

Joachim Erven, Jiří Horák

Mathematik für angewandte Wissenschaften

De Gruyter Studium

Weitere empfehlenswerte Titel



Mathematik für angewandte Wissenschaften.
Ein Vorkurs für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler
Joachim Erven, Matthias Erven, Josef Hörwick, 6. Auflage, 2017
ISBN 978-3-11-052684-4, e-ISBN (PDF) 978-3-11-052686-8,
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-052697-4



Mathematik für angewandte Wissenschaften.
Ein Lehrbuch für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Joachim Erven, Dietrich Schwägerl, 5. Auflage, 2018
ISBN 978-3-11-053694-2, e-ISBN (PDF) 978-3-11-053711-6,
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-053723-9



Mathematik für angewandte Wissenschaften.
Ein Übungsbuch für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Joachim Erven, Dietrich Schwägerl, Jiří Horák, 3. Auflage, 2019
ISBN 978-3-11-054889-1, e-ISBN (PDF) 978-3-11-055350-5,
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-055365-9



Martingale und Prozesse
René L. Schilling, 2018
ISBN 978-3-11-035067-8, e-ISBN (PDF) 978-3-11-035068-5,
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-038751-3



Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen.
Anfangswertprobleme und lineare Randwertprobleme
Martin Hermann, 2. Auflage, 2017
ISBN 978-3-11-050036-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-049888-2,
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-049773-1

Joachim Erven, Jiří Horák

Mathematik für angewandte Wissenschaften

Ein Taschenbuch für Ingenieure und Naturwissenschaftler

2. Auflage

DE GRUYTER

Autoren

Prof. Dr. Joachim Erven
joaerven@t-online.de

Prof. Dr. Jiří Horák
jiri.horak@thi.de

ISBN 978-3-11-053712-3
e-ISBN (PDF) 978-3-11-053716-1
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-053724-6

Library of Congress Control Number: 2018954117

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2018 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston
Coverabbildung: Thomas Albrecht/EyeEm/getty images
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com

Ein paar Worte voraus...

Vor fast acht Jahren erschien unter dem Titel „Taschenbuch der Ingenieurmathematik“ die erste Auflage dieses Buches, damals noch im Oldenbourg Verlag. Als dieser vor einigen Jahren vom De Gruyter Verlag übernommen wurde, entstand im Zusammenhang mit der Neuordnung des Verlagsprogramms die Idee, vier Werke, an denen der erstgenannte Autor beteiligt ist, unter dem einheitlichen Rahmen „Mathematik für angewandte Wissenschaften“ mit differenzierenden Untertiteln zusammenzufassen. Mit dieser Namensgebung sollte noch stärker unterstrichen werden, dass die Mathematik hier vornehmlich unter dem Aspekt der Anwendung behandelt wird, was inzwischen weit über die klassische Ingenieurmathematik hinausgeht. Das Vorkursbuch und das Lehrbuch aus dieser Reihe sind in den letzten Monaten erschienen, das Übungsbuch erscheint bald nach diesem Taschenbuch.

Außerdem ist Jiří Horák als zweiter Autor hinzugekommen. Er hat die Entstehung der Erstauflage bereits im Hintergrund begleitet und beim Korrekturlesen einige wertvolle Hinweise gegeben. Inzwischen ist er selbst Professor an der TH Ingolstadt und hat an der Erstellung dieser zweiten Auflage wesentlichen Anteil genommen. Als aktiver Hochschullehrer hat er durch den ständigen Kontakt mit den Studierenden eher die Möglichkeit, neuere Entwicklungen aufzunehmen als der erstgenannte Autor, der inzwischen emeritiert ist.

Nichtsdestoweniger wurde das bewährte Konzept der Erstauflage beibehalten: Das vorliegende Werk soll Studierende an Universitäten und Hochschulen, die als Anwender Mathematik studieren, während ihres gesamten Studiums und im Berufsleben danach als nützliches Nachschlagewerk für möglichst alle für sie relevanten mathematischen Sachverhalte zur Verfügung stehen. Deshalb haben wir uns um eine möglichst anschauliche Darstellung, unterstützt durch viele Abbildungen, bemüht, ohne jedoch die notwendige mathematische Strenge und Exaktheit zu vernachlässigen. Ein detailliertes Stichwortverzeichnis unterstützt unser Anliegen.

Der Aufbau des ersten Teils (Kapitel 1-9) entspricht etwa dem des von J. Erven und D. Schwägerl verfassten Lehrbuchs, das in der gleichen Reihe erschienenen ist. Es werden die Grundlagen dargestellt, wie sie in jedem Bachelor-Studiengang einer ingenieur- oder naturwissenschaftlichen Disziplin benötigt werden. Dabei nehmen Teile der diskreten Mathematik (Lineare Algebra und Algebra) aufgrund ihrer für die Anwendung gestiegenen Bedeutung einen größeren Raum ein als in früheren vergleichbaren Werken. In den Kapiteln 9-16 werden weitergehende Themen behandelt, die insbesondere in den universitären Studiengängen der Elektro- und Informationstechnik sowie in allen Master-Studiengängen der Ingenieur- und Naturwissenschaften eine zunehmend wichtige Rolle spielen. Hervorzuheben sind hier die Kapitel über Numerik und Funktionentheorie, die wir in keinem uns bekannten Taschen-

buch in dieser Weise behandelt finden. Im Kapitel 17 sind – des schnelleren Auffindens wegen – häufig benutzte Integrale, Reihenentwicklungen und statistische Tabellen zusammengefasst. Wir halten so etwas auch in Zeiten des überall verfügbaren Internets nach wie vor für hilfreich und meist bequemer in der Handhabung. Teile des Anhangs basieren übrigens auf einem älteren Buch, an dem einer der Autoren mitgearbeitet hat und das unter dem Titel „H. Wörle, H.-J. Rumpf und J. Erven: Taschenbuch der Mathematik“ 2015 als Reprint vom De Gruyter Verlag neu herausgegeben wurde.

Obwohl das vorliegende Buch aus unseren an verschiedenen Fakultäten und Hochschulen gehaltenen Vorlesungen entstanden ist, kann es kein Lehrbuch – und erst recht nicht den Vorlesungsbesuch – ersetzen. Das wird schon daran deutlich, dass bis auf wenige Ausnahmen auf Beispiele verzichtet wurde – einerseits deshalb, um es bei der Fülle des Stoffs noch einigermaßen kompakt und übersichtlich zu halten, andererseits aber auch, um es als Formelsammlung in Prüfungen zulassen zu können.

In der vorliegenden zweiten Auflage wurden etliche leider immer wieder vorkommende Schreibfehler beseitigt, an einigen Stellen die Darstellungsweise geglättet und mathematische Unsauberkeiten bereinigt. Außerdem wurden Inhalte ergänzt.

Es gibt viele Personen, die bei der Erstellung dieses Buches mitgewirkt haben und denen wir herzlich danken möchten: Da sind zunächst einmal Dietrich Schwägerl und Matthias Erven, Mitautoren bei anderen Werken dieser Reihe, zu nennen – dem einen für die Überlassung etlicher Grafiken, dem anderen für kritisches Korrekturlesen und viele fachliche Hinweise. Christine Erven hat das Abtippen der Integraltafeln übernommen und darüber hinaus den gesamten Text hinsichtlich Schreibfehler und Layoutgestaltung überprüft. Zudem sind hier die MINT-Lektorate der beiden Verlage zu nennen – namentlich Anton Schmid, Oldenbourg Verlag, für viele wertvolle Hinweise zur Konzeption und technischen Herstellung sowie Nadja Schedensack, De Gruyter Verlag, für die gute Zusammenarbeit.

Unser besonderer Dank gilt jedoch unseren Familien für die große Nachsicht, die sie bei der Erstellung der Texte mit uns hatten.

München und Ingolstadt, im Juli 2018

J. Erven, J. Horák

Inhalt

Ein paar Worte voraus...	V
1 Grundlagen	1
1.1 Aussagenlogik und Mengenlehre	1
1.2 Relationen und Funktionen.....	7
1.3 Algebraische Strukturen	9
1.4 Zahlbereiche	12
1.5 Die Arithmetik der reellen Zahlen.....	17
1.6 Elementare Geometrie	22
1.7 Ebene Trigonometrie.....	26
1.8 Koordinatensysteme	30
1.9 Kegelschnitte	32
1.10 Räumliche Körper	39
2 Grundzüge der Linearen Algebra	45
2.1 Vektorraum, Unterraum, Basis	45
2.2 Matrizen und Determinanten.....	46
2.3 Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme	53
2.4 EUKLIDische Räume und Orthogonalität.....	56
2.5 Eigenwerte.....	58
2.6 Anwendung: Analytische Geometrie im \mathbb{R}^3	60
3 Elementare Funktionen	65
3.1 Funktionen einer reellen Veränderlichen	65
3.2 Rationale Funktionen	67
3.3 Potenz- und Wurzelfunktionen.....	72
3.4 Exponential- und Logarithmus-, Hyperbel- und Areefunktionen.....	74

