für ein Maxwell-Fluid für den Fall, dass das Fluid für $t < 0$ in Ruhe ist und ihm für $t \geq 0$ eine zeitlich konstante Schergeschwindigkeit $\dot{\beta}$ aufgeprägt wird!

Lösungshinweis: Für konstantes $\dot{\beta}$ ist (1.8-7) eine inhomogene lineare Differentialgleichung in τ mit konstanten Koeffizienten und der Randbedingung $\tau = 0$ für $t = 0$.

LE 1.9 Die Grenzflächenspannung (Teil 1)

Ein Fluid ist definitionsgemäß u. a. dadurch gekennzeichnet, dass es in der Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen kann. Wir haben bereits in Lehrinheit 1.3 darauf hingewiesen, dass z. B. die Bildung von Wassertropfen dazu im Widerspruch steht. Auch die Bildung von Gasblasen in einer Flüssigkeit oder von Fettaugen auf einer Suppe lässt sich am einfachsten erklären, wenn man entgegen dem Modell eines Fluids eine Schubspannung in der Grenzfläche zwischen den beiden Stoffen annimmt. Mit dieser Grenzflächenspannung wollen wir uns in den letzten beiden Lehrheiten dieses Kapitels beschäftigen.

Die physikalischen Ursachen der Grenzflächenspannung



Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit (oder eines festen Körpers) bestehen Anziehungskräfte, die den Zusammenhalt des Körpers bewirken; diese Erscheinung nennt man bekanntlich Kohäsion. Im Innern einer Flüssigkeit wirkt in jeder Richtung die gleiche intermolekulare Kraft, die Resultierende dieser

Kräfte auf ein Molekül ist also null. An der Oberfläche wirken die intermolekularen Kräfte nur ins Innere und längs der Oberfläche, sie haben also eine Resultierende in die Flüssigkeiten hinein.

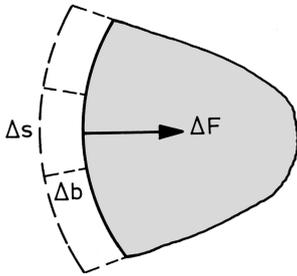
An dieser Überlegung ändert sich qualitativ nichts, wenn man berücksichtigt, dass oberhalb einer Flüssigkeitsoberfläche nicht Vakuum herrscht, sondern sich Dampf bildet, man also genauer statt von einer Oberfläche von einer Grenzfläche zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase spricht: Die intermolekularen Kräfte, die von den Gasmolekülen oberhalb der Grenzfläche auf Flüssigkeitsmoleküle in der Grenzfläche wirken, sind sehr viel kleiner als die intermolekularen Kräfte, die von den Flüssigkeitsmolekülen unterhalb der Grenzfläche ausgehen; die Resultierende aller dieser Kräfte auf ein Molekül in (oder dicht unter) der Grenzfläche weist also in die Flüssigkeit. Entsprechendes gilt für die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen (zwei festen Körpern, zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten oder einem festen Körper und einer Flüssigkeit): Auch zwischen den Molekülen verschiedener Stoffe herrschen intermolekulare Kräfte, die beispielsweise dazu führen, dass Kreide an einer Tafel oder Wasser beim Durchströmen eines Rohres an der Rohrwand haftet; diese Erscheinung nennt man bekanntlich Adhäsion. Für alle Grenzflächen zwischen verschiedenen Stoffen oder verschiedenen Phasen eines Stoffes gilt also, dass sich die intermolekularen Kräfte auf Moleküle in der Grenzfläche (oder in ihrer Nähe) nicht aufheben, sondern sich zu einer Resultierenden senkrecht zur Grenzfläche zusammensetzen.

Die Grenzflächenspannung oder spezifische Grenzflächenenergie

Um eine Grenzfläche zu vergrößern, muss man Moleküle aus dem Innern an die Grenzfläche bringen. Dabei muss man Arbeit entgegen der resultierenden Kraft leisten; ein Molekül an der Oberfläche hat also gegenüber einem Molekül im Innern eine um den Betrag dieser Arbeit größere potentielle Energie. Diese potentielle Energie nennt man Grenzflächenenergie. Um die Grenzfläche um den Betrag dA zu vergrößern, sei die Grenzflächenenergie dE erforderlich, dann definiert man die spezifische Grenzflächenenergie durch

$$\gamma = \frac{dE}{dA}. \quad (1.9-1)$$

Man beachte, dass γ nicht die Dimension Energie durch Masse einer spezifischen Energie, sondern die Dimension Energie durch Fläche hat.



Ist zur Vergrößerung einer Fläche eine Arbeit aufzuwenden, so muss am Rand der Fläche eine Kraft angreifen, die auf der Randkurve senkrecht steht und tangential zur Fläche in die Fläche hinein gerichtet ist. Auf ein Element ds der Randkurve wirke eine Kraft dF . Verschiebt man dieses Randkurvenelement gegen diese Kraft um die Strecke db nach außen, so wird die Arbeit $dE = dF db$ geleistet und die Fläche dabei um das Stück $dA = ds db$ vergrößert. Setzt man beides in (1.9-1) ein, so erhält man

$$\gamma = \frac{dF}{ds}. \quad (1.9-2)$$

Die spezifische Grenzflächenenergie lässt sich also auch als Quotient der Kraft, die an einem Kurvenelement einer Grenzfläche angreift, und der Länge dieses Kurvenelements ausdrücken. Man nennt γ deshalb auch Grenzflächenspannung, wobei wieder zu beachten ist, dass γ nicht die Dimension einer Spannung, nämlich Kraft durch Fläche, sondern die Dimension Kraft durch Länge hat. Die Einheit von γ im internationalen Einheitensystem ist also Joule durch Quadratmeter (J/m^2) oder Newton durch Meter (N/m):

$$1 J/m^2 = 1 N/m = 1 Pa \cdot m = 1 kg/s^2. \quad (1.9-3)$$

Tabelle 7 enthält einige charakteristische Werte der Grenzflächenspannung.

