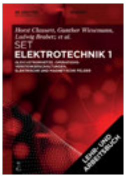
Bernd Ulmann, Martin Wendt, Ingo Klöckl
Medientechnisches Wissen 3
De Gruyter Studium

Weitere empfehlenswerte Titel

Medientechnisches Wissen, Band 1
S. Höltgen (Hrsg.), 2017
ISBN 978-3-11-047748-1, e-ISBN (PDF) 978-3-11-047750-4, e-ISBN (EPUB) 978-3-11-047762-7

Medientechnisches Wissen, Band 2
S. Höltgen (Hrsg.), 2019
ISBN 978-3-11-049624-6, e-ISBN (PDF) 978-3-11-049625-3, e-ISBN (EPUB) 978-3-11-049358-0



Grundgebiete der Elektrotechnik 1, 13. Aufl.
+ Arbeitsbuch Elektrotechnik 1, 2. Aufl.
Clausert, Wiesemann, Brabetz et al., 2021
ISBN 978-3-11-067673-0

Grundgebiete der Elektrotechnik 2, 13. Aufl.
+ Arbeitsbuch Elektrotechnik 2, 2. Aufl.
Clausert, Wiesemann, Brabetz et al., 2021
ISBN 978-3-11-067674-7

Mathematik für angewandte Wissenschaften
Erven, Schwägerl, Horák, 2019
ISBN 978-3-11-054889-1, e-ISBN (PDF) 978-3-11-055350-5, e-ISBN (EPUB) 978-3-11-055365-9

Bernd Ulmann, Martin Wendt, Ingo Klöckl

Medientechnisches Wissen

Band 3: Mathematik, Physik, Chemie

Herausgegeben von Stefan Höltgen

DE GRUYTER
OLDENBOURG

Herausgeber
Dr. Stefan Höltgen
Humboldt-Universität zu Berlin
Inst. für Musikwissenschaft
und Medienwissenschaft
Georgenstr. 47
10117 Berlin
stefan.hoeltgen@hu-berlin.de

ISBN 978-3-11-049626-0
e-ISBN (PDF) 978-3-11-049627-7
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-049359-7

Library of Congress Control Number: 2019957965

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Redaktion: Chiara Rochlitz
Satz: satz&sonders GmbH, Dülmen
Einbandabbildung: Martin Meier
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com

Inhalt

Teil II: **Physik für Medienwissenschaftler (Martin Wendt)**

Teil III: Chemie für Medienwissenschaftler (Ingo Klöckl)

Vorwort des Herausgebers

Seinen Aufsatz zur Einführung in die Computergrafik beginnt Friedrich Kittler (2002) mit James Kajiyas (1986) Differenzialgleichung zum Grafik-Rendering. Die Formel steht über dem Text gleich einem Motto und hat sicherlich bei einigen Lesern Respekt und die Frage provoziert, welche Rolle diese Gleichung für das Folgende bekommt. Kittler diskutiert sie in seinem Beitrag jedoch gar nicht näher, sondern beschreibt ihre Implikationen in Hinblick auf die Mathematisierung von Bildern im Computer. Dieser vom Autor als „halbtechnisch“ bezeichnete Zugriff auf die Technologie soll den medienwissenschaftlichen mit dem technikwissenschaftlichen Diskurs konfrontieren, jedoch ohne dass dabei der letztere die Oberhand gewinnt. Dies zeigt sich schon daran, dass Mathematik in den folgenden Passagen des Textes nicht mehr in ihrer eigenen (Formel-)Sprache zu Wort kommt, sondern in nicht selten metaphorisch-anspielungsreichen Umschreibungen – und dies trotzdem oder weil die mathematische Formelschrift kürzer und exakter sein könnte aber innerhalb einer kultur- und medientheoretischen Einordnung des Themas wenig hilfreich wäre, weil sie dort nur selten gelesen werden will oder kann.

Medienwissenschaftler[1] begegnen im Studium und in der Forschung häufig formalen Schriften, wenn es um die Darstellung medientechnischer Sachverhalte geht, weil zahlreiche Quellen aus der technomathematischen Sphäre stammen, weil Mathematiker, Informatiker, Elektroniker, Physiker, Biologen, Chemiker und andere die für sie relevanten Prozesse in Diagramm- und Formelschreibweise notieren, um semantischen Interpretationsspielraum oder gar Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Gerade die Beschreibung medientechnischer Apparate und Prozesse, beispielsweise in Patentschriften, verlangt derartig unzweideutige Notationen. Und auch ausführliche wissenschaftliche Auseinandersetzungen mit den Grundlagen von Medienwissenschaft (etwa der Digitaltechnik, der Kybernetik oder der Informationstheorie) fordern vom Leser formalwissenschaftliche Lesekompetenz. Eine an der Medientechnologie und Medientechnik orientierte und interessierte Medienwissenschaft kann sich also eine Unkenntnis dieser Wissenschaften und ihrer Zeichensysteme kaum erlauben. Denn dort, wo Formeln in einem Text auftauchen, nehmen sie zumeist die Stellung von Argumenten ein; sie zu überlesen oder gar als redundante Illustrationen zu sehen, würde dann dazu führen, den Argumentationsgang nicht nachvollziehen zu können. Aus diesem Grund muss die Medienwissenschaft in der Ausbildung und Forschung auf diese Disziplinen als Rüstzeug zurückgreifen können.