3.5	Trigonometrische und Arcus-Funktionen	78
3.6	Komplexe Funktionen	82
4	Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen	85
4.1	Konvergenz von Folgen	85
4.2	Grenzwert von Funktionen und Stetigkeit.....	88
4.3	Ableitung, Tangente, Differential	91
4.4	Elementare Ableitungen und Ableitungsregeln.....	94
4.5	Anwendungen der Differentialrechnung	97
4.6	Differentiation vektorwertiger Funktionen	101
5	Integralrechnung einer reellen Veränderlichen	103
5.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	103
5.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und bestimmtes Integral	104
5.3	Integriertechniken	110
5.4	Anwendungen der Integralrechnung	113
6	Ebene und räumliche Kurven	119
6.1	Als Graphen darstellbare ebene Kurven.....	119
6.2	Ebene Kurven in Polarkoordinaten	121
6.3	Ebene Kurven in Parameterdarstellung	124
6.4	Räumliche Kurven	128
7	Reihen	131
7.1	Grundbegriffe und Konvergenz	131
7.2	Potenzreihen.....	136
7.3	FOURIER-Reihen	139
8	Mehrdimensionale Analysis	145
8.1	Der metrische Raum \mathbb{R}^n	145
8.2	Funktionen mehrerer Veränderlicher	147
8.3	Partielle und vollständige Differenzierbarkeit.....	148
8.4	Gradient, Richtungsableitung, Kettenregel	152
8.5	Anwendungen der Differentialrechnung	155
8.6	Doppel- und Dreifachintegrale.....	160

9	Gewöhnliche Differentialgleichungen	167
9.1	Grundlagen	167
9.2	Differentialgleichungen erster Ordnung	170
9.3	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	173
9.4	Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	176
9.5	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	181
9.6	Lineare Rand- und Eigenwertaufgaben	183
9.7	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	185
10	Partielle Differentialgleichungen	189
10.1	Grundlegende Begriffe	189
10.2	Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	190
10.3	Lineare und quasilineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	194
11	Vektoranalysis	197
11.1	Kurven und Flächen im Raum	197
11.2	Vektorfelder	199
11.3	Divergenz und Rotation	202
11.4	Kurvenintegrale	203
11.5	Oberflächenintegrale	206
11.6	Integralsätze von GAUSS, GREEN und STOKES	207
12	Integraltransformationen	209
12.1	FOURIER-Transformation	209
12.2	LAPLACE-Transformation	213
13	Funktionentheorie	217
13.1	Komplexe Differentiation	217
13.2	Komplexe Integration	218
13.3	Die klassischen Sätze der Funktionentheorie	220
13.4	Isolierte Singularitäten und LAURENT-Reihen	221
13.5	Der Residuenkalkül	224
13.6	Konforme Abbildungen und MÖBIUS-Transformationen	227
14	Grundzüge der Numerik	233
14.1	Grundlagen	233

14.2	Nichtlineare Gleichungen.....	236
14.3	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	240
14.4	Interpolation	245
14.5	Ausgleichsrechnung	251
14.6	Approximation durch orthogonale Funktionen	253
14.7	Numerische Integration.....	256
14.8	Numerische Differentiation.....	263
14.9	Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.....	265
15	Wahrscheinlichkeitsrechnung	273
15.1	Kombinatorische Grundlagen	273
15.2	Ereignisse und Wahrscheinlichkeit	275
15.3	Zufallsvariable und Verteilung.....	278
15.4	Maßzahlen einer Verteilung	281
15.5	Spezielle diskrete Verteilungen.....	284
15.6	Spezielle stetige Verteilungen.....	287
15.7	Mehrdimensionale Verteilungen.....	291
15.8	Testverteilungen.....	295
16	Statistik	299
16.1	Grundlagen.....	299
16.2	Schätzen von Parametern	300
16.3	Testen von Hypothesen.....	304
17	Anhang: Tafeln und Tabellen	309
17.1	Unbestimmte Integrale	309
17.2	Bestimmte Integrale	321
17.3	Potenzreihen.....	325
17.4	FOURIER-Reihen.....	328
17.5	FOURIER-Transformierte	334
17.6	LAPLACE-Transformierte.....	336
17.7	Statistische Tabellen.....	340
18	Literaturhinweise	351
	Stichwortverzeichnis	353

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik und Mengenlehre

Definition:

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde (meist ein grammatikalisch korrekter Satz!), von dem eindeutig bestimmt werden kann, ob es *wahr* (*w*, *true*, 1) oder *falsch* (*f*, *false*, 0) ist.

Wesentlich für die sogenannte *Aussagenlogik* ist also die Tatsache, dass stets eindeutig feststellbar ist, welchen *Wahrheitswert* – *wahr* oder *falsch* – eine Aussage *A* hat; man spricht von der *Zweiwertigkeit* („tertium non datur“¹⁾) der Logik. Auf Grund dessen können zusammengesetzte Aussagen durch die Festlegung ihrer Wahrheitswerte – in Abhängigkeit von denen der Einzelaussagen – definiert werden. Häufig entsprechen diese dem umgangssprachlichen Gebrauch (zum Beispiel bei Verneinung oder Und-Verknüpfung), bei einigen, wie etwa Oder-Verknüpfung und Folgerung, ist allerdings Vorsicht geboten.

Negation (Verneinung)

Umgangssprachlich verneint man eine Aussage meist durch Hinzusetzen des Wortes „nicht“. Die so aus *A* erhaltene Aussage \bar{A} (auch mit $\neg A$ bezeichnet, gelesen „nicht *A*“, „non *A*“ oder einfach „*A* quer“) hat – wie im alltäglichen Sprachgebrauch – genau die umgekehrten Wahrheitswerte wie *A*. Präzise wird dies durch sogenannte *Wahrheitstabeln* dargestellt, die man also in dieser Form auch zur Definition der *Negation* hernehmen kann:

<i>A</i>	\bar{A}
<i>w</i>	<i>f</i>
<i>f</i>	<i>w</i>

¹⁾ lat.: Es gibt kein Drittes.

Konjunktion (Und-Verknüpfung, AND)

Umgangssprachlich wird „A und B“ nur dann als zutreffend angesehen, wenn beide beteiligten Einzelaussagen wahr sind, in den drei anderen Fällen (eine der beiden falsch und die andere wahr sowie beide falsch) ist „A und B“ falsch. Der Gebrauch in der mathematischen Logik ist der gleiche, die *Konjunktion* der beiden Aussagen A und B , geschrieben als $A \wedge B$ (gelesen „A und B“ oder „A et B“) wird über die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Auf diese Weise können insgesamt 16 verschiedene Wahrheitstafeln erzeugt werden (in der dritten Spalte kann an jeder der 4 Stellen w oder f stehen), es gibt also – anders ausgedrückt – 16 verschiedene 2-stellige Aussageverknüpfungen. Von diesen sind außer der Konjunktion noch die *Disjunktion* (Oder-Verknüpfung, OR; geschrieben $A \vee B$, gelesen „A oder B“), die *Implikation* (Folgerung; geschrieben $A \Rightarrow B$, gelesen „aus A folgt B“ oder „wenn A dann B“) und die *Äquivalenz* (Gleichwertigkeit; geschrieben $A \Leftrightarrow B$, gelesen „A äquivalent B“) von Bedeutung. Sie werden durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Zu beachten ist, dass die Disjunktion stets nichtausschließend gemeint ist, sie also nur falsch ist, wenn beide Teilaussagen falsch sind, während in der Umgangssprache oft „entweder – oder“ gemeint ist. Auch bei der Folgerung wird in der Umgangssprache häufig „wenn A dann B“ mit „wenn nicht A dann nicht B“ gleichgesetzt, was der Äquivalenz, aber nicht der Implikation entspricht. Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist (siehe oben) nur dann falsch, wenn die *Prämisse* A wahr und gleichzeitig die *Konklusion* B falsch ist.

In den beiden ersten Spalten sind alle denkbaren Kombinationen der Wahrheitswerteverteilungen der Einzelaussagen (insgesamt 4) aufgeführt, aus der dritten Spalte entnimmt man, dass nur im Falle, wo A und B wahr sind, auch $A \wedge B$ wahr ist. Das bedeutet aber auch, dass $B \wedge A$ die gleiche Wahrheitswerteverteilung hat wie $A \wedge B$, $A \wedge B$ und $B \wedge A$ sind logisch gleichbedeutend, „ $A \wedge B$ entspricht $B \wedge A$ “ ist ein aussagenlogisches Gesetz.

Aussagenlogische Gesetze (Tautologien)

Offensichtlich ergeben sich die gleichen Verteilungen der Wahrheitswerte, wenn man bei $A \wedge B$, $A \vee B$ oder $A \Leftrightarrow B$ A und B die Rollen tauschen lässt, $A \wedge B$ und $B \wedge A$ sind also logisch gleichbedeutend, „ $A \wedge B$ entspricht $B \wedge A$ “ ist ein *aussagenlogisches Gesetz*. Weitere wichtige Tautologien sind:

$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativgesetz
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativgesetz
$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow A$	Kommutativgesetz
$A \Rightarrow B$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	Kontrapositionsregel
$A \Rightarrow B$	$\overline{(A \wedge \overline{B})}$	
$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$	Ringschluss-Regel
$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	de MORGAN - Regel
$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	de MORGAN - Regel
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivgesetz
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivgesetz

Aussageformen

Der Ausdruck „ $x > 2$ “ stellt ohne weitere Information über x keine Aussage im oben definierten Sinn dar. Steht die Variable x nämlich für irgendein Tier, so ergibt sich Unsinn, setzt man jedoch für x eine Zahl ein, so ergibt sich eine – wahre oder falsche – Aussage. Es liegt hier eine sogenannte Aussageform vor, die erst durch Angabe eines Einsetzungsbereichs für x zu einer Aussage wird.

Definition:

Eine *Aussageform* ist ein sprachliches Gebilde mit mindestens einer Variablen (Leerstelle). Durch Einsetzen von entsprechend vielen Elementen aus angegebenen *Einsetzungsbereichen* wird daraus eine Aussage.

Man schreibt $A(x)$ bzw. $A(x_1, \dots, x_n)$, wobei x bzw. x_1, \dots, x_n für Objekte aus den Einsetzungsbereichen E bzw. E_1, \dots, E_n stehen.

