

Jan Peter Gehrke, Patrick Köberle

**Moderne Physik**

De Gruyter Studium

## Weitere empfehlenswerte Titel



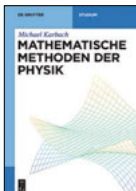
### *Experimentalphysik – Set (6 Bände)*

Wolfgang Pfeiler, 2017  
Set- ISBN 978-3-11-044748-4



### *Physik für das Lehramt: Mechanik und Wärmelehre*

Hermann Nienhaus, 2017  
ISBN 978-3-11-046912-7, e-ISBN (PDF) 978-3-11-046913-4,  
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-046917-2



### *Mathematische Methoden der Physik*

Michael Karbach, 2017  
ISBN 978-3-11-045665-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-046137-4,  
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-046142-8



### *Optik*

Eugene Hecht, 2018  
ISBN 978-3-11-052664-6, e-ISBN (PDF) 978-3-11-052665-3,  
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-052670-7



### *Physik im Studium – Ein Brückenkurs. Für Physiker und Ingenieure*

Jan Peter Gehrke, Patrick Köberle, 2016  
ISBN 978-3-11-049566-9, e-ISBN (PDF) 978-3-11-049567-6,  
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-049327-6

Jan Peter Gehrke, Patrick Köberle

# **Moderne Physik**



Von Kosmologie über Quantenmechanik  
zur Festkörperphysik

**DE GRUYTER**

**Autoren**

Jan Peter Gehrke  
Herdweg 29  
70174 Stuttgart  
jan-peter.gehrke@dhbw-stuttgart.de

Patrick Köberle  
Herdweg 29  
70174 Stuttgart

ISBN 978-3-11-052622-6  
e-ISBN (PDF) 978-3-11-052623-3  
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-052633-2

**Library of Congress Cataloging-in-Publication Data**

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2018 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston  
Einbandabbildung: sakkmasterke/iStock/Getty Images  
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck  
♻ Gedruckt auf säurefreiem Papier  
Printed in Germany

[www.degruyter.com](http://www.degruyter.com)

---

Für Ilona und unsere neugierigen Jungs Felix und Fabian  
Patrick Köberle

Für Désirée  
Jan Gehrke



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Intention dieses Buches — 1</b>
<b>2</b>	<b>Gravitationswellen — 3</b>
2.1	Worum es geht — 4
2.1.1	Anfänge der Gravitationsphysik — 4
2.1.2	Bewegungsgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie — 6
2.1.3	Die Feldgleichungen — 9
2.1.4	Die Schwarzschild-Metrik — 11
2.1.5	Wellenlösungen der Feldgleichungen — 13
2.2	Einblicke in die Forschung — 16
2.2.1	Indirekter Nachweis in Binärsystemen — 16
2.2.2	Das Gravitationswellensignal GW150914 — 18
2.3	Ausblick — 21
	Literatur — 22
<b>3</b>	<b>Mikrowellenhintergrund — 23</b>
3.1	Worum es geht — 24
3.1.1	Expansion des Universums — 24
3.1.2	Das Plasma in der Frühphase des Universums — 29
3.1.3	Die kosmische Rotverschiebung — 33
3.2	Einblicke in die Forschung — 35
3.2.1	Das Winkelleistungsspektrum — 35
3.2.2	Die Inflationstheorie — 40
3.3	Ausblick — 41
	Literatur — 42
<b>4</b>	<b>Bose-Einstein-Kondensation — 43</b>
4.1	Worum es geht — 44
4.1.1	Ideale Gase — 44
4.1.2	Der Effekt der Kondensation — 45
4.1.3	Fangen und Kühlen von Atomen — 53
4.1.4	Beobachtung eines Kondensats — 57
4.1.5	Mathematische Beschreibung von Kondensaten — 58
4.2	Einblicke in die Forschung — 59
4.2.1	Kondensate mit großem magnetischem Dipolmoment — 60
4.2.2	Dynamische Instabilitäten — 63
4.3	Ausblick — 65
	Literatur — 66

**5 Quantencomputer — 67**

- 5.1 Worum es geht — **68**
- 5.1.1 Bit vs. Quantenbit — **68**
- 5.1.2 Über Quantenregister und Quantengatter — **69**
- 5.1.3 Was würde ein Quantencomputer bringen? — **74**
- 5.1.4 Ein paar wichtige Algorithmen — **75**
- 5.2 Einblicke in die Forschung — **80**
- 5.2.1 Untersuchung von Quantenbits — **80**
- 5.2.2 Realisierung eines Quantencomputers — **82**
- 5.2.3 Quantenfehlerkorrektur — **83**
- 5.3 Ausblick — **84**
- Literatur — **84**

**6 Quasikristalle — 85**

- 6.1 Worum es geht — **86**
- 6.1.1 Periodische Strukturen — **86**
- 6.1.2 Beugungsmuster — **87**
- 6.1.3 Quasikristalline Strukturen — **91**
- 6.1.4 Die Entdeckung der Quasikristalle — **95**
- 6.2 Einblicke in die Forschung — **96**
- 6.2.1 Entstehung und Stabilität von Quasikristallen — **96**
- 6.2.2 Strukturbestimmung — **100**
- 6.3 Ausblick — **101**
- Literatur — **102**

**7 Entropie und entropische Kräfte — 103**

- 7.1 Worum es geht — **104**
- 7.1.1 Entropie an einem einfachen Beispiel — **104**
- 7.1.2 Eine statistische Sichtweise — **109**
- 7.1.3 Statistische Mechanik — **112**
- 7.2 Einblicke in die Forschung — **114**
- 7.2.1 Ein Ausflug in die Polymerphysik — **114**
- 7.2.2 Die Asakura-Oosawa-Wechselwirkung — **118**
- 7.3 Ausblick — **121**
- Literatur — **122**

**8 Kernfusion — 123**

- 8.1 Worum es geht — **124**
- 8.1.1 Atomkraftwerke und die grundlegenden Kräfte der Physik — **124**
- 8.1.2 Die Grundlagen der Kernfusion — **130**
- 8.1.3 Bereitstellung freier Teilchen – Das Plasma — **133**
- 8.1.4 Wie man ein Plasma zusammenhält — **137**



8.1.5	Tokamak und Stellerator —	137
8.1.6	Die Einschusszeit und der Plasmarand —	139
8.2	Einblicke in die Forschung —	140
8.2.1	Probleme und Fragestellungen —	141
8.2.2	Brennstoff Tritium —	141
8.2.3	Welches Konzept soll es sein? —	143
8.2.4	Fusionsstrom – Eine Kostenfalle? —	144
8.2.5	ITER – Der richtige Weg? —	145
8.3	Ausblick —	147
	Literatur —	148

<b>9</b>	<b>Giant Magnetoresistance —</b>	<b>149</b>
9.1	Worum es geht —	150
9.1.1	Entdeckung des GMR —	150
9.1.2	Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus —	151
9.1.3	Ursprung des GMR —	159
9.2	Einblicke in die Forschung —	160
9.2.1	Hard Disk Drives —	160
9.2.2	Biosensorik —	162
9.2.3	MRAM und Spintronic —	163
9.3	Ausblick —	166
	Literatur —	166

<b>10</b>	<b>Graphen —</b>	<b>167</b>
10.1	Worum es geht —	168
10.1.1	Kohlenstoff und seine Verbindungen —	168
10.1.2	Eigenschaften von Graphen —	172
10.1.3	Geschichte und Herstellung —	177
10.2	Einblicke in die Forschung —	178
10.2.1	Ein Großforschungsprojekt – GRAPHENE —	178
10.2.2	Hydrodynamisches Verhalten von Elektronen —	179
10.2.3	Optische Ladungsträger in Graphen —	182
10.2.4	Modellierungsmöglichkeiten —	184
10.3	Ausblick —	184
	Literatur —	185