Berücksichtigt man den vektoriellen Charakter der Kraft, so kann man auch eine vektorielle Grenzflächenspannung

$$\underline{\gamma} = \frac{dF}{ds} \quad (1.9-4)$$

definieren.

Werden die Moleküle eines Stoffes in der Grenzfläche stärker von den Molekülen des anderen Stoffes als von den eigenen angezogen, ist also die Adhäsion stärker als die Kohäsion, so spricht man von einer negativen Grenzflächenspannung. Bei zwei Flüssigkeiten führt das dazu, dass beide Stoffe sich vermischen, also gar keine Grenzfläche auftritt. Diese Erscheinung kann aber auch zwischen einer Flüssigkeit und einem festen Körper auftreten; in diesem Falle versucht die Grenzflächenspannung, die Grenzfläche zu vergrößern, $\underline{\gamma}$ ist tangential zur Grenzfläche aus der Grenzfläche heraus gerichtet.

Aufgabe 1

Wie ist die spezifische Grenzflächenenergie γ definiert?

- A. Als Quotient aus der Arbeit, die bei der Bewegung eines Teilchens längs der Grenzfläche aufgewendet werden muss, und der Länge des zurückgelegten Weges.
- B. Als Quotient aus der Arbeit, die bei der Bewegung eines Teilchens aus dem Innern an die Grenzfläche aufgewendet werden muss, und der dadurch bewirkten Vergrößerung der Oberfläche.

Aufgabe 2

Man kann die spezifische Grenzflächenenergie γ auch als Quotient einer Kraft und einer Länge deuten. Wirkt diese Kraft

- A. in der Grenzfläche oder
- B. senkrecht zur Grenzfläche?

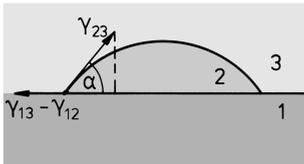
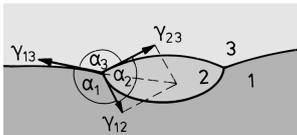
Aufgabe 3

Was lässt sich über die Grenzflächenspannung zwischen zwei Gasen sagen?

LE 1.10 Die Grenzflächenspannung (Teil 2)

Randwinkel und Haftspannung

Die Grenzflächenspannung führt zu charakteristischen Erscheinungen an einer Linie, an der drei Medien zusammenstoßen. Wenn man etwa einen Tropfen Paraffinöl auf eine Wasseroberfläche bringt, nimmt er die Form einer Linse mit scharfer Kante an. Dabei bilden sich zwischen den drei Grenzflächen Randwinkel aus, die nur vom Verhältnis der drei Grenzflächenspannungen abhängen: Das Kräftegleichgewicht verlangt, dass die vektorielle Summe der drei Grenzflächenspannungen verschwindet. Ein Gleichgewicht ist also nur möglich, wenn jedes der drei



y dem Betrage nach kleiner als die Summe der anderen beiden ist. Wenn sich kein Gleichgewicht einstellen kann, breitet sich das Medium 2 (bei genügend großer Oberfläche) als praktisch monomolekularer Film auf der Oberfläche aus. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn man statt Paraffinöl leichteres Mineralöl nimmt; auf dieser Eigenschaft beruht die Schmierwirkung von Öl.

Ist das Medium 1 fest, etwa bei einem Wassertropfen auf einer Glasplatte, so ist die Richtung der beiden Grenzflächenspannungen γ_{13} und γ_{12} festgelegt: Das Kräftegleichgewicht kann sich nur in Richtung der festen Wand frei einstellen. Für den Randwinkel α zwischen Flüssigkeit und fester Wand gilt dann

$$\gamma_{13} - \gamma_{12} = \gamma_{23} \cos \alpha. \quad (1.10-1)$$

Die Grenzflächenspannung gegenüber einem festen Medium lässt sich also nur als Differenz bestimmen; die Größe $\gamma_{13} - \gamma_{12}$ heißt die Haftspannung des Mediums 1 gegenüber der Flüssigkeit 2 und dem Gas 3. Man kann nun 4 Fälle unterscheiden:

$$\gamma_{13} - \gamma_{12} \cong \gamma_{23}$$



Formal ergibt sich $\cos \alpha \geq 1$, praktisch $\alpha = 0^\circ$. Wir haben wieder den Fall, dass kein Gleichgewicht möglich ist: Die Flüssigkeit versucht, die ganze Wand mit einem dünnen Film zu überziehen. Beispiel: Petroleum, Glas und Luft (mit Petroleumdampf).