Interessant werden Aussageformen vor allem durch die häufig benutzte Möglichkeit der *Quantisierung*. Will man ausdrücken, dass eine Aussageform $A(x)$ für jedes Objekt x aus dem Einsetzungsbereich E gilt, so benutzt man den sogenannten *All-Quantor* (geschrieben: $\forall x: A(x)$, gelesen: „Für alle x (aus E) gilt $A(x)$.“); die Tatsache, dass eine Aussageform $A(x)$ für mindestens ein Objekt x aus dem Einsetzungsbereich E wahr ist, wird durch den

Existenz-Quantor $\exists x : A(x)$ („Es gibt (mindestens) ein x aus E , für das $A(x)$ gilt) beschrieben. Durch Benutzung der Mengenschreibweise (siehe nächster Abschnitt) wird die Benutzung der Quantoren noch präziser:

All-Quantor: $\forall x \in E : A(x)$ Existenz-Quantor: $\exists x \in E : A(x)$

Insbesondere bei Verneinungen quantisierter Aussageformen ist die Benutzung der Quantoren-Schreibweise im Vergleich zur Umgangssprache kürzer und vor allem exakter: Es ist nicht ganz klar, ob mit „Für alle x gilt $A(x)$ nicht.“ gemeint ist, dass $A(x)$ nicht allgemeingültig ist (formal: $\overline{\forall x : A(x)}$) oder dass $A(x)$ nie gilt (formal: $\forall x : \overline{A(x)}$). Es gelten folgende Entsprechungen für Negationen quantisierter Aussageformen:

$\overline{\forall x : A(x)}$	$\exists x : \overline{A(x)}$
$\overline{\exists x : A(x)}$	$\forall x : \overline{A(x)}$
$\overline{\forall x : (A(x) \wedge B(x))}$	$\exists x : (\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)})$
$\overline{\exists x : (A(x) \wedge B(x))}$	$\forall x : (\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)})$
$\overline{\forall x : (A(x) \vee B(x))}$	$\exists x : (\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)})$
$\overline{\exists x : (A(x) \vee B(x))}$	$\forall x : (\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)})$
$\overline{\forall x : (A(x) \Rightarrow B(x))}$	$\exists x : (A(x) \wedge \overline{B(x)})$
$\overline{\exists x : (A(x) \Rightarrow B(x))}$	$\forall x : (A(x) \wedge \overline{B(x)})$

Eine widerspruchsfreie exakte Definition des Begriffs „Menge“ ist schwierig, hier aber auch nicht erforderlich. Der Begriff soll bei den abstrakten Objekten der Mathematik analog zum alltäglichen Sprachgebrauch verwendet werden, also eine Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Objekten, Elemente genannt, zu einem Ganzen bezeichnen. Um Widersprüche zu vermeiden, geht man von der Existenz einer Grundmenge Ω aus, die sich sehr häufig aus dem Zusammenhang ergibt (Menge aller reellen Zahlen, Menge aller Punkte in der Ebene, Menge aller Matrizen o.Ä.).

Bezeichnungen:

Mengen werden meist mit Großbuchstaben (A, M, Ω, \mathbb{M} o.Ä.) bezeichnet, ihre Elemente häufig mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben.

$a \in M$ – gelesen: „ a (ist ein) Element von M “ – bedeutet, dass das Element a zur Menge M gehört.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset oder $\{ \}$ bezeichnet. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass die Aussage $x \in \emptyset$ stets falsch ist.

Eine Menge M kann durch Aufzählen ihrer Elemente oder durch Angabe einer kennzeichnenden Eigenschaft beschrieben werden. $M = \{x \in \Omega \mid A(x)\}$ ist also die Menge aller derjenigen Elemente aus der Grundmenge Ω , für die $A(x)$ eine wahre Aussage ist.

Definition:

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B (bzw. *B Obermenge* von A), wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt dafür $A \subseteq B$. (bzw. $B \supseteq A$), anders formuliert:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge B heißt die *Potenzmenge* von B und wird mit $\mathbb{P}(B)$ bezeichnet.

Eine gegebene Menge B besitzt also stets mindestens die beiden Teilmengen \emptyset und B selbst, die sogenannten *trivialen* Teilmengen. Weitere Teilmengen A von B heißen *echte* Teilmengen, wofür häufig die Schreibweise $A \subset B$ benutzt wird.

Allgemein besitzt die Potenzmenge einer n -elementigen Menge 2^n Elemente.

Definition:

(i) Zwei Mengen A und B heißen *gleich* (geschrieben: $A = B$) genau dann, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ ist, kurz:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

(ii) Der *Durchschnitt* (die *Schnittmenge*) von A und B (geschrieben $A \cap B$) ist die Menge aller derjenigen Elemente x aus Ω , die sowohl in A als auch in B liegen. Es gilt also:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

(iii) Die *Vereinigungsmenge* von A und B (geschrieben $A \cup B$) ist die Menge aller derjenigen Elemente x aus Ω , die in A oder B liegen. Es gilt also:

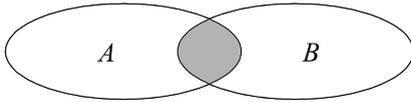
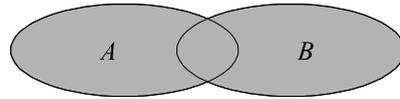
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

(iv) Die *Differenz-* oder *Restmenge* A ohne B (geschrieben $A \setminus B$) ist die Menge aller derjenigen Elemente x aus Ω , die zu A , aber nicht zu B gehören. Es gilt also:

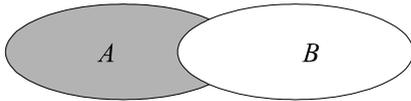
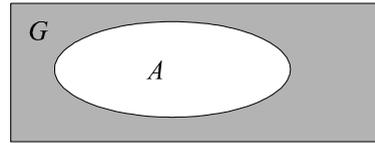
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

(v) Die *Differenzmenge* aus Grundmenge Ω und A heißt das *Komplement* von A und wird mit $C_{\Omega}(A)$ oder \overline{A} bezeichnet.

Mengenbeziehungen und -verknüpfungen werden häufig mit sogenannten VENN-Diagrammen veranschaulicht. In den Bildern 1.1.1 – 1.1.4 sind die oben definierten Begriffe jeweils schattiert dargestellt.

Bild 1.1.1: Der Durchschnitt $A \cap B$ Bild 1.1.2: Die Vereinigung $A \cup B$

Hieraus ist unmittelbar zu ersehen, dass $A \cap B$ Teilmenge von sowohl A als auch B ist; andererseits sind A und B Teilmengen von $A \cup B$.

Bild 1.1.3: Die Differenzmenge $A \setminus B$ Bild 1.1.4: Das Komplement $C_G(A)$ von A

Für die Verknüpfungen von Mengen gelten folgende

Regeln:

- | | | |
|-------|--|---|
| (i) | $A \cap B = B \cap A$
(Kommutativgesetze) | $A \cup B = B \cup A$ |
| (ii) | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(Assoziativgesetze) | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| (iii) | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(Distributivgesetze) | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| (iv) | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(DE MORGANSche Gesetze) | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ |
| (v) | $A \cap A = A$
(Idempotenzgesetze) | $A \cup A = A$ |
| (vi) | $A \cap G = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
(Neutralitätsgesetze) | $A \cup G = G$
$A \cup \emptyset = A$ |
| (vii) | Für $A \subseteq B$ gilt: $A \cap B = A$ | und $A \cup B = B$ |

Für n gegebene Mengen A_1, A_2, \dots, A_n erhält man die folgende

Definition:

- (i) Die Menge aller geordneten n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) mit $x_i \in A_i$ (für jedes $i = 1, \dots, n$) heißt *kartesisches Produkt* der Mengen A_1, A_2, \dots, A_n und wird mit $A_1 \times \dots \times A_n$ bezeichnet. Für $n = 2$, also für die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A_1$ und $y \in A_2$, heißt das kartesische Produkt auch *Paarmenge* der Mengen A_1 und A_2 .
- (ii) Ist jedes $A_i = A$, so schreibt man auch A^n statt $A \times \dots \times A$.

1.2 Relationen und Funktionen

Definition:

- (i) Eine Teilmenge R von $M \times N$ heißt (*binäre*) *Relation auf $M \times N$* oder *Relation von M nach N* . Statt $(x, y) \in R$ schreibt man meist $x R y$.
- (ii) Ist R eine Relation auf $M \times N$, so nennt man $\mathbb{D} = \{x \in M \mid \exists y \in N : x R y\}$ den *Definitionsbereich* und $\mathbb{W} = \{y \in N \mid \exists x \in M : x R y\}$ den *Werte- oder Bildbereich* der Relation.

Im Definitions- bzw. Wertebereich werden also alle diejenigen Elemente von M bzw. N zusammengefasst, die in R als erste bzw. zweite Komponente (mindestens einmal) vorkommen.

Die *Umkehrrelation* R^{-1} ist eine Relation auf $N \times M$, sie ist gegeben durch:
 $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Für den Spezialfall $M = N$ (also $R \subseteq M \times M$, man spricht dann einfach von Relationen auf M) können Relationen folgende Eigenschaften haben:

- reflexiv:* $\forall x \in M : x R x$
- symmetrisch:* $\forall x, y \in M : x R y \Rightarrow y R x$
- antisymmetrisch:* $\forall x, y \in M : (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$
- asymmetrisch:* $\forall x, y \in M : (x R y) \Rightarrow \neg(y R x)$
- transitiv:* $\forall x, y, z \in M : (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$

Ist eine Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt sie *Äquivalenzrelation*; liegt statt der Symmetrie Antisymmetrie vor, so spricht man von einer *Halbordnung*. Eine Halbordnung, bei der zusätzlich für alle $x, y \in M$ noch $x R y$ oder $y R x$ gilt, heißt *lineare Ordnung*.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und $x \in M$ fest gewählt, so heißt $\{y \in M \mid x R y\}$ die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich R , sie wird mit $[x]_R$ bezeichnet.