<b>11</b>	<b>Supraleitung —</b>	<b>187</b>
11.1	Worum es geht —	188
11.1.1	Die Entdeckung der Supraleitung —	188
11.1.2	Der Meissner-Ochsenfeld-Effekt —	188
11.1.3	Die Londonsche Eindringtiefe —	189
11.1.4	Die Flussquantisierung —	190

11.1.5	Die BCS-Theorie —	<b>191</b>
11.1.6	Zwei Arten von Supraleitern —	<b>194</b>
11.1.7	Optisches Pumpen —	<b>196</b>
11.2	Einblicke in die Forschung —	<b>198</b>
11.2.1	Supraleitung bei Raumtemperatur —	<b>198</b>
11.2.2	Supraleiter unter Hochdruck —	<b>200</b>
11.2.3	Aktuelle Einsatzgebiete —	<b>203</b>
11.3	Ausblick —	<b>205</b>
Literatur —		<b>206</b>
<b>12</b>	<b>Semiklassik an einem Beispiel —</b>	<b>207</b>
12.1	Worum es geht —	<b>208</b>
12.1.1	Atommodelle im Wandel der Zeit —	<b>208</b>
12.1.2	Gutzwillers Spurformel und das Quantenchaos —	<b>214</b>
12.2	Betrachtung des Modellsystems —	<b>215</b>
12.2.1	Mit Hyperbeln Billard spielen —	<b>215</b>
12.2.2	Das diamagnetische Keplerproblem —	<b>216</b>
12.2.3	Über die Bahnen des Systems —	<b>220</b>
12.3	Einblicke in die Forschung —	<b>222</b>
12.3.1	Bahnbüschelbildung —	<b>222</b>
12.3.2	Quantenchaos —	<b>224</b>
12.4	Ausblick —	<b>225</b>
Literatur —		<b>225</b>
<b>13</b>	<b>Chaostheorie – Ein Einblick —</b>	<b>227</b>
13.1	Worum es geht —	<b>228</b>
13.1.1	Ein Weg ins Chaos – Einleitung —	<b>228</b>
13.1.2	Was chaotisches Verhalten auszeichnet —	<b>228</b>
13.1.3	(Zahlen-)Folgen —	<b>229</b>
13.1.4	Komplexe Zahlen —	<b>232</b>
13.1.5	Die logistische Gleichung —	<b>234</b>
13.1.6	Julia-Mengen und Apfelmännchen —	<b>237</b>
13.1.7	Experimente, die im Chaos enden —	<b>240</b>
13.2	Einblicke in die Forschung —	<b>242</b>
13.2.1	Untersuchungen zum Chaos auf Quantenebene —	<b>243</b>
13.2.2	Meteorologie und Chaos —	<b>243</b>
13.2.3	Graphen und Chaos —	<b>245</b>
13.2.4	Ein weites Betätigungsfeld —	<b>245</b>
13.3	Ausblick —	<b>246</b>
Literatur —		<b>246</b>
<b>Personenverzeichnis — 247</b>		
<b>Stichwortverzeichnis — 249</b>		

# 1 Intention dieses Buches

Die Physik ist ein unglaublich reichhaltiges Gebiet und man beschäftigt sich mit den verschiedensten Fragestellungen innerhalb der unbelebten Natur. Außerdem hat die Physik eine große Zahl an Schnittstellen zu und Überlappungen mit weiteren Disziplinen wie Chemie, Biologie, Elektrotechnik, aber auch Medizintechnik oder Philosophie. Sie bietet viele Forschungsgebiete im rein akademischen Bereich und stellt gleichzeitig die Grundlage für viele Anwendungen dar. Das Spannende ist dabei, dass es auch nach mehreren hundert Jahren Beobachtungen, Experimenten und theoretischen Erklärungen immer noch unvorhergesehene Überraschungen gibt, die unser Weltbild erweitern oder sogar völlig auf den Kopf stellen.

Dieses Buch soll dazu dienen, einige ausgewählte Forschungsfelder übersichtlich und anschaulich zu präsentieren, um dem Leser Lust auf mehr zu machen. Die Themen sollen ein möglichst breites Spektrum abdecken, was natürlich in einem so vielschichtigen Fach nur teilweise realisierbar ist und auch der subjektiven Einschätzung der Autoren unterliegt. Einige der Themen stehen mit Nobelpreisen in Verbindung, andere scheinen von sehr grundlegender Bedeutung zu sein oder reichen hin zu philosophischen Fragen, welche die Menschen schon immer beschäftigt haben. Ein volles Verständnis der behandelten Themen kann und soll nicht vermittelt werden, da hierfür viele Grundkenntnisse benötigt werden, die erst im Laufe eines Studiums erworben werden. Es wird deswegen ein Mittelweg gewählt, sodass Grundlagen an den entsprechenden Stellen kurz, aber möglichst anschaulich beschrieben werden. Damit soll dem Leser die Möglichkeit gegeben werden, ein erstes Verständnis für die Forschungsthemen zu erlangen. Vermutlich ist es auch nicht sinnvoll, das Buch nur einmal durchzulesen und es dann auf die Seite zu legen. Viele Begriffe wie „Entropie“ oder „Spin-Statistik-Theorem“ werden im Studium noch ausführlich erklärt, sodass man das eine oder andere Kapitel zu gegebener Zeit auch wieder aufschlagen und Verständnislücken nach und nach schließen kann. Vielleicht ist dann auch die eine oder andere Literaturangabe hilfreich.

Mathematik ist für die Physik die Sprache der Wahl. Alle wichtigen Sachverhalte werden in mathematische Formeln gepackt und können nach klaren Rechenregeln analysiert und weiter verarbeitet werden. Da in diesem Buch der Überblick zu verschiedenen Forschungsgebieten im Fokus stehen soll, werden deutlich weniger Formeln verwendet als in anderen Lehrbüchern. Die dargelegte Mathematik soll dem Leser einen Eindruck vermitteln, wie man physikalische Sachverhalte präzise und bündig darstellen kann. Es ist nicht das Ziel, eine geschlossene Darstellung mit Herleitungen zu liefern, und der Leser muss für ein erstes Verständnis Formeln deshalb auch noch nicht nachvollziehen können. Wer sich im Studium näher mit Themen, die auch in diesem Buch besprochen werden, beschäftigt, wird sicherlich den einen oder anderen mathematischen Zusammenhang wiederfinden. Insofern wird hier auch keine populärwissenschaftliche Darstellung der Physik präsentiert. Der Leser soll die Mög-

lichkeit haben, aktuelle physikalische Forschungsthemen möglichst authentisch, und gerade deswegen spannend zu erleben.

Weiterhin wird in den einzelnen Kapiteln nicht allein auf das Ziel hin gearbeitet, nur den Titel des jeweiligen Kapitels zu verstehen. Man benötigt immer einige Grundlagen, die zuerst zusammen gefasst werden, bevor ein Effekt oder auch ein Themenkomplex erklärt werden kann. Dieser Weg wird aber auch nicht völlig geradlinig beschritten, da es nicht um „Effizienz“ geht. Es sollen vielmehr auch Blicke nach rechts und links geworfen werden, um mögliche weitere Anknüpfungspunkte erkennen zu können. Schließlich lebt die ganze Physik davon, dass es zwischen verschiedenen Gebieten Zusammenhänge gibt, und diese zu verstehen ist immer auch eine Quelle der Motivation, trotz mancher schwerer Kost nicht aufzugeben.