$$0 < \gamma_{13} - \gamma_{12} < \gamma_{23}$$



$1 > \cos \alpha > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Die Flüssigkeit bildet mit der Wand einen spitzen Winkel, sie steigt also an der Wand hoch. Beispiel: Wasser, trockenes Glas und Luft; α liegt je nach Art des Glases zwischen 0° und 50° . (Bei vorheriger Benetzung des Glases ist $\alpha = 0^\circ$.)

$$0 < \gamma_{12} - \gamma_{13} < \gamma_{23}$$



$0 > \cos \alpha > -1$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Die Flüssigkeit bildet mit der Wand einen stumpfen Winkel, sinkt also an der Wand ab. Beispiel: Quecksilber, Glas und Luft; α liegt zwischen 140° und 150° .

$$\gamma_{12} - \gamma_{13} \cong \gamma_{23}$$



Formal ergibt sich $\cos \alpha \leq -1$, praktisch $\alpha = 180^\circ$. Dieser Fall kommt in der Natur nicht vor.

Im ersten Fall sagt man, die Flüssigkeit benetze die Wand vollständig, im zweiten und dritten Fall, die Flüssigkeit benetze die Wand teilweise. Manche Autoren sagen im dritten Fall auch, die Flüssigkeit benetze die Wand nicht.

Krümmungsdruck

Ist die Grenzfläche gekrümmt, so führt die Grenzflächenspannung zu einem Überdruck auf der konkaven Seite, so wie die Spannung in der Hülle eines Luftballons einem Überdruck im Innern des Ballons entspricht. Diesen Überdruck nennt man Krümmungsdruck oder auch Kapillardruck, weil er die Ursache dafür ist, dass z. B. Wasser in einer Kapillare (einem dünnen Röhrchen) aus Glas höher als in der Umgebung steigt, vgl. die Zusatzaufgabe in Lehrinheit 2.3.

Der Überdruck Δp in einem kleinen Flüssigkeitstropfen oder einer Gasblase vom Radius R lässt sich bei bekannter Grenzflächenspannung γ nach (1.9-1) leicht berechnen: Die Oberfläche der Blase ist $4\pi R^2$, aufgrund des Überdrucks wirkt auf die Blasenoberfläche von innen die Kraft $4\pi R^2 \Delta p$. Vergrößert man den Blasenradius um dR , so muss man die Energie

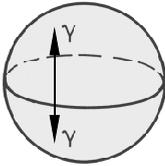
$$dE = 4\pi R^2 \Delta p dR$$

aufwenden. Dabei vergrößert sich die Oberfläche $A = 4\pi R^2$ um

$$dA = \frac{dA}{dR} dR = 8\pi R dR.$$

Nach (1.9-1) erhält man daraus $\gamma = R \Delta p / 2$ oder für den Krümmungsdruck

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}. \quad (1.10-2)$$



Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man von (1.9-2) ausgeht. Nach (1.9-2) wirkt z. B. im „Äquator“ der Kugel die Kraft $2\pi R\gamma$ senkrecht zum „Äquator“. Diese Kraft muss gleich der Druckkraft $\Delta p \pi R^2$ auf die „Äquatorialebene“ sein. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man ebenfalls (1.10-2). Eine Seifenblase hat eine innere und eine äußere Oberfläche, dafür gilt also

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R}. \quad (1.10-3)$$

Die Gleichung (1.10-2) gilt offenbar für jedes Oberflächenelement der Kugel oder allgemeiner für jedes Oberflächenelement, das Teil einer Kugelkalotte mit dem Krümmungsradius R ist. Für ein beliebig gekrümmtes Flächenelement einer Grenzfläche gilt, vgl. die Zusatzaufgabe,

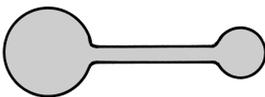
$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.10-4)$$

wobei R_1 und R_2 die Krümmungsradien in zwei aufeinander senkrecht stehenden Normalenebenen des Flächenelements sind.

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Randwinkel α_2 eines Tropfens Paraffinöl auf Wasser! (Zahlenwerte in Tabelle 7.)

Aufgabe 2

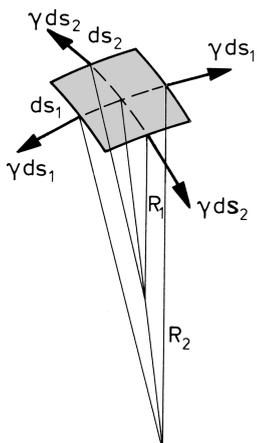


Was passiert, wenn zwei verschieden große Seifenblasen durch ein Röhrrchen verbunden werden?

- A. Die kleinere wächst auf Kosten der größeren.
- B. Die größere wächst auf Kosten der kleineren.
- C. Beide behalten ihre Größe.

Aufgabe 3

Wie groß ist der Überdruck in einem Regentropfen von 1 mm Durchmesser?

Zusatzaufgabe

Ein gekrümmtes Flächenelement habe in zwei zueinander senkrechten Richtungen die Seitenlängen ds_1 und ds_2 . Der Krümmungsradius in der s_1 -Ebene sei R_1 und in der s_2 -Ebene R_2 . Die Grenzflächenspannung sei γ . Berechnen Sie den Krümmungsdruck auf das Flächenelement!