Definition:

Eine Relation f auf $M \times N$ heißt *Funktion (Abbildung)*, wenn

1. $\forall x \in M \exists y \in N : x f y$ und
2. $\forall x \in M \forall y_1, y_2 \in N : x f y_1 \wedge x f y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

ist.

Eine Funktion ist also eine Relation, bei der jedem Element aus M eindeutig ein Element aus N zugeordnet wird. Dies wird auch durch die Schreibweise $f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x)$, ausgedrückt. Der Definitionsbereich \mathbb{D}_f ist also ganz M , während der Wertebereich \mathbb{W}_f , für den man auch $f(M)$ schreibt, im Allgemeinen eine echte Teilmenge von N , dem sogenannten *Zielbereich*, ist. Die Menge $\mathbb{G}_f = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$ heißt *Graph* von f .

Besondere Eigenschaften einer Funktion $f : M \rightarrow N$:

surjektiv: $\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$, also $f(M) = N$.

injektiv: $\forall x_1, x_2 \in M : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$,
also haben verschiedene Argumente verschiedene Werte.

bijektiv: surjektiv und injektiv

Ist $f : M \rightarrow N$ injektiv, so ist die auf dem Wertebereich \mathbb{W}_f definierte Umkehrrelation auch eine Funktion, die sogenannte *Umkehrfunktion* f^{-1} . Durch diese wird also jedem $y \in \mathbb{W}_f$ dasjenige eindeutig bestimmte $x \in M$ zugeordnet, für das $f(x) = y$ gilt. $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ ist somit bijektiv und besitzt deshalb auch eine Umkehrfunktion, diese ist offensichtlich f .

Definition:

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow O$ Funktionen. Die Funktion $g \circ f : M \rightarrow O$, die durch die Zuordnungsvorschrift $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ definiert ist, wird *Komposition, Verknüpfung* oder *Hintereinanderausführung* von g und f genannt.

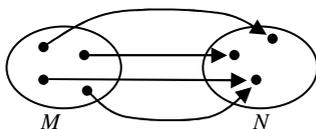


Bild 1.2.1: surjektive Funktion

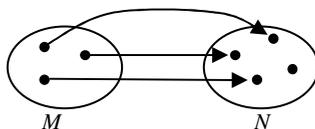


Bild 1.2.2: injektive Funktion

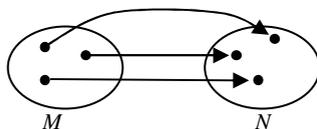


Bild 1.2.3: bijektive Funktion

Offensichtlich gilt für beliebige Funktionen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow M$:

$$f \text{ und } g \text{ sind Umkehrfunktionen zueinander} \Leftrightarrow (\forall x \in M : (g \circ f)(x) = x) \wedge (\forall y \in N : (f \circ g)(y) = y)$$

Man beachte, dass zur Äquivalenz beide All-Aussagen auf der rechten Seite gelten müssen!

1.3 Algebraische Strukturen

Definition:

Gegeben sei eine Menge M .

Eine Funktion $\circ : M \times M \rightarrow M$ heißt eine (*innere*) *Verknüpfung* auf M , (M, \circ) nennt man ein *algebraisches System*.

Eine Verknüpfung heißt *assoziativ* $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in M : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

kommutativ $\Leftrightarrow \forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a$.

Sie besitzt ein *neutrales Element* $\Leftrightarrow \exists e \in M \forall x \in M : x \circ e = e \circ x = x$.

Ist die Verknüpfung assoziativ, so heißt (M, \circ) *Halbgruppe*; existiert zusätzlich ein neutrales Element, so liegt ein *Monoid* vor.

Ein Monoid heißt *Gruppe*, wenn zusätzlich für jedes $a \in M$ ein *inverses Element* $b \in M$ existiert, sodass $a \circ b = b \circ a = e$ gilt. Man kann zeigen, dass b eindeutig bestimmt ist, es wird meist mit a^{-1} bezeichnet. Ist die Gruppe zusätzlich kommutativ, so heißt sie *abelsch*.

Die Menge aller natürlichen Zahlen ohne 0 bilden bezüglich der Addition eine Halbgruppe; nimmt man die 0 hinzu, so erhält man ein Monoid (genauso bezüglich der Multiplikation mit 1 als neutralem Element). Die Menge aller ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe. Demgegenüber ist die Menge aller regulären (n, n) -Matrizen bezüglich der Matrizenmultiplikation (siehe 2.2) eine nicht-abelsche Gruppe.

Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe (G, \circ) heißt *Untergruppe* von G , wenn (U, \circ) (bezüglich der gleichen Verknüpfung) eine Gruppe ist. Äquivalent dazu ist, dass für alle $a, b \in U$ auch $a \circ b^{-1} \in U$ ist.

Gibt es auf M eine zweite Verknüpfung, etwa $*$, so erfüllen \circ und $*$ das Distributivgesetz, wenn für alle $a, b, c \in M$ die Beziehung $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ gilt (ggf. auch \circ und $*$ vertauscht). Ein Beispiel stellen \cup und \cap dar, die beide Distributivgesetze erfüllen.

Häufig ersetzt man \circ durch $+$ und $*$ durch \cdot .

$(R, +, \cdot)$ heißt *Ring*, wenn $(R, +)$ eine abelsche Gruppe, (R, \cdot) eine Halbgruppe ist und die Distributivgesetze $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ gelten; er heißt *kommutativ*, wenn auch $a \cdot b = b \cdot a$ auf R gilt. Üblicherweise wird das neutrale Element bezüglich $+$ mit 0 bezeichnet, auch *Nullelement* genannt. Ist (R, \cdot) ein Monoid, so heißt $(R, +, \cdot)$ *Ring mit Eins(element)*, das neutrale Element bezüglich \cdot wird meist mit 1 bezeichnet.

Von 0 verschiedene Elemente x und y eines Rings heißen *Nullteiler*, wenn $x \cdot y = 0$ ist. Umgekehrt heißt ein Ring *nullteilerfrei*, wenn aus $x \cdot y = 0$ stets $x = 0$ oder $y = 0$ folgt. Einen nullteilerfreien, kommutativen Ring mit Eins nennt man *Integritätsbereich*.

Die Menge aller quadratischen Matrizen der Größe n bildet bezüglich Addition und Multiplikation (siehe 2.2) einen Ring mit Einselement, der aber im Allgemeinen weder kommutativ noch nullteilerfrei ist, die Menge aller ganzen Zahlen (siehe 1.4) bildet hingegen einen Integritätsbereich.

$(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ gilt. Da es außer den rationalen, reellen und komplexen Zahlen weitere wichtige Beispiele von Körpern gibt, sollen hier noch einmal die sogenannten **Körperaxiome** explizit aufgeführt werden:

bezüglich der Addition:

$$\begin{array}{ll} \forall a, b, c \in K : a + (b + c) = (a + b) + c & \text{(Assoziativgesetz)} \\ \forall a, b \in K : a + b = b + a & \text{(Kommutativgesetz)} \\ \exists 0 \in K \forall a \in K : a + 0 = a & \text{(Existenz eines Nullelements)} \\ \forall a \in K \exists (-a) \in K : a + (-a) = 0 & \text{(Existenz eines Negativen)} \end{array}$$

bezüglich der Multiplikation (mit $K^* = K \setminus \{0\}$):

$$\begin{array}{ll} \forall a, b, c \in K : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{(Assoziativgesetz)} \\ \forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a & \text{(Kommutativgesetz)} \\ \exists 1 \in K \forall a \in K : a \cdot 1 = a & \text{(Existenz eines Einselements)} \\ \forall a \in K^* \exists \frac{1}{a} \in K^* : a \cdot \frac{1}{a} = 1 & \text{(Existenz eines Reziproken)} \end{array}$$

bezüglich Addition und Multiplikation:

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Definiert man für beliebige $a \in K$ und $b \in K$ (bzw. $b \in K^*$) die Umkehroperationen Subtraktion bzw. Division in Körpern durch $a - b := a + (-b)$ bzw. $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, so lassen sich aus obigem minimalen Axiomensystem weitere Rechenregeln folgern, die in beliebigen Körpern gelten:

Rechenregeln in Körpern:

- | | | | |
|-------|---|-----|--|
| (i) | $-(-a) = a$ | und | $\frac{1}{\frac{1}{d}} = d$ |
| (ii) | $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ | und | $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ |
| (iii) | $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ | und | $(a \cdot b = a \cdot c) \Rightarrow (a = 0 \vee b = c)$ |
| | | | <i>Nullteilerfreiheit</i> |
| | | | <i>Kürzungsregeln</i> |
| (iv) | $(-1) \cdot a = -a$ | und | $(-a) \cdot b = -ab$ |
| (v) | $a - (-b) = a + b$ | und | $-(a + b) = -a - b$ |
| (vi) | $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} = \frac{a \cdot e + b \cdot d}{d \cdot e}$ | | |
| (vii) | $\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} = \frac{a \cdot b}{d \cdot e}$ | | |

Während die bisher behandelten algebraischen Strukturen für das Rechnen im landläufigen Sinne benötigt werden, sollen nun auf einer Menge M solche algebraischen Systeme mit zwei Verknüpfungen \cup und \cap betrachtet werden, die sowohl in der Schaltungstechnik als auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie angewandt werden.

Definition:

Ein algebraisches System (M, \cup, \cap) heißt *Verband*, wenn bezüglich beider Verknüpfungen Assoziativ-, Kommutativ- und die sogenannten Absorptionsgesetze $a \cup (a \cap b) = a$ und $a \cap (a \cup b) = a$ gelten.