Wir hoffen, dass wir unseren Lesern zeigen können, dass die Physik nach wie vor eine lebendige Wissenschaft ist, die in vielen Richtungen neue Ideen und Herangehensweisen erfordert, um unseren Wissenshorizont zu erweitern und wünschen viel Freude bei der Lektüre dieses Buches!

Stuttgart, im Sommer 2017

Jan Peter Gehrke und Patrick Köberle

## 2 Gravitationswellen

Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) macht Aussagen über die Struktur der Raumzeit bei einer gegebenen Massenverteilung, mit relevanten Anwendungen im Bereich der Größe unseres Sonnensystems bis hin zum gesamten Universum. In diesem Kapitel wollen wir uns auf eher kleinen räumlichen Maßstäben bewegen und uns die Überbleibsel von ausgebrannten Sternen näher ansehen. Die ART macht im Fall von sich bewegenden Massen eine ähnliche Aussage wie die klassische Elektrodynamik. Während beschleunigte Ladungen zu elektromagnetischen Wellen führen, breiten sich ausgehend von beschleunigten Massen auch in der Raumzeit Störungen mit Lichtgeschwindigkeit aus. Üblicherweise sind die Effekte der ART jedoch sehr gering, sodass die Mächtigkeit der Theorie nur in Form von kleinen Erweiterungen zur klassischen Newton'schen Gravitationstheorie sichtbar wird. Die Periheldrehung des Merkurs ist so ein Beispiel. Das Newton'sche Gravitationspotential der Sonne ist auf der Merkurbahn noch fast identisch mit der Lösung der ART, sodass die Bahnellipse nur extrem langsam rotiert. Dieser Effekt ist aber noch messbar. Gravitationswellen, die von den herkömmlichen Himmelskörpern abgestrahlt werden, sind jedoch so schwach, dass sie unter jede Auflösungsgrenze unserer Messgeräte fallen. Nur extrem massereiche Objekte wie Neutronensterne oder schwarze Löcher sind in der Lage, die Raumzeit messbar stark zu verzerren. Umso spannender ist die erst in jüngster Vergangenheit erfolgte direkte Messung von Gravitationswellen, welche durch die Verschmelzung von schwarzen Löchern erzeugt wurden. Zwar waren auch hier die Messsignale aufgrund der gewaltigen Entfernungen der Objekte (glücklicherweise) sehr schwach, die eigentliche Ursache verlangt jedoch die Anwendung der Feldgleichungen in ihrer vollen Form, sodass diese Beobachtungen einen Meilenstein in der Gravitationsphysik darstellen und sogar mit dem Nobelpreis für Physik gewürdigt wurden. Während auf Seiten der Theorie numerische Verfahren zur Lösung der Feldgleichungen entwickelt werden müssen, stehen die Experimentatoren vor der Herausforderung, extrem schwache raumzeitliche Verzerrungen nachweisen zu müssen, was in riesigen Messanlagen resultiert, welche in Zukunft auch im Weltraum angedacht sind. In diesem Kapitel wollen wir uns deswegen sowohl mit der Theorie der Gravitationswellen als auch mit deren Messung näher beschäftigen.

## 2.1 Worum es geht

### Zusammenfassung:

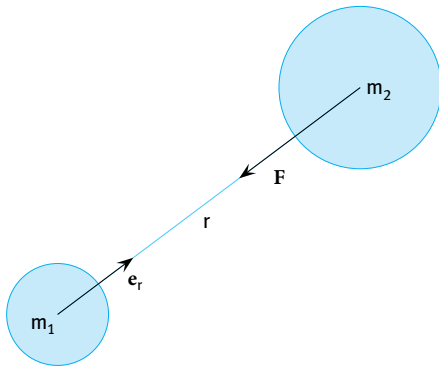
Gravitationswellen [1, 2] sind eine Folgerung aus den Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Analog zur Elektrodynamik lässt sich für schwache Gravitationsfelder eine Wellengleichung herleiten, welche aber nun die Krümmung der Raumzeit beschreibt. Störungen in der Raumzeit werden durch beschleunigte Massen hervorgerufen und breiten sich wie elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit aus. Dabei wird Energie abtransportiert, welche aus der Bewegung der Massen entnommen wird.

### 2.1.1 Anfänge der Gravitationsphysik

Die moderne Gravitationsphysik beginnt mit der Veröffentlichung der „Naturphilosophie“ durch NEWTON. Dieser hat aufbauend auf Beobachtungsdaten von Astronomen das heute noch verwendete Gravitationsgesetz aufgestellt, nach welchem sich zwei Massen gegenseitig anziehen. Diesem einfachen Kraftgesetz gingen die drei Kepler'schen Gesetze voraus, nach denen sich zwei Massen wie etwa die Erde und die Sonne auf Ellipsenbahnen umeinander bewegen. Die anziehende Kraft zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  lautet nach NEWTON:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.1)$$

Dieses Gesetz hat den enormen Vorteil, dass es sehr einfach zu verstehen ist. Die beiden Massen befinden sich im Abstand  $r$ ,  $G$  ist die Gravitationskonstante (von NEWTON selbst nicht zahlenmäßig angegeben), und  $\mathbf{e}_r$  ist der normierte Verbindungsvektor zwischen den beiden Massen (s. auch Abbildung 2.1). Die Gravitationskraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab, wodurch sich eine starke Ähnlichkeit zum entsprechenden Kraftgesetz in der Elektrostatik ergibt. Im Unterschied zur elektrischen Wechselwirkung ist die Gravitation aber immer spürbar. Das liegt daran, dass es nur eine Art von Masse gibt, aber zwei verschiedene Ladungen, die sich je nach Konstellation anziehen oder abstoßen. Da normale Materie elektrisch neutral ist, spüren wir keinerlei elektrische Kräfte im Alltag. Weiterhin ist es genau die Abstandsabhängigkeit von  $1/r^2$ , welche dafür sorgte, dass KEPLER Ellipsenbahnen beobachten und als Gesetzmäßigkeit festhalten konnte. Löst man das Problem zweier Massen unter dem Einfluss ihrer wechselseitigen Gravitation nach dem Newton'schen Verfahren, so findet man für die Form der Bahnen exakte Ellipsen. Das bedeutet also insbesondere, dass die Bahnen beider Massen geschlossen sind. Es ist sogar möglich, zu zeigen, dass es neben der Gravitationskraft nur noch einen weiteren Kraftverlauf gibt, welcher immer geschlos-



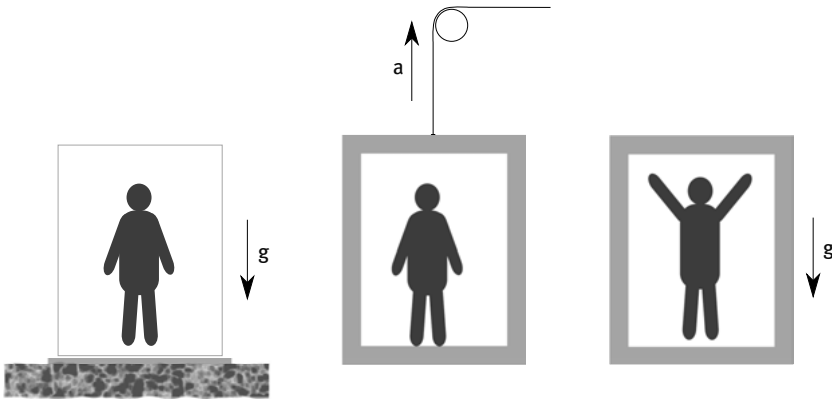
**Abb. 2.1:** Gravitationskraft einer Masse  $m_1$  auf eine Masse  $m_2$ . Beide Massen besitzen den Abstand  $r$ , der Richtungsvektor  $e_r$  zeigt entlang des vektoriellen Abstands und besitzt die Länge 1. Die Gravitationskraft greift bei  $m_2$  an und ist entgegen des Richtungsvektors auf  $m_1$  gerichtet.

sene Bahnen zur Folge hat: eine linear mit dem Abstand anwachsende Kraft.<sup>1</sup> Alle anderen Kraftverläufe führen zwangsweise dazu, dass die Bahnen nicht geschlossen sein müssen, und bis auf Spezialfälle sind sie es auch nicht. Das ist ein sehr wichtiges Resultat und dient als Referenz, um einen Unterschied zu Effekten der Allgemeinen Relativitätstheorie ausmachen zu können.