Kapitel 2

Hydrostatik

Die Hydrostatik untersucht Fluide in der Ruhe. Es gelten dann zwei wichtige Aussagen:

- Alle Kräfte, die an einem beliebigen Fluidelement angreifen, müssen im Gleichgewicht sein, d. h. ihre Summe muss null sein; denn wäre das nicht der Fall, so würde ihre Resultierende nach dem 2. Newtonschen Axiom (Kraft gleich Masse mal Beschleunigung) das Fluidelement beschleunigen, es bliebe also nicht in Ruhe.
- Das Fluid kann nach Lehrsatz 1.3 keine Schubspannungen aufnehmen. Der Spannungsvektor steht dann in jedem Punkt senkrecht auf dem Flächenelement, an dem er angreift, und sein Betrag ist nach Lehrsatz 1.5 unabhängig von der Orientierung dieses Flächenelements gleich dem Druck in diesem Punkt.

Mit Hilfe dieser beiden Aussagen wollen wir zunächst eine Differentialgleichung für das Druckfeld in einem ruhenden Fluid aufgrund einer äußeren Volumenkraft (z. B. des Schwerfeldes) herleiten, das sog. Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik; anschließend wollen wir diese Differentialgleichung für zwei technisch wichtige Spezialfälle, nämlich bei barotroper Schichtung und für inkompressible Fluide, integrieren, d. h. wir wollen das Druckfeld aus dem Feld der Kraftdichte berechnen (Lehrsätze 2.1 bis 2.3).

Aus diesem Druckfeld wollen wir dann die Kraft ausrechnen, die von einem ruhenden Fluid auf eine Behälterwand ausgeübt wird, etwa von einem Stausee auf die Staumauer (Lehrsätze 2.4 bis 2.7).

In diesem Kapitel wird zum ersten Male von der Vektorrechnung Gebrauch gemacht. Wer damit, insbesondere mit dem Rechnen in Koordinatenschreibweise, Schwierigkeiten hat, der sei auf den Anhang „Zum Rechnen mit Tensoren“ verwiesen. Die Gleichungen dieses Anhangs werden im Text mit einem A vor der Gleichungsnummer zitiert.

LE 2.1 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik

In dieser Lehrsatz wird zunächst das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik abgeleitet. Dann wird daraus die Bedingung gewonnen, die ein äußeres Kraftfeld erfüllen muss, damit ein Fluid in Ruhe sein kann.

Grundgleichungen

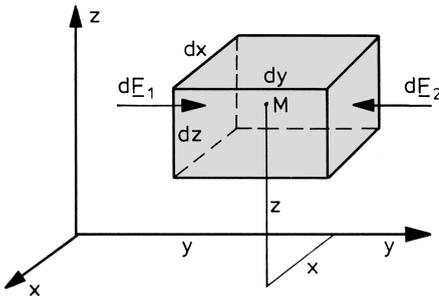
Wir beginnen dieses Kapitel mit der Formulierung einer Grundgleichung, des Eulerschen Grundgesetzes der Hydrostatik. Dabei verstehen wir unter einer Grundgleichung eine physikalische Gleichung, die man nicht aus anderen physikalischen Gleichungen mathematisch herleiten kann, sondern die man aus einer Vielzahl von Beobachtungen und Experimenten als deren gemeinsame Grundlage gewonnen hat. Statt von einer Grundgleichung spricht man im selben Sinne auch von einem Postulat oder einem Axiom. Häufig, aber keineswegs immer, liegt einer Grundgleichung ein einfacher Gedanke zugrunde. In der Hydrostatik kann man ihn so formulieren:

Die Summe aller Kräfte auf ein beliebiges Volumen in einem ruhenden Fluid ist null.

Eine solche Aussage nennt man auch ein Naturgesetz. Auch andere Formulierungen desselben Gedankens sind möglich, in diesem Falle etwa: In einem ruhenden Fluid stehen alle Kräfte im Gleichgewicht. Eine Grundgleichung herleiten heißt dann, eine solche Aussage in eine physikalische Gleichung umsetzen. In diesem Sinne wollen wir jetzt das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik herleiten.

Die Herleitung des Eulerschen Grundgesetzes

Wir beschreiben die Herleitung des Eulerschen Grundgesetzes sehr ausführlich, da sie grundlegend für das Verständnis der Hydrostatik ist und der Anfänger hier häufig Schwierigkeiten hat.



Wir wollen das Kräftegleichgewicht für einen infinitesimalen Quader ansetzen. Der Mittelpunkt M des Quaders habe die Koordinaten (x, y, z) , und der Quader habe parallel zu den Koordinatenachsen die Kantenlängen dx , dy und dz . Im Mittelpunkt des Quaders wirke der Druck $p(x, y, z)$ und die Kraftdichte $\underline{f}(x, y, z)$ mit den drei Koordinaten¹ $f_x(x, y, z)$,

¹ Zur Unterscheidung zwischen den Komponenten und den Koordinaten eines Vektors vgl. die Erläuterungen zu (A 2).

$f_y(x, y, z)$ und $f_z(x, y, z)$. Kräftegleichgewicht bedeutet, dass die Summe aus der (von der Kraftdichte herrührenden) Volumenkraft und den (vom Druck herrührenden) Oberflächenkräften null sein muss. Da Kräfte Vektoren sind, muss diese Bedingung für alle Koordinatenrichtungen erfüllt sein. Wir setzen sie zunächst für die y -Richtung an.