Ein Element $1 \in M$ heißt *Einselement des Verbands*, wenn $1 \cap a = a$ und $1 \cup a = 1$ für alle $a \in M$ gilt. Analog heißt $0 \in M$ *Nullelement*, wenn $0 \cap a = 0$ und $0 \cup a = a$ ist.

Ein Verband mit Null- und Einselement heißt *komplementär*, wenn es zu jedem $a \in M$ ein \bar{a} gibt, sodass $a \cup \bar{a} = 1$ und $a \cap \bar{a} = 0$ ist.

Ein komplementärer Verband mit Eins- und Nullelement, in dem beide Distributivgesetze gelten, heißt *BOOLEscher Verband* oder *BOOLEsche Algebra*.

In jedem Verband gelten die Idempotenzgesetze $a \cup a = a$ und $a \cap a = a$. Die Notation der Verknüpfungen legt ein erstes Beispiel nahe: Für eine beliebige Menge Ω sei M deren Potenzmenge, \cup und \cap bezeichnen Vereinigung und Durchschnitt. Mit Ω als Eins- und der leeren Menge als Nullelement sowie der Differenzmengenbildung als Komplement ist M eine *BOOLEsche Algebra*.

1.4 Zahlbereiche

Natürliche und ganze Zahlen, Teilbarkeit

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnet die Menge aller *natürlichen* Zahlen, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die natürlichen Zahlen sind die kleinstmögliche Teilmenge der reellen Zahlen, die 0 und mit jedem n auch ihren Nachfolger $n+1$ enthalten. Damit hat \mathbb{N} zwar ein kleinstes¹⁾, aber kein größtes Element. Es gilt vielmehr das Axiom von ARCHIMEDES: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. \mathbb{N} ist sowohl bezüglich Addition als auch Multiplikation ein Monoid.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ bildet die Menge der *ganzen* Zahlen. Diese bilden einen Integritätsbereich, aber keinen Körper, da es außer zu 1 und -1 kein Reziprokes in \mathbb{Z} gibt.

Definition:

$a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heißt <i>Teiler</i> von $b \in \mathbb{Z}$ (anders ausgedrückt: a teilt b oder b ist durch a teilbar; geschrieben: $a \mid b$)	\Leftrightarrow	$\exists q \in \mathbb{Z} : q \cdot a = b$
$p \in \mathbb{N}, n \geq 2$, heißt <i>Primzahl</i>	\Leftrightarrow	$\forall a, b \in \mathbb{Z} : (p \mid (a \cdot b) \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b)$
	\Leftrightarrow	p hat nur 1 oder sich selbst als positive Teiler

Für zwei gegebene ganze Zahlen a und b bezeichnet $\text{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler und $\text{kgV}(a, b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b . Zur Bestimmung von $\text{ggT}(a, b)$ mit $a, b > 0$ und $a \geq b$ benutzt man den

Divisionsalgorithmus von EUKLID:

Man dividiere a durch b ganzzahlig. Geht die Division auf, so ist $b = \text{ggT}(a, b)$. Ansonsten bleibt ein ganzzahliger Rest $r_1 < b$, das heißt:

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

Nun dividiere man b durch r_1 , also

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2 \quad \text{mit } r_2 < r_1,$$

und fahre fort mit r_1 durch r_2 , also

$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \quad \text{mit } r_3 < r_2,$$

bis die Division aufgeht:

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n.$$

Der letzte von 0 verschiedene Rest $r_n = \text{ggT}(a, b)$.

Es gilt: $c = \text{ggT}(a, b) \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z} : c = p \cdot a + q \cdot b$.

Insbesondere gilt, wenn a und b teilerfremd sind: $\exists p, q \in \mathbb{Z} : 1 = p \cdot a + q \cdot b$.

Für festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und beliebiges $a \in \mathbb{Z}$ definiert man die *Restklasse* von a modulo n durch $[a]_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \text{ und } x \text{ haben bei Teilung durch } n \text{ den gleichen Rest}\}$, anders formuliert: $[a]_n$ ist die Äquivalenzklasse von a bezüglich der durch

$$a = b \pmod n \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = q \cdot n$$

¹⁾ Manchmal wird 0 nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt, dann gilt diese Beschreibung sinngemäß mit 1 statt 0.

auf \mathbb{Z} definierten Äquivalenzrelation. Da als Reste bei der Teilung durch n nur $0, 1, \dots, n-1$ infrage kommen, gibt es n verschiedene Restklassen modulo n . Die Menge aller dieser Restklassen wird mit \mathbb{Z}_n bezeichnet. Für obige Äquivalenzrelation gilt darüber hinaus:

$$(a = a' \bmod n \text{ und } b = b' \bmod n) \Rightarrow (a + b = a' + b' \bmod n \text{ und } a \cdot b = a' \cdot b' \bmod n)$$

Eine Äquivalenzrelation mit dieser Eigenschaft heißt *Kongruenzrelation*. Deshalb lassen sich auf \mathbb{Z}_n Addition und Multiplikation eindeutig definieren durch:

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n \quad \text{und} \quad [a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

Mit diesen Verknüpfungen ist \mathbb{Z}_n – wie \mathbb{Z} – ein kommutativer Ring mit Eins (mit n Elementen), aber im Allgemeinen kein Integritätsbereich. Es gilt jedoch:

$$\mathbb{Z}_n \text{ ist ein Körper} \Leftrightarrow n \text{ ist eine Primzahl}$$

Rationale und reelle Zahlen

Die Menge aller Brüche $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^+\}$ heißt auch die Menge aller *rationalen* Zahlen und wird mit \mathbb{Q} bezeichnet. Die Darstellung einer rationalen Zahl durch Zähler und Nenner ist nicht eindeutig; erst durch die Forderung, Zähler und Nenner durch $\text{ggT}(p, q)$ zu dividieren, erhält man mit der vollständig gekürzten Darstellung Eindeutigkeit.

Aus der vollständig gekürzten Bruchdarstellung erhält man durch Ausführen der Division die Darstellung einer rationalen Zahl als Dezimalbruch, die endlich oder periodisch sein kann, und zwar ist diese

- endlich, wenn der Nenner nur die Primzahlen 2 oder 5 enthält (etwa 1,23);
- rein-periodisch, wenn der Nenner nicht die Primzahlen 2 oder 5 enthält (etwa $1,\overline{23}$);
- gemischt-periodisch, wenn neben 2 oder 5 noch mindestens eine andere Primzahl im Nenner vorkommt (etwa $1,2\overline{3}$).

Alle anderen unendlichen Dezimalbrüche stellen *irrationale* Zahlen dar. Man unterscheidet dabei zwischen *algebraischen* Zahlen (das sind Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, siehe 3.2) und *transzendenten* Zahlen (alle übrigen irrationalen Zahlen, zum Beispiel π oder e). Rationale und irrationale Zahlen zusammen bilden die *reellen* Zahlen, mit \mathbb{R} bezeichnet.

Auf \mathbb{R} stellt die übliche „<-“Relation eine lineare Ordnung dar, es ist also für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genau eine der drei Aussagen richtig: $x < y$ oder $x > y$ oder $x = y$. Deshalb lassen sich die reellen Zahlen als Zahlengerade darstellen.

Definition:

Eine Teilmenge I von \mathbb{R} heißt *Intervall* $\Leftrightarrow \forall s, t \in I \forall x \in \mathbb{R} : s < x < t \Rightarrow x \in I$

Die Intervalle stellen die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} dar.

Schreibweisen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

offen, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffen.

Es ist zu beachten, dass sich ohne die Voraussetzung $a < b$ leere oder einelementige Intervalle ergeben können. Um diese degenerierten Fälle zu vermeiden, wird meist, wie auch hier, stillschweigend $a < b$ vorausgesetzt.

Definiert man ∞ als ein Element, das nicht zu \mathbb{R} gehört, für das aber die Aussagen „ $x < \infty$ “ und „ $x > -\infty$ “ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wahr sein sollen, so lassen sich damit bequem unbeschränkte Intervalle schreiben, insbesondere:

$]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\} = \mathbb{R}^+$ bzw. $] -\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}^-$ bezeichnen die Menge aller positiven bzw. negativen reellen Zahlen, $] -\infty, \infty[$ ist eine andere Schreibweise für \mathbb{R} .

Der (*Absolut-*) *Betrag* einer reellen Zahl, definiert als $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$, stellt anschaulich den Abstand zwischen a und dem Nullpunkt auf der Zahlengeraden dar.

Rechenregeln für den Absolutbetrag:

1. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ und $|a - b| \geq ||a| - |b||$ (Dreiecksungleichungen)

Rationale und reelle Zahlen sind Körper; die rationalen Zahlen bilden den kleinsten Körper, der die natürlichen Zahlen enthält. Zum numerischen Rechnen und zum Messen reichen die rationalen Zahlen (genauer gesagt: eine Teilmenge davon¹⁾) stets aus.

Dass man trotzdem in der Ingenieurmathematik die reellen und nicht die rationalen Zahlen als Zahlbereich zugrunde legt, liegt an der \mathbb{Q} fehlenden Vollständigkeit. Ein Zahlbereich M (allgemein: ein metrischer Raum M) heißt *vollständig*, wenn in ihm jede CAUCHY-Folge (siehe Abschnitt 4.1) einen Grenzwert besitzt. \mathbb{R} ist die Vervollständigung von \mathbb{Q} , das heißt die hinzugefügten irrationalen Zahlen erhält man als Grenzwerte solcher rationaler CAUCHY-Folgen, die in \mathbb{Q} nicht konvergieren. Man sagt, dass \mathbb{Q} *dicht* in \mathbb{R} liegt. Für das praktische Rechnen heißt das, dass sich jede irrationale Zahl beliebig genau durch eine rationale Zahl annähern lässt. Dies geschieht zum Beispiel bei der Intervallschachtelung.