NEWTON war es zwar gelungen eine Beschreibungsform für die Gravitationskraft zu finden, doch es war ihm selbst schleierhaft, wie diese Wirkung der Gravitation eigentlich vermittelt wird. Sollte es also eine Art „Wirkendes“ zwischen den beiden Massen geben,<sup>2</sup> welches die Gravitation vermittelt? Mit diesem Gedanken hat NEWTON eine große Weitsicht bewiesen. Doch erst über 200 Jahre später konnte EINSTEIN diese Frage zufriedenstellend beantworten. Schon mit der speziellen Relativitätstheorie hat er die Forderung aufgestellt, dass sich nichts im Universum schneller als das Licht ausbreiten darf. Wenn wir uns die Gesetzmäßigkeit (2.1) ansehen, stellen wir fest, dass sie keinerlei Zeitabhängigkeit enthält. Jede der beiden Massen wird also unmittelbar eine Kraftänderung spüren, wenn sich die andere Masse relativ zu ihr bewegt, auch bei kosmischen Entfernungen. Somit besteht die theoretische Möglichkeit, durch die Bewegung einer Masse aktiv Information zu übertragen, und das ohne dafür Zeit zu benötigen. Auch wenn dies praktisch sicher schwierig bis unmöglich zu realisieren wäre: EINSTEIN schließt schon die prinzipielle Möglichkeit aus. Somit muss das Newton'sche Gravitationsgesetz auch aus konzeptionellen Gründen überarbeitet werden, um mit der Relativitätstheorie vereinbar zu sein (praktische Gründe, also Abweichun-

<sup>1</sup> Wir sprechen von gebundenen Bahnen, also solchen, die zu einer negativen Gesamtenergie gehören. Bahnen zu positiver Gesamtenergie sind auch im Falle der Gravitationskraft offen.

<sup>2</sup> Heute würde man dies ein Feld nennen.



**Abb. 2.2:** Ein Mensch in einem Fahrstuhl kann nicht unterscheiden, ob er in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes mit  $a$  nach oben beschleunigt wird oder ob sich der Fahrstuhl auf dem Erdboden befindet, wenn die Erdbeschleunigung  $g$  gleich der Fahrstuhlbeschleunigung ist. Befindet er sich im freien Fall, ist innerhalb des Fahrstuhls kein Gravitationsfeld mehr spürbar.

gen zwischen der Theorie und der Messung, lagen zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch nicht vor).

### 2.1.2 Bewegungsgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Konzeptionell besitzt Masse zwei Eigenschaften: Sie ist einerseits träge, was sich darin äußert, dass man eine Kraft benötigt, um ihre Geschwindigkeit zu ändern. Andererseits reagiert jede Masse auf ein Gravitationsfeld, und die Gravitationskraft ist proportional zur Masse. Diese beiden Eigenschaften, „Trägheit“ und „Schwere“, tauchen jedoch beim Rechnen nicht auf. Üblicherweise schreibt man für die Masse nur  $m$ , unterscheidet also nicht, welche der beiden Massen man gerade meint. Das liegt daran, dass das Verhältnis aus schwerer und träger Masse für jedes beliebige Objekt gleich ist. Das ist nicht selbstverständlich, schließlich gibt es ja unterschiedliche Elementarteilchen, und es wäre denkbar, dass jedes Teilchen ein anderes Verhältnis von Schwere und Trägheit besitzt. Diese Gleichheit bildet eine der Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie. EINSTEIN hat dazu ein Gedankenexperiment formuliert, das in Abbildung 2.2 veranschaulicht ist. Ein Fahrstuhl befindet sich im Gravitationsfeld der Erde. Wenn der Fahrstuhl relativ zur Erde ruht, nimmt man darin eine Kraft wahr, welche wir als Gravitationskraft kennen. Da die Schwere eines im Fahrstuhl befindlichen Beobachters mit seiner Trägheit übereinstimmt, kann der Insasse diese Situation nicht von jener unterscheiden, in welcher der Fahrstuhl sich in den Tiefen des leeren Raums (also abseits eines Gravitationsfeldes) befindet, und dabei beschleunigt wird. Umgekehrt kann der Beobachter auch nicht entscheiden, ob sich der Fahrstuhl zwar im Schwerfeld der Erde, aber im freien Fall befindet, oder ob er sich wieder in den Tiefen des



Weltalls, aber diesmal unbeschleunigt, bewegt. Wichtig bei diesem Gedankenexperiment ist die Tatsache, dass das Inertialsystem, der Fahrstuhl, nur lokal existiert. Das bedeutet, dass die Gravitation nur in einem sehr kleinen Bereich „wegtransformiert“ werden kann, aber nicht global. Wenn man mathematisch wird, spricht man von einem infinitesimalen, also unendlich kleinen Bereich. EINSTEIN hat diesen Vergleich als ein Äquivalenzprinzip postuliert: Es gibt kein mechanisches Experiment, mit welchem man unterscheiden kann, ob man sich nun im beschleunigten Bezugssystem oder in einem Gravitationsfeld befindet. In seiner starken Form wird dieses Prinzip sogar dahingehend erweitert, dass man die Äquivalenz aller Naturgesetze in den verschiedenen Bezugssystemen fordert. Nun macht EINSTEIN einen interessanten Schritt. Da der Wechsel zwischen den verschiedenen Bezugssystemen lediglich durch die Transformation von Koordinaten vermittelt wird, verschiebt er die Wirkung eines Gravitationsfeldes, nämlich gekrümmte Bahnkurven, auf eine Krümmung der Raumzeit.

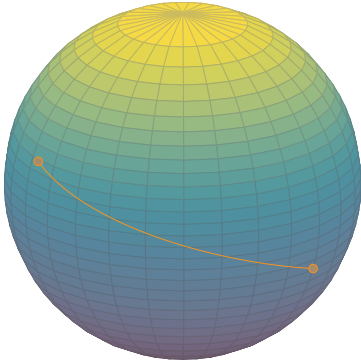
Die Raumzeit ist mathematisch gesehen ein vierdimensionaler Raum, und jeder Punkt darin entspricht einem Punkt im dreidimensionalen Anschauungsraum zu einem bestimmten Zeitpunkt. Man nennt einen solchen Punkt auch ein Ereignis in der Raumzeit. Die Koordinaten eines solchen Punktes werden üblicherweise mit  $x^\mu$  bezeichnet, wobei der Index  $\mu$  Werte von 0 bis 3 annimmt. Diese Koordinaten muss man sich als eine Art Nummerierung der Punkte in der Raumzeit vorstellen. Man kann anhand der Punkte Nachbarschaftsbeziehungen erkennen, aber allein durch die Angabe zweier Punkte ist noch kein physikalischer Abstand definiert. Hierfür benötigt man noch eine Vorschrift, wie man Abstände zwischen zwei Punkten misst. Eine solche Vorschrift nennt man Metrik. Man geht nun so vor, dass man zwei Punkte  $x^\mu$  und  $x^\mu + dx^\mu$  betrachtet. Diese haben den infinitesimalen Koordinatenabstand  $dx^\mu$ . Der eigentliche, physikalisch messbare Abstand entsteht durch Multiplikation mit dem metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$ . Dieses Objekt ist ein Tensor 2. Stufe und besitzt in seinen 4 Zeilen und 4 Spalten insgesamt 16 Einträge. Der Abstand  $ds$  lautet nun:

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.2)$$

Auch wenn dies etwas eigenartig aussieht, kann man darin doch etwas Bekanntes entdecken. Zunächst muss man dazu wissen, dass in der Relativitätstheorie generell auf Summenzeichen verzichtet wird. Ausführlicher würde man sonst nämlich schreiben:

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.3)$$

Um sich das Leben etwas einfacher zu machen, vereinbart man, dass man sich immer dann ein Summenzeichen denken muss, wenn der gleiche Index einmal oben und einmal unten an einem Objekt auftaucht. Hier sind  $\mu$  und  $\nu$  beim metrischen Tensor tiefgestellt, während sie bei den Vektoren jeweils oben stehen. Ob ein Index oben oder unten steht, hat eine ganz konkrete Bedeutung, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen. Jetzt erinnern wir uns daran, wie wir in der Mathematik im dreidimensionalen



**Abb. 2.3:** Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche ist immer ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt übereinstimmt.

Raum Abstände zwischen zwei Punkten berechnen. Der Verbindungsvektor entspricht  $dx^\mu$ , und dessen Länge ist die Wurzel des Skalarprodukts des Vektors mit sich selbst. Jede Komponente wird dabei mit sich selbst multipliziert, anschließend werden diese Produkte alle addiert. Dies passiert auch in (2.2), mit der Erweiterung, dass noch die Gewichte  $g^{\mu\nu}$  in die Produkte mit eingehen. Ansonsten wird auch hier nur ein Skalarprodukt gebildet. Im dreidimensionalen Anschauungsraum besitzt der metrische Tensor nur Einträge auf der Diagonalen. Diese Einträge sind alle 1, die restlichen Elemente sind 0. Aus diesem Grund lässt man die Metrik in diesem Zusammenhang auch immer weg. Als Spezialfall ist dies aber in (2.2) enthalten. Das Ergebnis dieser Rechnung, das Wegelement  $ds$ , besitzt die Eigenschaft, dass es einen absoluten Wert besitzt, also unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, mit denen die Punktmenge der Raumzeit beschrieben wird. Man nennt es daher auch das invariante Wegelement.

Nun bildet EINSTEIN die Wirkung eines Gravitationsfeldes ab auf die Geometrie der Raumzeit. Nach NEWTON sehen wir, dass sich eine Masse im Gravitationsfeld auf einer gekrümmten Bahn bewegt, was auf eine Kraft als Ursache zurückgeführt wird. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Raumzeit selbst schon gekrümmt, und die Masse bewegt sich genau auf einer solchen Bahn von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2, dass der Abstand dazwischen minimal wird:

$$\int_1^2 ds \longrightarrow \min. \quad (2.4)$$

Eine ganz einfache Veranschaulichung ist die Bewegung auf einer Kugeloberfläche (also wieder ein Problem im Anschauungsraum, aber dieser Raum heißt schließlich berechtigterweise so...). Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche ist ein Großkreis, oder etwas allgemeiner ausgedrückt eine Geodäte. Auch in der vierdimensionalen Raumzeit bewegt sich eine Masse so, dass die Bahnkurve eine Geodäte ist. NEWTON hat zur Bestimmung der Bahnkurve eine Bewegungsgleichung

angegeben, und auch aus der Forderung (2.4) lässt sich eine Bewegungsgleichung folgern. Diese besitzt die folgende Gestalt:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.5)$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (2.6)$$

Abseits aller Komplexität der Geodätengleichung und insbesondere der Christoffel-Symbole kann man doch erkennen, dass die Metrik  $g^{\mu\nu}$  letztlich in die Bewegungsgleichung eingeht und damit für die Form der Bahnkurve verantwortlich ist.

---

Man kann sich denken, warum man üblicherweise die Newton'sche Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Bewegung von Massen in Gravitationsfeldern verwendet. Die Geodätengleichung ist jedoch viel allgemeiner und insbesondere in extremen Gravitationsfeldern, wie sie in der Umgebung von Neutronensternen und schwarzen Löchern auftreten, gültig. **i**

---

Dies war EINSTEINS große Erkenntnis, als er die Allgemeine Relativitätstheorie entwickelt hat. Während sich eine Masse in einem im Gravitationsfeld frei fallenden Bezugssystem auf einer geraden Bahn bewegt (also die „direkte“ Verbindung zwischen zwei Punkten wählt), muss im stationären System die Metrik so angepasst werden, damit sich aus der gleichen Forderung nach einer kürzesten Verbindung die entsprechend transformierte Bahn ergibt, welche nun gekrümmt ist.

### 2.1.3 Die Feldgleichungen

Bis jetzt haben wir nur eine Beschreibung der Bahn, wenn wir auch die Metrik kennen. Doch wodurch wird diese festgelegt? Um das zumindest im Ansatz verstehen zu können, betrachten wir ein schwaches Gravitationsfeld. Die Bewegung einer Masse  $m$  im Potential  $V$  kann man in diesem Fall auch mit Hilfe der Newton'schen Mechanik sehr genau beschreiben, also sollte die relativistische Bewegungsgleichung (2.5) zum gleichen Ergebnis kommen, wenn man eine entsprechende Metrik wählt. In der Newton'schen Mechanik ist der zentrale Begriff die Kraft, weil diese die Ursache der Bewegungsänderung darstellt. Üblicherweise führt man jedoch die Kraft zurück auf ein Potential, aus welchem man durch Ableiten nach den drei Raumkoordinaten auf das Kraftfeld kommt:

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\nabla V. \quad (2.7)$$

Der Nabla-Operator  $\nabla$  tut nichts anderes, als das Potential nach den drei Raumrichtungen abzuleiten und die Ergebnisse in einem Vektor anzuordnen. Diese Art der Beschreibung hat den Vorteil, dass man generell leichter mit einem Potential, also einer

Energie, rechnet, als mit einer Kraft. Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet mit einem solchen Gravitationspotential also:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{m} \nabla V = -\nabla \phi. \quad (2.8)$$

Die Metrik, welche auch diese Bewegungsgleichung liefert, wenn man sie in die Geodätengleichung (2.5) einsetzt, lautet nun:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Der letzte logische Schritt ist die Frage nach der Ursache des Gravitationspotentials  $\phi$ . In der Newton'schen Mechanik wird es durch eine Massenverteilung  $\varrho_m$  erzeugt. Mathematisch wird es durch die Poisson-Gleichung festgelegt:

$$\Delta \phi = 4\pi G \varrho_m. \quad (2.10)$$



Die Poisson-Gleichung gibt es in völlig analoger Form auch in der Elektrostatik. Dort wird ein elektrisches Potential durch eine Ladungsverteilung hervorgerufen. Aus dem elektrischen Potential folgt durch Ableiten das elektrische Feld, wie auch in der Mechanik aus dem Gravitationspotential die Gravitationskraft durch Ableiten gewonnen wird.