Die y -Koordinate der Volumenkraft ist nach (1.4-12)

$$dF_{Vy} = \rho f_y dx dy dz. \quad (2.1-1)$$

Da die Oberflächenkräfte auf den Flächen, an denen sie angreifen, senkrecht stehen, liefern nur die beiden in die Figur eingezeichneten Kräfte $d\underline{F}_1$ und $d\underline{F}_2$ Beiträge zum Kräftegleichgewicht in y -Richtung. Sie unterscheiden sich zwar nur um einen infinitesimalen Betrag, da aber $d\underline{F}_1$ von links und $d\underline{F}_2$ von rechts wirkt, also ihre Differenz in das Kräftegleichgewicht eingeht, müssen wir diese infinitesimale Differenz ermitteln. $d\underline{F}_1$ wirkt im Punkte $(x, y - \frac{1}{2}dy, z)$; nach dem Taylorschen Satz der Differentialrechnung herrscht dort der Druck

$$p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

und damit die Oberflächenkraft

$$d\underline{F}_1 = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \underline{e}_y.$$

Entsprechend wirkt im Punkte $(x, y + \frac{1}{2}dy, z)$ die Oberflächenkraft

$$d\underline{F}_2 = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \underline{e}_y.$$

Die y -Koordinate der Oberflächenkraft erhält man aus der Addition von $d\underline{F}_1$ und $d\underline{F}_2$ zu

$$dF_{Oy} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz. \quad (2.1-2)$$

Aus (2.1-1) und (2.1-2) erhält man dann für die y -Koordinate der insgesamt auf das Fluidelement wirkenden Kraft mit $dV = dx dy dz$

$$dF_y = \left(\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dV, \quad (2.1-3)$$

und eine entsprechende Betrachtung für die beiden anderen Koordinatenrichtungen muss aus Symmetriegründen auf die Beziehungen

$$dF_x = \left(\rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dV, \quad (2.1-4)$$

$$dF_z = \left(\rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) dV, \quad (2.1-5)$$

führen. Diese drei Gleichungen lassen sich zu der Vektorgleichung

$$\begin{aligned} d\underline{F} &= (\rho \underline{f} - \text{grad } p) dV, \\ dF_i &= \left(\rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dV, \end{aligned} \quad (2.1-6)$$

zusammenfassen.²

Im Gleichgewicht muss diese Kraft verschwinden. Da dV nicht null ist, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung

$$\boxed{\rho \underline{f} = \text{grad } p}, \quad \boxed{\rho f_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}}. \quad (2.1-7)$$

Dies ist das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik. Man kann daraus ablesen, dass in einem ruhenden Fluid der Druckgradient in Richtung der Kraftdichte weist, m. a. W. dass die Isobaren³ überall auf dem äußeren Kraftfeld senkrecht stehen.

Die Grundbedingung der Hydrostatik

Im Allgemeinen ist die spezifische Volumenkraft \underline{f} gegeben und der Druck p gesucht. Die Dichte ρ ist entweder als Materialkonstante gegeben (inkompressibles Fluid) oder durch eine weitere Gleichung (die thermische Zustandsgleichung) mit p verknüpft. Wir haben also eine Vektorgleichung (oder drei Koordinatengleichungen) zur Bestimmung der einen Größe p , das Problem ist also überbestimmt: Damit eine Lösung existiert, d. h. damit im Fluid Ruhe möglich ist, muss \underline{f} eine Bedingung erfüllen, und zwar muss die Volumendichte $\rho \underline{f}$ der äußeren Kraft als

² Zu den beiden Schreibweisen von Vektorgleichungen vgl. Abschnitt 1.3 des Anhangs „Zum Rechnen mit Tensoren“.

³ Die Flächen gleichen Druckes.

Gradient darstellbar sein. In der Vektoranalysis zeigt man (vgl. Zusatzaufgabe 1), dass das genau dann der Fall ist, wenn gilt:

$$\operatorname{rot}(\underline{\rho f}) = \underline{0}, \quad \epsilon_{ijk} \frac{\partial \rho f_k}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1-8)$$

Eine Kraft, deren Volumendichte ρf rotorfrei ist und die sich deshalb als Gradient schreiben lässt, nennt man in der Mechanik konservativ. Es gilt also der Satz: *Nur konservative Kräfte ermöglichen Ruhe!*

Aufgabe 1

Schreiben Sie die Gleichungen (2.1-7) und (2.1-8) in kartesischen Koordinaten!

Aufgabe 2

Was versteht man unter einer konservativen Kraft?

- A. Die Volumendichte einer solchen Kraft ist rotorfrei.
- B. Die Volumendichte einer solchen Kraft lässt sich als Gradient schreiben.

Zusatzaufgabe 1

Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Skalarfeld $\varphi(\underline{x})$ die Gleichung $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \underline{0}$ gilt!

Lösungshinweis: Übersetzen Sie die zu beweisende Gleichung in die Koordinatenschreibweise!

Zusatzaufgabe 2

Wir haben das Eulersche Grundgesetz (2.1-7) aus der Gleichgewichtsbedingung $d\underline{F} = \underline{0}$ für ein Volumenelement gewonnen. Leiten Sie dieses Gesetz aus der Gleichgewichtsbedingung $\underline{F} = \underline{0}$ für ein endliches Volumen her!

Lösungshinweis: Für die Kraft auf ein endliches Volumen in einem ruhenden Fluid gilt (1.5-3). Wandeln Sie das Oberflächenintegral mittels des Gaußschen Satzes (A 46) in ein Volumenintegral um!