Komplexe Zahlen

Für manche Anwendungen ist es sinnvoll, den Zahlbereich \mathbb{R} zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} zu erweitern. Die zugrundeliegende Menge ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also die Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen. Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert man zwei Verknüpfungen durch:

Addition: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Multiplikation: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

¹⁾ Diese ist gemeint, wenn in der Informatik von reals (= reelle Zahlen!) die Rede ist.

Mit den so definierten Verknüpfungen ist \mathbb{C} ein Körper. Streng genommen ist \mathbb{R} keine Teilmenge von \mathbb{C} ; identifiziert man jedoch jede reelle Zahl x mit dem Zahlenpaar $(x,0)$, so ist \mathbb{C} eine Zahlbereichserweiterung von \mathbb{R} .

Mit $i := (0,1)$ und obiger Identifikation gilt: $i^2 = -1$ und $(x,y) = x + iy$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Zahl i heißt *imaginäre Einheit*¹⁾ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt x der *Real-* und y der *Imaginärteil* der komplexen Zahl z ($x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$). Damit erhält man für das

Rechnen mit komplexen Zahlen:

Man rechne mit Ausdrücken der Gestalt $x + iy$ wie man es mit reellen Zahlen gewohnt ist, für i^2 setze man jeweils -1 ein.

Da eine komplexe Zahl z durch ein Zahlenpaar (a,b) dargestellt wird, kann man sich z auch als Punkt in der Ebene (bzw. Vektor in der Ebene vom Nullpunkt aus) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems vorstellen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der GAUSSSchen Zahlenebene.

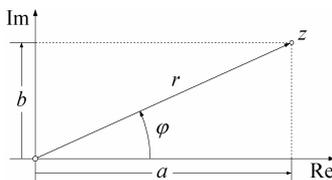


Bild 1.4.1: Komplexe Zahl z in der GAUSSSchen Zahlenebene

Die waagerechte Achse stellt dann gerade die reellen Zahlen dar; auf der senkrechten Achse liegen die komplexen Zahlen, die keinen Realteil haben, die sogenannten (*rein-*)*imaginären* Zahlen.

Beschreibt man den eine komplexe Zahl z in der GAUSSSchen Zahlenebene darstellenden Punkt statt mit kartesischen Koordinaten (a,b) mit seinen Polarkoordinaten (r, φ) , so erhält man die sogenannte *trigonometrische* (auch: *EULERSche*) *Darstellung* von z (siehe Bild 1.4.1). Die Polarkoordinate r wird *Betrag von z* genannt und mit $|z|$ bezeichnet; φ heißt *Argument von z* – geschrieben $\arg z$. Nach den Umrechnungsformeln zwischen kartesischen und Polarkoordinaten (siehe auch Abschnitt 1.8) gilt demnach:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad \text{sowie} \quad \arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \text{Korrekturterm}^{2)}$$

¹⁾ Manchmal, insbesondere bei Anwendungen in der Elektrotechnik, wird j statt i benutzt. Zu beachten ist außerdem, dass die häufig zu findende „Definition“ $i = \sqrt{-1}$ zu diversen Inkonsistenzen führt, sie ist deshalb Unsinn!

²⁾ Auf diesen wird in 1.8 genauer eingegangen.

Bei gegebenen Polarkoordinaten ist $\operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos(\arg z)$ und $\operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin(\arg z)$, insgesamt also $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$, wobei für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ definiert¹⁾ ist.

Mit der trigonometrischen Darstellung komplexer Zahlen lässt sich die Multiplikation in \mathbb{C} anschaulich als Drehstreckung interpretieren: Bei der Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ wird der z_1 darstellende Vektor um den Faktor $|z_2|$ gestreckt und um den Winkel $\arg z_2$ gedreht. Zudem ist diese Darstellung hilfreich beim ganzzahligen Potenzieren:

Satz von DE MOIVRE: $\forall n \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{C} : z^n = |z|^n \cdot e^{i n \arg z}$

Damit ist das sogenannte „komplexe Wurzelziehen“ möglich. Da es im Gegensatz zu \mathbb{R} in \mathbb{C} keine lineare Ordnung gibt, kann es für $q \in \mathbb{C}$ auch nicht die eindeutig bestimmte Wurzel $\sqrt[n]{q}$ geben; man kann lediglich die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, die Lösungen der Gleichung $z^n = q$ (mit gegebenen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $q \in \mathbb{C}$) sind:

Aus der EULERSchen Darstellung $q = |q| \cdot e^{i \arg q}$ erhält man die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = |z_k| \cdot e^{i \varphi_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{mit } |z_k| = \sqrt[n]{|q|} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \frac{\arg q}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \text{)}.$$

Definition:

Für eine gegebene komplexe Zahl $z = x + iy$ ist die zu z *konjugiert komplexe Zahl* \bar{z} (manchmal auch mit z^* bezeichnet) definiert durch $\bar{z} = x - iy$.

In der GAUSSSchen Zahlenebene entspricht also der Übergang zur konjugiert komplexen Zahl einer Spiegelung an der reellen Achse. Es ist damit

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z, \quad \text{aber auch } |\bar{z}| = |z| \quad \text{und} \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Rechenregeln:

1. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
2. $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
3. $z - \bar{z} \in i \cdot \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$
4. $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ und $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ und $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

¹⁾ zur Definition der komplexen e-Funktion siehe auch Abschnitt 3.6

²⁾ Liegen die Winkel in Grad statt im Bogenmaß vor, so ist 2π durch 360° zu ersetzen.

1.5 Die Arithmetik der reellen Zahlen

Potenz, Wurzel, Logarithmus

Der Potenzbegriff a^b wird sukzessive – dem Aufbau des Zahlbereichs \mathbb{R} folgend – definiert:

1. $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$: Für $b \geq 2$ ist $a^b := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{b\text{-mal}}$; zusätzlich $a^1 := a$ und, für $a \neq 0$, $a^0 := 1$.

2. $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$: $a^b := \frac{1}{a^{-b}}$ (gemäß 1.)

3. $b = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (Stammbruch), $a \in [0, +\infty[$: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$, wobei mit $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$ bezeichnet wird.

4. $b = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in [0, +\infty[$: $a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ (gemäß 3. und 1.)

5. b irrational und positiv, $a \in [0, +\infty[$: $a^b := \lim_{k \rightarrow \infty} a^{b_k}$, wobei b_k eine beliebige Folge positiver rationaler Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$ ist (vgl. 1.4) und a^{b_k} gemäß 4. berechnet wird.

6. $b \in \mathbb{R}^-$, $a \in \mathbb{R}^+$: $a^b = \frac{1}{a^{|b|}} = \frac{1}{a^{-b}}$ (gemäß 3.-5.)

Unter Beachtung der unterschiedlichen Definitionsbereiche für die Basis in Abhängigkeit vom Exponenten gelten die folgenden

Potenz- und Wurzelgesetze:

(i) $(x \cdot y)^b = x^b \cdot y^b$	(ii) $\left(\frac{x}{y}\right)^b = \frac{x^b}{y^b}$
(iii) $(x^b)^c = x^{bc}$	(iv) $x^{b+c} = x^b \cdot x^c$
(v) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$	(vi) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

Definition:

Für $a > 0$, $b > 1$ ist der *Logarithmus zur Basis b* definiert durch: $x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$

Schreibweisen: $\lg x = \log_{10} x$ (*Zehner-Logarithmus*)

$\ln x = \log_e x$ (*natürlicher Logarithmus*)

$\text{ld } x = \log_2 x$ (*dualer Logarithmus*)

Durch Umkehrung der entsprechenden Potenzgesetze ergeben sich die

Logarithmengesetze:

Für beliebige $b, c > 1, x, y > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
 (ii) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
 (iii) $\log_b x^t = t \cdot \log_b x$
 (iv) $\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c} = \frac{\ln x}{\ln c}$ (Basiswechselformel)

Summen- und Produktzeichen:

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Dann bezeichnet

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n, \quad \text{falls } m < n^1),$$

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m, \quad \text{falls } m = n,$$

und $\sum_{k=m}^n a_k := 0 \quad \text{bzw.} \quad \prod_{k=m}^n a_k := 1, \quad \text{falls } m > n \text{ ist}^2).$

Rechenregeln für das Summenzeichen:

Mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} gilt:

(i) $\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$ (ii) $\sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=m}^n a_k$

(iii) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $m \leq i \leq n$ gilt: $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^i a_k + \sum_{k=i+1}^n a_k$,

insbesondere: $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$ (Abspalten eines Summanden)

(iv) Für beliebiges $r \in \mathbb{Z}$ ist $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r}$ (Indexverschiebung)

1) Man beachte, dass diese Summe $n - m + 1$ (!) Summanden hat.

2) Diese – mathematisch sinnvolle – Zusatzdefinition der „leeren Summe“ ist in manchen Programmiersprachen, die ein allgemeines Summensymbol haben, nicht vorhanden; beim Programmieren ist also Vorsicht geboten!

Häufig benutzte Summenformeln:

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Summe der ersten natürlichen Zahlen})$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{Summe der ersten } n \text{ ungeraden Zahlen})$$

$$(iii) \quad \sum_{k=1}^n 2k = 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) \quad (\text{Summe der ersten } n \text{ geraden Zahlen})$$

$$(iv) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{Summe der ersten } n \text{ Quadratzahlen})$$

$$(v) \quad \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1 + 9 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$(vi) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = 1 + 8 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$(vii) \quad \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 1 + 27 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$(viii) \quad \sum_{k=1}^n k^4 = 1 + 16 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$(ix) \quad \text{Für } q \neq 1: \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (\text{endliche geometrische Reihe})$$

$$(x) \quad \text{Für } q \neq 1: \sum_{k=1}^n k \cdot q^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}$$

$$(xi) \quad \text{Für beliebige } a, b \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+: a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \quad ^{1)}$$

¹⁾ Für $n = 2$ ist dies gerade die bekannte dritte binomische Formel.