---

Der Laplace-Operator  $\Delta$  auf der linken Seite von (2.10) ist eine Summe der zweiten Ableitungen, sodass wir auch schreiben können:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^j} = 4\pi G \varrho_m. \quad (2.11)$$

Wir können damit die Anbindung an die Geometrie schaffen, da sich auf der linken Seite von (2.11) der Riemann'sche Krümmungstensor versteckt:

$$-R^j_{00k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (2.12)$$

Das ist zwar nicht gleich offensichtlich, doch kann man auch hier die Logik im Ansatz ohne größere Rechnung nachvollziehen. Das Potential  $\phi$  steckt in der Metrik  $g^{\mu\nu}$ . Aus der Metrik erhält man die Christoffel-Symbole (2.6), und hieraus gewinnt man den Krümmungstensor. Setzt man in (2.12) die Indizes  $k$  und  $j$  gleich und summiert über die Werte von 1 bis 3, so erhält man genau den Laplace-Operator in (2.11). Das Gleichsetzen der beiden Indizes und die anschließende Summation darüber ergibt den Ricci-Tensor. Somit kann man die ursprüngliche Poisson-Gleichung nun in die geometrische Sprache der ART übersetzen:

$$R_{00} = -4\pi G \varrho_m. \quad (2.13)$$

An diesem Teilergebnis auf dem Weg zu den vollständigen Feldgleichungen kann man sehen, dass sich eine Massenverteilung auf die Geometrie der Raumzeit auswirken wird. Die Raumzeit wird durch die Anwesenheit einer Masse gekrümmt, was mathematisch durch den Ricci-Tensor erfasst wird. Die Krümmung fällt umso stärker aus, je höher die Massendichte ist.

Ausgehend von der Näherung (2.13) für schwache Felder kann man die Feldgleichungen der ART aufstellen, welche für eine beliebige Massen- und Energieverteilung die Krümmung der Raumzeit festlegen. Wie in der ART üblich werden dazu Tensoren benötigt. Die Massendichte  $\rho_m$  aus (2.13) wird hierzu ersetzt durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ , welcher die Massen- und Energieverteilung in der vierdimensionalen Raumzeit repräsentiert. Die Feldgleichungen nehmen dann die folgende Form an:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

bzw. in einer etwas kompakteren Form

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^*, \quad (2.15)$$

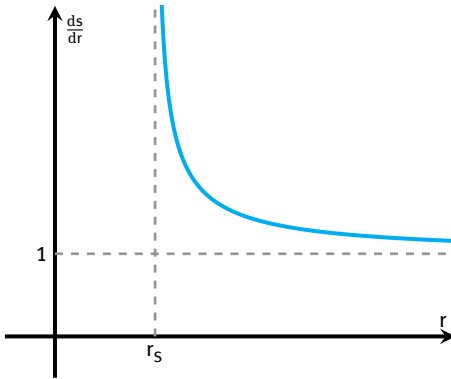
wobei die Abkürzung  $T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - 1/2Tg_{\mu\nu}$  und  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  verwendet wurde. Die Feldgleichungen der ART stellen ein System von 16 nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen dar, was im Allgemeinen nur noch numerisch lösbar ist. Nur für sehr spezielle Fälle können analytische Lösungen angegeben werden. Einen wichtigen Spezialfall sehen wir uns im folgenden Abschnitt an.

#### 2.1.4 Die Schwarzschild-Metrik

Obwohl die Feldgleichungen ein so schwieriges mathematisches Problem darstellen, gelang es KARL SCHWARZSCHILD [3] kurz nach der Veröffentlichung der Feldgleichungen die Metrik für den Außenraum einer kugelsymmetrischen Masse  $m$  zu präsentieren, welche heute als Schwarzschild-Metrik bekannt ist. Die Lösung beruht stark auf der Symmetrie und der Tatsache, dass im Außenraum der Masse der Energie-Impuls-Tensor verschwindet (außer der betrachteten Masse soll sich nichts weiter im Universum befinden). Außerdem stellt man auch hier wieder die Forderung, dass für hinreichend große Abstände die Metrik, welche in der Newton'schen Sicht das Gravitationsfeld repräsentiert, in die Schwachfeld-Näherung (2.9) übergehen muss. Für unendlich große Abstände von der Masse wird der Raum also wieder flach. Man findet nun folgende Metrik:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (2.16)$$

Man erkennt in dieser Lösung, dass die Abstandscoordinate  $r$  und die Zeitcoordinate  $t$  eine Streckung bzw. Stauchung erfahren, wenn man sich dem Schwarzschild-Radius



**Abb. 2.4:** Visualisierung des Streckungsfaktors der Schwarzschild-Metrik für die Radialkoordinate. Je weiter man sich dem Schwarzschild-Radius nähert, umso mehr werden die physikalischen Abstände gestreckt. Zwar divergiert der Faktor, dennoch bleibt der physikalische Abstand zum Horizont (also das Integral über die dargestellte Kurve) von jedem Punkt aus endlich. In unendlich großem Abstand zum Horizont geht der Streckungsfaktor gegen 1, sodass Koordinatenabstände und physikalische Abstände übereinstimmen. Der Raum ist dann unverzerrt oder flach.

$r_S$  nähert. Dieser ergibt sich aus der Rechnung zu

$$r_S = \frac{2Gm}{c^2}. \quad (2.17)$$

Der Streckungsfaktor, welcher die Koordinatendifferenz  $dr$  in einen physikalisch messbaren Abstand überführt, wächst bei Annäherung an  $r_S$  über alle Grenzen. Allerdings tut er das noch so „langsam“,<sup>3</sup> dass der Abstand zwischen einem Beobachter außerhalb von  $r_S$  und  $r_S$  einen endlichen Wert annimmt. Somit sind sich alle Beobachter über den Ort der Koordinatensingularität einig. Diese Singularität ist aufgrund der Symmetrie des Problems eine Sphäre. Wie man nun mit Hilfe des invarianten Wegelements (2.16) berechnen kann, benötigt ein Objekt vom Standpunkt eines Beobachters außerhalb des Schwarzschild-Radius' eine unendlich lange Zeit, um die Sphäre zu erreichen. Das fallenden Objekt verlangsamt sich aus dieser Sicht also immer mehr. Gleichzeitig wird das Licht, welches das Objekt aussendet, in seiner Wellenlänge immer mehr gestreckt, also ins Rote verschoben. Es ist also von außerhalb unmöglich, hinter die Sphäre zu sehen. Man spricht deshalb von einem Ereignishorizont. Die Sphäre erscheint schwarz, da kein Licht von ihr emittiert wird. Hingegen nimmt ein frei fallendes Objekt selbst keine Verlangsamung wahr. Es wird vielmehr die Sphäre in endlicher Zeit erreichen und sogar überqueren, ohne dass es dabei etwas besonderes wahrnehmen wird. Insofern ist der Ereignishorizont keine physikalische Singularität. Es gibt neben den von SCHWARZSCHILD verwendeten Koordinaten auch weitere, die Kruskal-Szekeres-Koordinaten, welche keine Singularität bei  $r_S$  beinhalten.

<sup>3</sup> Das ist nicht in einem zeitlichen Sinne zu verstehen, es geht um die Steilheit der Funktion.