LE 2.2 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik bei barotroper Schichtung

Wir wollen untersuchen, was sich aus der soeben abgeleiteten Grundbedingung der Hydrostatik folgern lässt, wenn die Kraftdichte \underline{f} des äußeren Kraftfeldes selbst rotorfrei ist, wie das z. B. beim Schwerfeld der Fall ist. Wir werden sehen, dass man dann zwei Fälle unterscheiden kann: die barotrope Schichtung und die inkompressiblen Fluide. In beiden Fällen können wir das Eulersche Grundgesetz integrieren, d. h. aus dem Feld der Kraftdichte das Druckfeld berechnen. In dieser Lehreinheit wollen wir die barotrope Schichtung behandeln, in der nächsten die inkompressiblen Fluide.

Der Spezialfall rotorfreier Kraftdichte

Wenn die Massenkraftdichte \underline{f} rotorfrei ist, lässt sich \underline{f} als Gradient eines Skalarfeldes darstellen, vgl. Zusatzaufgabe 1 von Lehreinheit 2.1:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \underline{f} = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{f} = -\text{grad } U, \\ \epsilon_{ijk} \frac{\partial \rho f_k}{\partial x_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \end{array} \quad (2.2-1)$$

Die auf diese Weise definierte Größe U nennt man das zu \underline{f} gehörige Potential.⁴ Das Minuszeichen ist zunächst Konvention; wir werden später das mit diesem Vorzeichen in (2.2-1) definierte U als spezifische potentielle Energie anschaulich interpretieren.

Der technisch wichtigste Spezialfall eines solchen Massenkraftfeldes ist das Schwerfeld. Wenn die z -Achse entgegen der Schwerkraft orientiert ist und g die Fallbeschleunigung ist, gilt im Schwerfeld in kartesischen Koordinaten⁵

$$\boxed{\underline{f} = (0, 0, -g)}, \quad \boxed{U = gz}. \quad \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ z \end{array} \right\} \quad (2.2-2)$$

Genau genommen ist $U = gz + K$, wobei K eine beliebige Konstante ist: Das Potential U ist durch \underline{f} jeweils nur bis auf eine Integrationskonstante bestimmt. Da diese Konstante physikalisch bedeutungslos ist, setzt man sie im Allgemeinen willkürlich gleich null, d. h. lässt sie weg.

⁴ Ein Potential ist in der Physik ganz allgemein eine Größe, deren Ableitung eine anschauliche Bedeutung hat.

⁵ Alle mit einer Nummer versehenen Gleichungen, die nur unter der Voraussetzung gelten, dass die z -Achse entgegen oder in Richtung der Schwerkraft orientiert ist, werden wir durch eine nach oben bzw. nach unten weisende z -Achse neben der Gleichung kennzeichnen.

Nach der Produktregel der Differentialrechnung gilt

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial \rho f_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \rho \frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} f_k,$$

oder in symbolische Schreibweise übersetzt, vgl. (A 35), (A 30) und (A 27),

$$\text{rot}(\rho \underline{f}) = \rho \text{rot} \underline{f} + \text{grad} \rho \times \underline{f}.$$

Mit der Grundbedingung (2.1-8) der Hydrostatik, der Bedingung (2.2-1) für eine rotfreie Kraftdichte und dem Eulerschen Grundgesetz (2.1-7) folgt daraus

$$\text{grad} \rho \times \text{grad} p = \underline{0}. \quad (2.2-3)$$

Wenn ein äußeres Kraftfeld vorhanden ist, muss nach dem Eulerschen Grundgesetz (2.1-7) $\text{grad} p$ von null verschieden sein. Damit (2.2-3) gilt, muss also entweder $\text{grad} \rho = \underline{0}$ sein, oder $\text{grad} \rho$ und $\text{grad} p$ müssen in jedem Punkt des Fluids parallel sein. $\text{grad} \rho = \underline{0}$ bedeutet $\rho = \text{const}$, d. h. nach (1.6-7) ein inkompressibles Fluid; diesen Fall wollen wir in der nächsten Lehreinheit diskutieren. Wir wenden uns hier zunächst dem Fall zu, dass $\text{grad} \rho$ von null verschieden ist und damit $\text{grad} \rho$ und $\text{grad} p$ überall parallel sind.

Barotrope Schichtung

Der Vektor $\text{grad} \rho$ steht bekanntlich in jedem Punkt auf der Fläche $\rho = \text{const}$ durch diesen Punkt senkrecht.⁶ Entsprechend steht natürlich $\text{grad} p$ auf den Flächen $p = \text{const}$ senkrecht, nach (2.2-3) fallen also die Flächen $\rho = \text{const}$ und die Flächen $p = \text{const}$ (die Isobaren) zusammen, d. h. jedem Wert p ist genau ein Wert ρ zuzuordnen. (2.2-3) ist dann also gleichbedeutend mit

$$\rho = \rho(p), \quad (2.2-4)$$

während im Allgemeinen eine thermische Zustandsgleichung $\rho = \rho(T, p)$ gilt. Eine Strömung, in der sich die Dichte allein als Funktion des Drucks darstellen lässt, nennt man barotrop; in einem ruhenden Fluid spricht man statt von barotroper Strömung wohl besser von barotroper Schichtung:

⁶ Nach (A 31) ist $d\rho = d\underline{x} \cdot \text{grad} \rho$; für alle $d\underline{x}$, die auf $\text{grad} \rho$ senkrecht stehen, ist demnach $d\rho = 0$ und damit $\rho = \text{const}$.