Binomialkoeffizient und binomischer Satz:**Definition:**

Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (gelesen: „ n über k “) definiert durch ¹⁾:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Unter Benutzung der *Fakultät* $n!$, definiert auf \mathbb{N}^+ durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ und zusätzlich $0! := 1$, erhält man für den Binomialkoeffizienten bei $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{und damit} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Der *binomische Satz*, eine Verallgemeinerung der bekannten binomischen Formel, lautet:

$$\text{Für beliebige } a, b \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^+, \text{ ist } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k .$$

Während der Teil über Summen- und Produktzeichen für reelle und komplexe Zahlen gilt, benutzen die folgenden Teile die Tatsache, dass \mathbb{R} im Gegensatz zu \mathbb{C} ein linear geordneter Körper ist.

Infimum und Supremum von Teilmengen von \mathbb{R} **Definition:**

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ heißt

- a *untere Schranke* von M , wenn $\forall x \in M : a \leq x$ ist;
- b *obere Schranke* von M , wenn $\forall x \in M : b \geq x$ ist;
- a *Minimum* von M ($a = \min M$), wenn a untere Schranke und Element von M ist;
- b *Maximum* von M ($b = \max M$), wenn b obere Schranke und Element von M ist;
- a *Infimum* von M ($a = \inf M$), wenn a die größte untere Schranke von M ist;
- b *Supremum* von M ($b = \sup M$), wenn b die kleinste obere Schranke von M ist.

Jede Teilmenge M von \mathbb{R} besitzt also sowohl untere und obere Schranken als auch Infimum und Supremum, aber nicht unbedingt Minimum oder Maximum. Ist M jedoch endlich, so gibt es stets $\min M$ und $\max M$. Minimum bzw. Maximum sind – falls existent – auch Infimum bzw. Supremum von M . Ist $M = \emptyset$, so ist $+\infty = \inf M$ und $-\infty = \sup M$.

¹⁾ Später wird der Binomialkoeffizient noch allgemeiner (mit $n \in \mathbb{R}$) definiert.

Spezielle Ungleichungen

Definition verschiedener Mittelwerte:

Für gegebene $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ heißen $A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ *arithmetisches* und $Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}$ *quadratisches Mittel*. Sind zusätzlich alle x_k positiv, so bezeichnen $G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$ bzw.

$H = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}$ *geometrisches* bzw. *harmonisches Mittel*.

Es gilt für beliebige positive x_k :

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}}_H \leq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}_G \leq \underbrace{\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)}_A$$

Die letzte Beziehung ist nur dann eine Gleichheit, wenn alle x_k gleich sind.

Das quadratische Mittel ist stets größer oder gleich dem Betrag des arithmetischen Mittels,

also $|\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)| \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$.

CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung : $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_k = c \cdot b_k$ für alle k gilt.

TSCHEBYSCHEFFSche Ungleichung : Sind alle a_k und b_k positiv und beide Folgen aufsteigend oder beide abfallend geordnet, so ist $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \leq n \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k$; es gilt die umgekehrte Ungleichheit, wenn eine der beiden Folgen aufsteigend und die andere abfallend geordnet ist.

BERNOULLISCHE Ungleichung: $(1+a)^n \geq 1+na$, wobei $a \in [-1, \infty[$ und $n \in \mathbb{N}^+$ ist. Dabei gilt Gleichheit nur für $n = 1$ oder $a = 0$.

1.6 Elementare Geometrie

Strahlensätze

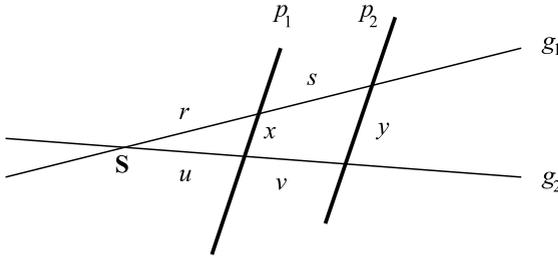


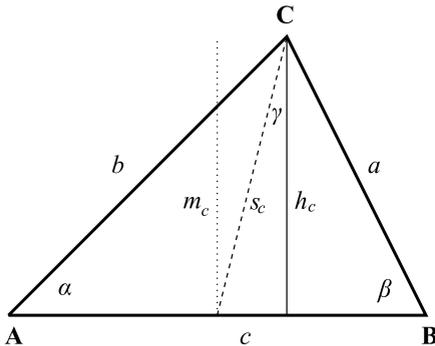
Bild 1.6.1: Zwei in S sich schneidende Geraden g_1 und g_2 werden von zwei Parallelen p_1 und p_2 geschnitten.

Es gelten folgende Proportionen $\frac{r}{u} = \frac{r+s}{u+v} = \frac{s}{v}$ auf den Strahlen

sowie $\frac{x}{y} = \frac{u}{u+v} = \frac{r}{r+s}$ auf den Parallelen.

Dreiecke

Die üblichen Bezeichnungen für ein allgemeines Dreieck finden sich in Bild 1.6.2:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Bild 1.6.2: Allgemeines Dreieck ABC

Dabei bezeichnet h_c die Höhe und m_c die Mittelsenkrechte auf der Seite c sowie s_c deren Seitenhalbierende (entsprechend für die anderen Seiten a und b). Mit w_γ wird die in Bild 1.6.2 nicht eingezeichnete Winkelhalbierende des Winkels γ bezeichnet (entsprechend für die anderen Winkel α und β).

In jeweils einem Punkt schneiden sich

- die Seitenhalbierenden, und zwar im *Schwerpunkt* S der Dreiecksfläche, S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1;
- die Winkelhalbierenden, und zwar ist dieser von allen Seiten gleich weit entfernt (Mittelpunkt des Inkreises);

- c) die Höhen, die Schnittpunkte aus a), b) und c) liegen auf einer Geraden;
- d) die Mittelsenkrechten, und zwar ist dieser von allen Eckpunkten gleich weit entfernt (Mittelpunkt des Umkreises – er kann außerhalb des Dreiecks liegen).

Der Flächeninhalt F eines Dreiecks wird nach der Formel „halbe Grundseite \times Höhe“ berechnet, also: $F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$.

Mit dem halben Umfang $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ erhält man

a) für den Flächeninhalt $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (HERONSche Formel),

b) für den Radius des Inkreises $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

c) für den Radius des Umkreises $R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen *kongruent*, wenn sie deckungsgleich sind, das heißt, wenn sie durch eine Bewegung in der Ebene (Verschiebung, Drehung und/oder Spiegelung an einer Achse) ineinander übergeführt werden können. Kongruenz liegt vor, wenn einer der vier Fälle erfüllt ist:

- a) Entsprechende Seiten in beiden Dreiecken sind gleich.
- b) Zwei entsprechende Seiten und der eingeschlossene Winkel sind jeweils gleich.
- c) Eine Seite sowie die anliegenden Winkel sind jeweils gleich.
- d) Jeweils zwei Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel sind gleich.

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen *ähnlich*, wenn entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis zueinander stehen, also wenn $a : a' = b : b' = c : c'$ ist. Äquivalent dazu ist, dass entsprechende Winkel übereinstimmen, also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

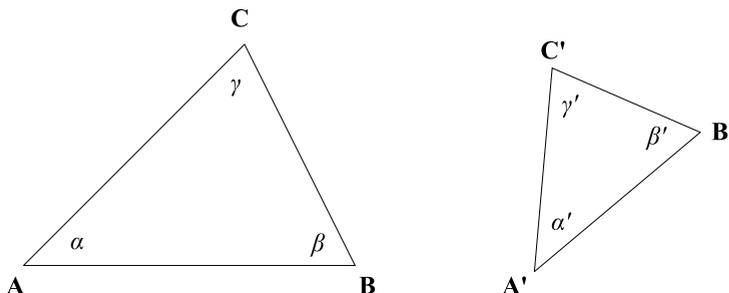


Bild 1.6.3: Ähnliche Dreiecke (Seitenverhältnis 3 : 2)

Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten (in Bild 1.6.3 also wie 9 : 4).

Rechtwinklige Dreiecke

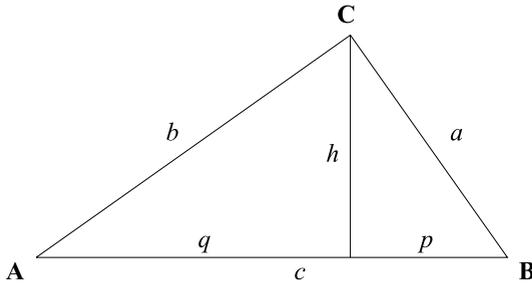


Bild 1.6.4: Rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C

Satz des PYTHAGORAS: $c^2 = a^2 + b^2$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

(Katheten-)Satz des EUKLID: $b^2 = c \cdot q$ und $a^2 = c \cdot p$

Flächeninhalt: $F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$

Gleichschenklige Dreiecke

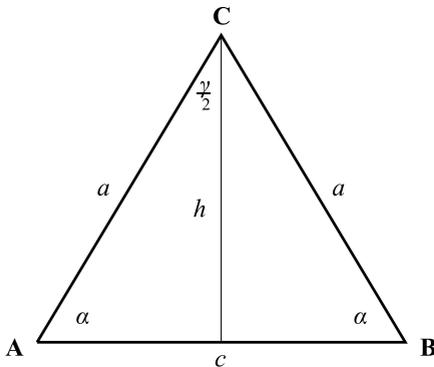


Bild 1.6.5: Gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C

Schenkel $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, Basiswinkel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$, $h = m_c = s_c = w_\gamma$;

Höhe $h = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2} = a \cos \frac{\gamma}{2} = a \sin \alpha = \frac{c}{2} \tan \alpha = \frac{c}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$;

Flächeninhalt $F = \frac{1}{4} c \sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{1}{4} c^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} a^2 \tan \gamma$.