Eine solche Sphäre existiert aber nur, wenn die Ausdehnung der Masse kleiner ist als ihr Schwarzschild-Radius. Setzt man in (2.17) einmal die Masse der Sonne ein, so erhält man einen Radius von 3 km, für die Erde sind es nur 9 mm. Es muss also ein gewaltiger Druck auf die Masse wirken, um sie unter ihren Schwarzschild-Radius zu komprimieren. Unsere Sonne ist nicht groß genug, damit sie irgendwann in diesen Zustand überführt wird. Mögliche weitere Endstadien sind ein weißer Zwerg oder ein Neutronenstern. Letzterer krümmt jedoch die Raumzeit in seiner Umgebung schon sehr deutlich, sodass die Bahnkurven von anderen Massen dort relativistisch berechnet werden müssen. Ein Horizont bildet sich jedoch erst bei noch stärkerer Kompression der Materie aus, und ein solches Objekt, welches kleiner ist als sein Schwarzschild-Radius, nennt man ein schwarzes Loch. Während man den Zustand der Materie für weiße Zwerge und Neutronensterne mit Hilfe der Quantenmechanik noch verstehen kann, kennt man keinerlei Gesetze für das, was hinter dem Ereignishorizont mit der Materie geschieht. Für den Außenraum kann man jedoch die Gesetze der ART anwenden und damit die Metrik, wie wir jetzt an einem noch sehr einfachen Beispiel gesehen haben, explizit berechnen.

Seine Lösung hat SCHWARZSCHILD, welcher damals an der Front in Russland stationiert war, schon 1915 an EINSTEIN gesendet. EINSTEIN war sehr angetan von der Tatsache, dass es überhaupt eine exakte Lösung seiner Feldgleichungen gab, und diese dann auch noch so schnell und auf elegante Weise gefunden wurde. Die von SCHWARZSCHILD gefundene Metrik kann man nutzen, um die Auswirkungen der ART experimentell zu überprüfen. Wie eingangs schon erwähnt, bewegen sich zwei Massen in der Newton'schen Mechanik auf exakten Ellipsen umeinander. Dies ist für ein Objekt, welches sich in einer Schwarzschild-Metrik bewegt, nicht mehr der Fall. Man kann zeigen, dass das Gravitationspotential, welches sich als Schwachfeld-Näherung ergibt, eine kleine Korrektur gegenüber dem Newton'schen Potential erhält. Dieser Term sorgt dafür, dass beispielsweise ein Planet im Gravitationspotential seiner Sonne eine Periheldrehung vollführt. Der Planet Merkur ist in unserem Sonnensystem am stärksten von diesem Effekt betroffen. Eine Rechnung zeigt, dass sich seine Bahnellipse in einem Jahr aufgrund relativistischer Effekte um etwa 43 Bogensekunden verdreht. Dieser Effekt ist zwar winzig, aber immer noch messbar und stimmt in hervorragender Näherung mit der Beobachtung überein.

### 2.1.5 Wellenlösungen der Feldgleichungen

In der Elektrodynamik lernt man, dass beschleunigte elektrische Ladungen elektromagnetische Wellen (beispielsweise Licht) aussenden. Das elektrische und magnetische Feld werden durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben, aus welchen sich auf sehr einfache Weise eine Wellengleichung ableiten lässt. Die Einstein'schen Feldgleichungen beschreiben die Krümmung der Raumzeit, also ebenfalls ein Feld. Wie sieht es hier mit der zeitlichen Entwicklung von Störungen des Feldes aus? Auch in

der ART kann man zeigen, dass es Lösungen der Feldgleichungen gibt, die sich wie Wellen durch die Raumzeit bewegen. Um noch mit Papier und Bleistift zu einer Lösung zu kommen, betrachtet man nur kleine Störungen, schließlich sind die Effekte der ART meistens auch nur sehr schwach. Daher ist ein Ansatz, die Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  als Grundlage zu nehmen, welche eine flache Raumzeit beschreibt. Dies gilt sicher weit abseits von größeren Massenansammlungen. Zu dieser „ungestörten“ Raumzeit kommt nun eine kleine Störung  $h_{\mu\nu}$  hinzu. Die Störung  $h$  soll nur betragsmäßig kleine Einträge beinhalten, die auch nur schwach variieren, also kleine Ableitungen besitzen. Näherungsweise kann man dann aus den Feldgleichungen eine Wellengleichung für die Störung  $h$  ableiten:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^* \quad (2.18)$$

In der Elektrodynamik findet man ein analoges Ergebnis für das sogenannte Viererpotential, welches mit dem Viererstrom als Ursache verknüpft ist.



Das Viererpotential fasst das skalare elektrische Potential sowie das Vektorpotential des magnetischen Feldes zu einem Vektor zusammen. Der Viererstrom enthält entsprechend die Ladungs- und Stromdichte. Zusätzlich wird noch eine Eichbedingung für das Potential festgelegt, auf welche wir hier nicht eingehen.

---

Die Ursache für Störungen in der Raumzeit bildet natürlich die Massenverteilung, repräsentiert durch den Energie-Impuls-Tensor. Die Lösung der Wellengleichung war schon vor der Formulierung der ART aus der Elektrodynamik bekannt, und da sich die Strukturen der Gleichungen nicht unterscheiden, hatte man auch die Lösung für Wellen in der Raumzeit schon griffbereit in der Schublade. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass sowohl Wellen im elektromagnetischen Feld als auch in der Metrik mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum wandern. Besonders einfach ist die Beschreibung von Wellen im Vakuum, also in unserem Fall abseits von jeder Masse, sodass der Energie-Impuls-Tensor verschwindet. Man findet folgende Lösung für die Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + a_1 (dx^2 - dy^2) + 2a_2 dx dy, \quad (2.19)$$

mit den zeitabhängigen Koeffizienten

$$a_1 = \lambda_1 \cos k(ct - z), \quad (2.20)$$

$$a_2 = \lambda_2 \cos k(ct - z). \quad (2.21)$$

In der Metrik sieht man nun, dass die Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ( $z$ -Richtung) schwingt, es handelt sich also um eine Transversalwelle. Die entscheidende Frage ist, wie sich diese periodische Verzerrung der Raumzeit physikalisch bemerkbar macht. Dazu muss man ein Teilchen in dieser schwingenden Metrik betrachten, also die Geodätengleichung (2.5) für die vorgegebene Metrik lösen. Man findet, dass sich die Koordinaten des Teilchens nicht verändern, doch da das gesamte Koordinatennetz





**Abb. 2.5:** Zur Veranschaulichung der Veränderung des Raumes beim Durchgang einer Gravitationswelle. Eine Massenverteilung wird in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung periodisch gestreckt und gestaucht (die Zeit verläuft von links nach rechts). Diese Verzerrung hat auch Einfluss auf die Lichtlaufzeit zwischen zwei Koordinatenpunkten, was man wiederum für die Detektion der Welle nutzen kann.

gestreckt und gestaucht wird, ändert sich der räumliche Abstand des Teilchens zum Ursprung. Wenn man mehrere Teilchen auf einem Kreisring betrachtet, so wird die kreisförmige Anordnung physikalisch messbar verformt. Der Kreis wird in  $x$ - und  $y$ -Richtung periodisch gestreckt und gestaucht (siehe dazu auch Abbildung 2.5). Dabei bedeutet „messbar“ nur, dass es prinzipiell einen physikalischen Effekt gibt. Diesen tatsächlich zu messen, ist eine ganz andere Frage. Wie schon mehrmals angedeutet, sind die Effekte der ART bei den üblichen Massenansammlungen so klein, dass man sie gerade noch so, wenn überhaupt, mit den heute zur Verfügung stehenden Mitteln messen kann. Gravitationswellen bilden da keine Ausnahme, und EINSTEIN war sich dieser Tatsache auch bewusst, sodass er vermutet hat, es würde niemals möglich sein, dieses Phänomen zu beobachten. Tatsächlich bedarf es schon gewaltiger Massen, um die Raumzeit messbar zu verformen. Eine Alternative stellen jedoch spezielle Doppelsternsysteme dar. Diese erzeugen zwar keine direkt messbaren Gravitationswellen, man kann jedoch indirekt darauf schließen, dass es solche Wellen geben muss. Denn Gravitationswellen transportieren, ganz wie elektromagnetische Wellen auch, Energie von der Ursache, also den Massen, weg. Somit ist es nicht möglich, dass sich umkreisende Massen stationäre Bahnen beschreiben. Vielmehr müssen sich diese Massen mit der Zeit näher kommen. Wir werden uns im folgenden den verschiedenen Möglichkeiten, Gravitationswellen zu detektieren, zuwenden und die Forschungslage beleuchten.