Ein Fluid mit örtlich veränderlicher Dichte ist in einem Kraftfeld mit rotorfreier Kraftdichte (z. B. im Schwerfeld) in der Ruhe barotrop geschichtet.

Setzt man (2.2-1)₂ und (2.2-4) in das Eulersche Grundgesetz (2.1-7) ein, so erhält man

$$\text{grad } U + \frac{1}{\rho(p)} \text{grad } p = \underline{0}.$$

Integriert man diese Gleichung längs einer beliebigen Kurve zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 , so folgt

$$\int_{(1)}^{(2)} \text{grad } U \cdot d\underline{x} + \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\underline{x} = 0,$$

und mit (A 31) erhält man

$$U_2 - U_1 + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (2.2-5)$$

oder für den Spezialfall des Schwerfeldes mit (2.2-2)

$$g(z_2 - z_1) + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\rho} = 0. \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ z \end{array} \quad (2.2-6)$$

Dabei ist die z -Achse wie in (2.2-2) entgegen der Schwerkraft zu orientieren. Ist $\rho = \rho(p)$ bekannt, kann man aus (2.2-5) oder (2.2-6) durch eine Integration den Druck p infolge des äußeren Kraftfeldes berechnen.

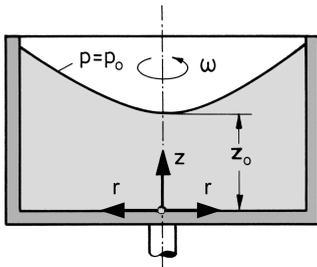
Aufgabe 1

Welche der folgenden Größen ist ein Potential?

- A. Die Kraftdichte.
- B. Ein Gradient.
- C. Eine Größe, deren Gradient eine anschauliche Bedeutung hat.

Aufgabe 2

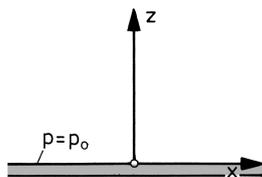
Man kann mit Hilfe der Eulerschen Grundgleichung der Hydrostatik auch die Druckverteilung in einem strömenden Fluid berechnen, wenn es ein (bewegtes) Koordinatensystem gibt, von dem aus das Fluid ruht.



Ein Beispiel dafür ist die Strömung in einem teilweise mit Wasser gefüllten zylindrischen Topf, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse rotiert. In einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Koordinatensystem ist das Fluid in Ruhe, und in diesem System gilt die Eulersche Grundgleichung. Man muss allerdings als äußere Kraft dann die im mitbewegten System wirksamen Kräfte ansetzen. Man verwendet zweckmäßig Zylinderkoordinaten.

Im ruhenden System wirkt auf jedes Teilchen außer der Fallbeschleunigung $\underline{f}_1 = -g\underline{e}_z$ die Zentripetalbeschleunigung $\underline{f}_2 = -\omega^2 r \underline{e}_r$, im mitbewegten System wirkt dieselbe Fallbeschleunigung und die Zentrifugalbeschleunigung $\underline{f}_3 = -\underline{f}_2 = \omega^2 r \underline{e}_r$.

- A. Prüfen Sie, ob die resultierende Kraftdichte $\underline{f} = \omega^2 r \underline{e}_r - g \underline{e}_z$ ein Potential besitzt!
- B. Falls das der Fall ist, berechnen Sie es!

Aufgabe 3

- A. Berechnen Sie die Abnahme des Drucks in der Atmosphäre mit der Höhe H über dem Erdboden unter der Annahme, dass die Luft ein isothermes ideales Gas ist und am Erdboden der Druck p_0 herrscht! (Die gesuchte Formel nennt man die barometrische Höhenformel.)
- B. In welcher Höhe hat der atmosphärische Luftdruck bei einer Temperatur von 20°C um 3% abgenommen?

Zusatzaufgabe

Berechnen Sie die Abnahme des Druckes in der Atmosphäre mit der Höhe H über dem Erdboden unter der Annahme, dass eine isentrope Luftschichtung vorliegt und am Erdboden der Druck p_0 und die Dichte ρ_0 herrschen!

Lösungshinweis: Für ideale Gase gilt bei Isentropie $p/\rho^k = \text{const.}$

LE 2.3 Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik für inkompressible Fluide

In dieser Lehrinheit wollen wir die Druckverteilung in einem ruhenden inkompressiblen Fluid berechnen

Wir betrachten jetzt inkompressible Fluide, d. h. Fluide, in denen die Dichte ρ weder von der Temperatur noch vom Druck abhängt, also eine Materialkonstante ist:

$$\rho = \text{const.} \quad (2.3-1)$$

Das kann man im Allgemeinen bei Flüssigkeiten, aber mit oft ausreichender Näherung auch bei Gasen bei Höhenunterschieden unter 250 m voraussetzen, vgl. Aufgabe 3 B von Lehrinheit 2.2. Dann lässt sich das Eulersche Grundgesetz (2.1-7) in der Form