Im **gleichseitigen Dreieck**, bei dem zusätzlich $c = a$ und damit $\alpha = \gamma = 60^\circ$ ist, vereinfachen sich diese Formeln zu

Höhe $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, Flächeninhalt $F = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Allgemeines Viereck

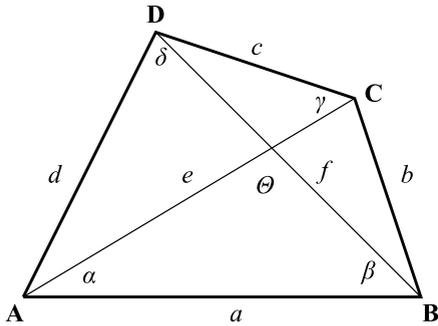


Bild 1.6.6: Allgemeines Viereck

Es gilt stets: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ sowie

$$\theta = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$F = \frac{1}{2}ef \sin \theta$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4e^2 f^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Parallelogramm, Raute (Rhombus), Rechteck

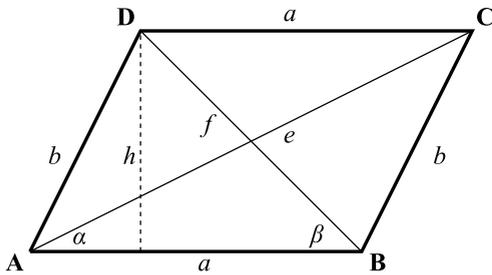


Bild 1.6.7: Parallelogramm

Es ist $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$, also

$\alpha + \beta = 180^\circ$. Außerdem:

$h = b \sin \alpha$, also

$$F = ab \sin \alpha$$

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

$$f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

Bei einer Raute ist zusätzlich $a = b$, also $\theta = 90^\circ$; obige Formeln vereinfachen sich zu

$$F = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2}ef, \quad e^2 + f^2 = 4a^2, \quad e = 2a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad f = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, bei dem zusätzlich $\alpha = \beta = 90^\circ$ ist. Deshalb ist

$$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad h = b \quad \text{und} \quad F = ab.$$

Trapez

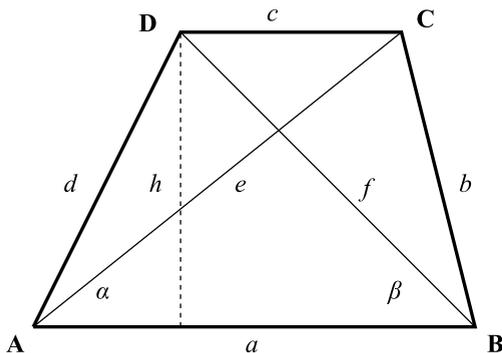


Bild 1.6.8: Trapez

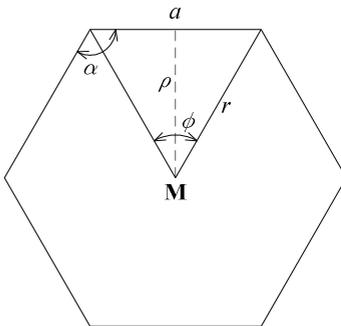
Es ist $a \parallel c$, $h = d \sin \alpha = b \sin \beta$

und $F = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$

sowie $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}$

und $e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha}.$

Regelmäßiges n -Eck



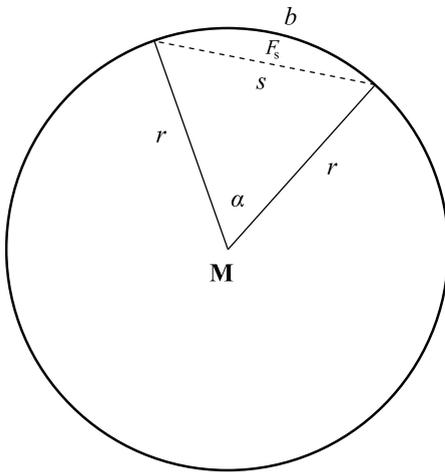
Es ist $\phi = \frac{2\pi}{n}$ und $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$ und

somit $r = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ sowie $\rho = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{n}}$.

Insgesamt:
$$F = \frac{n a^2}{4 \tan \frac{\pi}{n}}$$

Bild 1.6.9: Regelmäßiges n -Eck

Kreise und Kreisteile



Kreisumfang $U = 2\pi r$

Kreisfläche $F = \pi r^2$

Bogenlänge $b = r \frac{\alpha}{180^\circ} \pi$

Kreis扇形fläche $F_A = r^2 \frac{\alpha}{360^\circ} \pi$

Sehnenlänge $s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$

Kreissegmentfläche

$$F_S = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\alpha}{180^\circ} \pi - \sin \alpha \right)$$

Bild 1.6.10: Kreis um M mit Radius r

1.7 Ebene Trigonometrie

Die Winkelmessung erfolgt in Grad (Vollkreis $\cong 360^\circ$) oder im Bogenmaß (Vollkreis $\cong 2\pi$).

Dieses wird definiert als $\frac{b}{r}$ (Bezeichnungen wie in Bild 1.6.10), wegen der Proportionalität

von Bogenlänge und Kreissektorwinkel α (gemessen in Grad) folgt aus $\frac{b}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360^\circ}$:

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$$

woraus man die zur Umrechnung von Grad in Bogenmaß gebräuchliche Merkregel erhält:

$$\boxed{1^\circ \cong \frac{\pi}{180}}$$

$$\text{Beispiel: } 60^\circ \cong 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

Gerichtete Winkel werden gegen den Uhrzeigersinn („links herum“) als positiv gezählt, die Richtung im Uhrzeigersinn ist negativ (bei der nautischen Navigation ist es genau umgekehrt!).

Die Lage eines Punktes auf dem Einheitskreis (das ist der Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius 1) ist einerseits durch die Angabe seiner kartesischen Koordinaten eindeutig bestimmt. Andererseits ist er durch den gerichteten Winkel, den der Radiusvektor dieses Punktes P_x mit der positiven x -Achse bildet, genauso eindeutig festgelegt (siehe Bild 1.7.1). Es besteht also eine eindeutige Beziehung zwischen dem in Bild 1.7.1 mit x

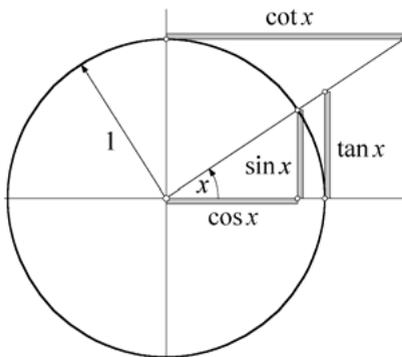


Bild 1.7.1: Die trigonometrischen Funktionswerte am Einheitskreis

bezeichneten Winkel und den Koordinaten des Punktes auf der Kreisperipherie, die zur Definition der trigonometrischen Funktionswerte führt:

Mit $\cos x$ wird die Abszisse und mit $\sin x$ die Ordinate des durch den gerichteten Winkel x eindeutig bestimmten Punktes P_x auf dem Einheitskreis bezeichnet. Daraus ergeben sich sofort folgende **elementaren Eigenschaften von Kosinus und Sinus** (Entsprechendes gilt im Bogenmaß – dann ist jedoch „ 90° “ durch „ $\frac{\pi}{2}$ “ etc. zu ersetzen):

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ und $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS)
3. $\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$; $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$;
 $\sin 180^\circ = 0$ und $\cos 180^\circ = -1$; $\sin 270^\circ = -1$ und $\cos 270^\circ = 0$

4. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$
5. $\sin(360^\circ + x) = \sin x$, $\cos(360^\circ + x) = \cos x$
6. $\sin(180^\circ + x) = -\sin x$, $\cos(180^\circ + x) = -\cos x$
7. $\sin(90^\circ + x) = \cos x$, $\cos(90^\circ + x) = -\sin x$

Mittels Sinus und Kosinus werden definiert: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Im Gegensatz zu Sinus und Kosinus, die für jeden Winkel definiert sind, lassen sich Tangens und Kotangens für bestimmte Winkel nicht berechnen, und zwar sind $\tan 90^\circ$ und $\tan 270^\circ$ undefiniert, genauso wie $\cot 0^\circ$ und $\cot 180^\circ$.

Zufolge der Definition und aufgrund der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke (eine Dreiecksseite hat jeweils die Länge 1) lassen sich $\tan x$ und $\cot x$ wie in Bild 1.7.1 anschaulich darstellen.

Im Gegensatz zu Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich die Werte von Tangens und Kotangens bereits nach einem Halbkreis (180°):

$$\tan(180^\circ + x) = \tan x, \quad \cot(180^\circ + x) = \cot x,$$

nach einem Viertelkreis (90°) gilt:

$$\tan(90^\circ + x) = -\cot x, \quad \cot(90^\circ + x) = -\tan x.$$

Wichtige Werte der trigonometrischen Funktionen im ersten Quadranten (die anderen lassen sich mittels obiger Formeln daraus berechnen) sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Winkel (in $^\circ$)	Bogenmaß	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	1	0	nicht def.
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	nicht def.	0