## 2.2 Einblicke in die Forschung

### Zusammenfassung:

Beginnend mit einer Beobachtung im September 2015 wurden Gravitationswellen mittlerweile schon mehrere Male direkt nachgewiesen. Diese Wellen wurden immer ausgesendet, als zwei schwarze Löcher miteinander verschmolzen und dabei eine unvorstellbare Menge an Energie ins Universum schickten. Das Ereignis im September 2015 dauerte weniger als eine Sekunde und stellt den ersten direkten Nachweis einer solchen Störung der Raumzeit dar. Indirekt wurden Gravitationswellen auch in einem Binärsystem, bestehend aus zwei Neutronensternen nachgewiesen, welche sich aufgrund der Energieabstrahlung immer näher kommen.

### 2.2.1 Indirekter Nachweis in Binärsystemen

Damit Gravitationswellen in einer Stärke emittiert werden, die zumindest einen indirekten Nachweis erlaubt, sind sehr massive Objekte nötig. Unsere Sonne besitzt zwar schon eine große Masse, doch ist sie viele Größenordnungen über ihren Schwarzschildradius hinweg ausgedehnt, sodass gravitative Effekte selbst in der Nähe ihrer Oberfläche immer noch sehr gut durch das Newton'sche Gravitationsgesetz beschrieben werden können. Aktive Sterne wie unsere Sonne stellen jedoch nicht die einzige mögliche Form von Sternen dar. Wenn ein Stern seinen Brennstoff aufgebraucht hat, entfällt der Strahlungsdruck, welcher einem Gravitationskollaps entgegenwirkt, und am Ende seines Lebens besteht die Möglichkeit, dass sich ein weißer Zwerg bildet. Dieses Objekt besteht nicht mehr aus Atomen, vielmehr wurden diese in ihre Bestandteile zerlegt, die Elektronen und die Atomkerne. Elektronen sind Fermionen und können sich daher nicht einen gemeinsamen Quantenzustand teilen.<sup>4</sup> Durch einen gravitativen Kollaps rücken die Elektronen aber immer näher zusammen. Durch diese Lokalisierung wächst die kinetische Energie an, wodurch sich beim Kollaps ein Fermidruck aufbaut, der den Kollaps aufhält. Weiße Zwerge sind wesentlich dichter als unsere Sonne, bilden aber immer noch keine ausreichend starken Gravitationsfelder aus, als dass man deren relativistischen Effekte messen könnte. Ein Stern mit ausreichend großer Masse kann jedoch noch weiter kollabieren als ein weißer Zwerg. Dabei werden die Elektronen mit den Protonen durch den inversen Betazerfall zu Neutronen verschmolzen. Diese lassen sich noch viel dichter packen, und das resultierende Objekt nennt man Neutronenstern. Dieser ist immer noch über seinen Schwarzschildradius

---

<sup>4</sup> Was es genau mit Fermionen auf sich hat, ist an dieser Stelle noch gar nicht so wichtig, daher überspringen wir eine genauere Definition und verweisen statt dessen auf die Kapitel über die Bose-Einstein-Kondensation oder auch den GMR.

hinaus ausgedehnt, aber nur noch wenig, sodass sich Effekte der ART hier deutlich bemerkbar machen. Man kennt mittlerweile sehr viele solcher Neutronensterne, und sie besitzen eine charakteristische Eigenschaft, die man für einen indirekten Nachweis für Gravitationswellen nutzen kann. Neutronen sind magnetische Teilchen, und Neutronensterne erzeugen ein gewaltiges Magnetfeld. Elektrisch geladene Teilchen, die sich im Magnetfeld an den Polen des Neutronensterns bewegen, strahlen elektromagnetische Wellen ab. Zudem rotiert ein Neutronenstern, wenn auch der Stern, aus dem er entstanden ist, einmal rotiert hat. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss sich die Rotationsgeschwindigkeit erhöhen, wenn der Stern schrumpft. Neutronensterne rotieren daher sehr schnell, von wenigen Umdrehungen pro Sekunde bis hin zu mehreren hundert Umdrehungen pro Sekunde. Die Rotationsachse muss, wie bei der Erde auch, nicht mit der Ausrichtung des Magnetfeldes übereinstimmen. Das bedeutet, dass die Orientierung des Magnetfeldes ebenfalls sehr rasch rotieren kann. Überstreicht die magnetische Achse dabei einen Beobachter auf der Erde, nimmt dieser elektromagnetische Pulse wahr, typischerweise im Bereich von Radiowellen. Man nennt Neutronensterne, die auf diese Art gepulste Radiowellen aussenden, Pulsare.

Das Interessante ist dabei die perfekte Regelmäßigkeit der Pulse, typischerweise ändert sich die Pulsdauer um weniger als  $10 \mu\text{s}$  pro Jahr. Sie kann nun wie ein Taktgeber für Messungen verwendet werden. HULSE und TAYLOR [4] haben 1975 einen solchen Pulsar entdeckt, der die Bezeichnung PSR 1913+16 trägt. Seine Rotationszeit wurde zu 59 ms bestimmt. Allerdings gab es über den Tag hinweg periodische Variationen in der Ankunftszeit der Pulse. Mal kamen sie etwas früher an als erwartet, mal etwas später, wobei sich die Verschiebung auf etwa 3 s beläuft. Gedeutet wurde diese Beobachtung dadurch, dass der Pulsar sich relativ zu uns bewegt. Sein Abstand ändert sich periodisch so, dass die Laufzeit der Pulse erst immer länger wird, bis er sich in maximalem Abstand zu uns befindet, um dann wieder abzunehmen, während uns der Pulsar näher kommt. Für eine solche Bewegung muss es aber ein weiteres massives Objekt geben, um das sich der sichtbare Stern bewegt. Von der elliptischen Bahn nehmen wir nur den wechselnden Abstand wahr. Der Partner, um den sich der Pulsar bewegt, ist für uns nicht sichtbar. Entweder ist es kein Pulsar, oder er sendet nicht in unsere Richtung. Die Partnersterne sind fast gleich schwer, etwa 1,4 Sonnenmassen. Seine Bahn durchläuft der sichtbare Stern innerhalb von 7 Stunden und 45 Minuten, der Abstand zum gemeinsamen Schwerpunkt beträgt dabei nur etwa das 2,5fache des Abstands Erde-Mond (daher auch die Verzögerung von 3 s). Diese Zahlen sollen ein Gefühl dafür vermitteln, welche gewaltigen Gravitationskräfte hier wirken müssen.

Das Spannende ist jetzt natürlich, wie sich relativistische Effekte dadurch beobachten lassen. Wie schon ganz am Anfang dieses Kapitels erwähnt, können sich die Partnersterne in einem derartigen Binärsystem nach der ART nicht mehr auf geschlossenen Ellipsenbahnen bewegen. Vielmehr rotieren die Ellipsen, die Bahnen sind also nicht mehr geschlossen. Während in unserem eigenen Sonnensystem dieser Effekt am stärksten beim Merkur auftritt, und hier mit 43 Bogensekunden pro Jahr extrem schwach ist, dreht sich die Ellipse des beobachtbaren Pulsars in PSR 1913+16 um  $4^\circ$  pro