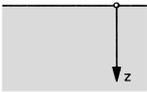
$$\underline{f} = \text{grad} \frac{p}{\rho} \quad (2.3-2)$$

schreiben; in einem inkompressiblen Fluid ist Ruhe also genau dann möglich, wenn die Kraftdichte rotorfrei ist. Führt man in (2.3-2) nach (2.2-1) das Potential U ein, so erhält man $\text{grad}(U + p/\rho) = \underline{0}$, oder längs einer beliebigen Kurve zwischen den Punkten P_1 und P_2 integriert,

$$U_2 - U_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad (2.3-3)$$

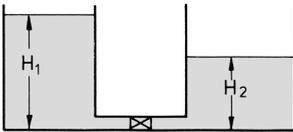
Für den Spezialfall des Schwerfeldes erhält man mit (2.2-2)

$$\boxed{g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0.} \quad \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ z \end{array} \right\} \quad (2.3-4)$$



Dabei ist die z -Achse wieder entgegen der Schwerkraft zu orientieren. Als Beispiel berechnen wir die Zunahme des Druckes in einem Wasserbecken mit der Tiefe, die sog. hydrostatische Druckverteilung. Dabei ist es üblich, den Ursprung des Koordinatensystems in die Wasseroberfläche zu legen und *die z -Achse abweichend von den bisherigen Formeln in Richtung der Schwerkraft zu orientieren*. Mit $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $p_1 = p_0$ und $p_2 = p(z)$ folgt dann aus (2.3-4)

$$p(z) = p_0 + \rho g z. \quad \downarrow z \quad (2.3-5)$$



Eine Folge dieser Gleichung ist das Gesetz von den kommunizierenden Gefäßen: Sind zwei mit einer Flüssigkeit gefüllte Gefäße durch eine Rohrleitung verbunden, so ist die Flüssigkeit in der Rohrleitung genau dann in Ruhe, wenn der Flüssigkeitsspiegel in beiden Gefäßen gleich hoch ist. Zum Beweis denken wir uns die Rohrleitung durch ein geschlossenes Ventil unterbrochen. Wenn jetzt, wie in unserer Skizze, der Flüssigkeitsspiegel links die Höhe H_1 und rechts die Höhe $H_2 < H_1$ hat, herrscht nach (2.3-5) links vom Ventil der Druck $p_1 = p_0 + \rho g H_1$ und rechts vom Ventil der Druck $p_2 = p_0 + \rho g H_2$, d. h. es ist $p_1 > p_2$. Öffnet man das Ventil, strömt Flüssigkeit vom linken Gefäß in das rechte, bis der Druckunterschied ausgeglichen, d. h. der Wasserspiegel in beiden Gefäßen gleich hoch ist.

Tabellarische Zusammenfassung der Lehreinheiten 2.1 bis 2.3

Allgemein gilt

$$\rho \underline{f} = \text{grad } p \iff \text{rot}(\rho \underline{f}) = \underline{0}. \quad (2.1-7), (2.1-8)$$

Gilt außerdem

$$\underline{f} = - \text{grad } U \iff \text{rot } \underline{f} = \underline{0}, \quad (2.2-1)$$

so sind zwei Fälle möglich:

Barotrope Schichtung

Beispiele:

isotherme Schichtung eines idealen

Gases: $p/\rho = \text{const}$,

isentropische Schichtung eines idealen

Gases: $p/\rho^k = \text{const}$.

Dann gilt:

$$U_2 - U_1 + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (2.2-5)$$

Inkompressible Fluide

Beispiele:

Flüssigkeiten,

Gase bei geringen Höhenunterschieden.

Dann gilt:

$$U_2 - U_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad (2.3-3)$$

Ist speziell

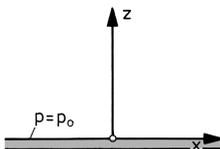
$$\underline{f} = (0, 0, -g) \iff U = gz, \quad \uparrow z \quad (2.2-2)$$

dann gilt

$$g(z_2 - z_1) + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dp}{\rho} = 0. \quad \uparrow z \quad (2.2-6)$$

Beispiel:

barometrische Höhenformel (Lehreinheit 2.2, Aufgabe 3)



$$p(H) = p_0 e^{-\frac{gH}{RT}}$$

$$g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0. \quad \uparrow z \quad (2.3-4)$$

Beispiel:

hydrostatische Druckverteilung



$$p = p_0 + \rho g z \quad (2.3-5)$$

Aufgabe 1

Das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik $\rho \underline{f} = \text{grad } p$ kann nur erfüllt sein, wenn

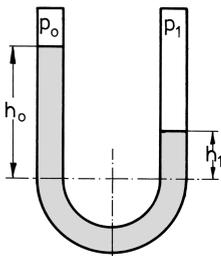
- A. der Druck p ein Potential besitzt,
- B. die spezifische Massenkraft \underline{f} ein Potential besitzt und ρ eine Funktion des Druckes p und der Temperatur T ist,
- C. das Produkt $\rho \underline{f}$ ein Potential besitzt,
- D. \underline{f} ein Potential besitzt und $\rho = \text{const}$ oder $\rho = \rho(p)$ ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Druck in einem Wasserbecken in einer Tiefe von 10 m, wenn der Umgebungsdruck 10^3 hPa beträgt!

- A. 10^4 mm WS
- B. 28,7 PSI
- C. 1981 hPa

Hinweis: Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Druckeinheiten finden Sie in Tabelle 8.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Höhendifferenz $h_0 - h_1$, die sich in einem U-Rohr-Manometer einstellt, wenn auf den beiden Schenkeln die Drücke p_0 und p_1 lasten!