Die Erarbeitung der Disziplinen Mathematik, Physik und Chemie kann in einigen Fällen direkt an der Betrachtung von Medientechnologien vorgenommen werden. Es wäre jedoch didaktisch nicht ratsam diese darauf zu beschränken, weil die „Lektü-

1 Zur Lektüreerleichterung wird in diesem Buch das generische Maskulin verwendet, womit aber alle Geschlechter gemeint und angesprochen sein sollen.

https://doi.org/10.1515/9783110496277-201

rekompetenz“ (medien)technischer Texte künftig vielleicht noch weitere Aspekte solcher Disziplinen vom Leser abverlangt und ein grundsätzliches Verständnis nur auf dem Verstehen der Grundsätze fußen kann. Daher werden hier neben den Applikationen dieser Disziplinen im Bereich der Medientechnik auch solche Grundlagen vermittelt. Dies betrifft insbesondere die *Definition der Fachterminologien*, Vermittlung von *Lesekompetenz formaler Darstellungen, Herleitungen und Beweise* einzelner theoretischer Aspekte wie auch historische Darstellungen der einzelnen Disziplinen (und Teilen davon). Aus diesem Grund haben die Autoren zentrale Konzepte und Theorien um Verweise auf ihre Urheber und Begründer ergänzt. Dies ermöglicht nicht nur eine historische Einordnung des behandelten Themas, sondern bietet auch einen epistemologischen Ansatzpunkt für inhaltliche Diskussionen.

Gerade dieser letzte Punkt könnte sich künftig als Betätigungsfeld von Medienwissenschaft zeigen, weil die medienepistemologischen Grundlagen von Mathematik, Physik und Chemie – von den Messgeräten über die Aufschreibesysteme bis hin zu den fachspezifischen Denkweisen und Wissenskonzepten – maßgeblich zu deren gegenwärtigem Status beigetragen haben. Die medientechnischen Aprioris dieser Fächer wären daher zu erforschen und darzustellen, was allerdings wiederum ohne Kenntnisse in diesen Fächern unmöglich zu leisten ist oder zu Ungenauigkeiten, Widerspruch und letztlich Unglaubwürdigkeit führen muss.

Der vorliegende dritte Band der Lehrbuchreihe *Medientechnisches Wissen* stellt – von Fachleuten auf ihrem Gebiet – die Disziplinen *Mathematik, Physik* und *Chemie* dar, jeweils unter Berücksichtigung ihrer medientechnischer Applikation aber nicht auf diese reduziert. Die Kapitelreihung ist dabei so angelegt, dass mit dem Vorwissen des jeweils vorangegangenen Kapitels das jeweils nächste Kapitel erschlossen werden kann. Dies wird durch Querverweise in zu einzelnen Teilbänden dieses sowie der anderen Bände der Reihe gekennzeichnet.[2] Solche Querverweise helfen also nicht nur dabei Redundanzen zu vermeiden und den notgedrungen geringen Platz für die Darstellungen der jeweiligen Disziplin besser zu nutzen; sie ermöglichen es dem Leser auch „über den Tellerrand“ hinauszublicken und – oft mit Hilfe medientechnischer Beispiele – die Interdependenzen der Fachgebiete untereinander aufzuzeigen. Diesen Zweck verfolgt ebenfalls das angehängte Stichwortverzeichnis, in welchem alle im Band genannten medientechnischen Apparate, Wissenschaftler und zentrale Begriffe gelistet sind. Bei letzteren liegt der Akzent neben kapitelübergreifenden Fachbegriffen der Einzeldisziplinen auf Verweise zu medienwissenschaftlichen, -technischen und -historischen Lemmata.

Bernd Ulmanns Kapitel zur *Mathematik für Medienwissenschaftler* steigt in die Thematik dort ein, wo noch Abiturwissen vorliegen sollte. Nach einer Einführung in

---

2 Die Querverweise zu Kapiteln *im selben Band* werden wie folgt angegeben: Eine römische Ziffer gibt den Teilband an (hier: I für Mathematik, II für Physik, III für Chemie), die nachfolgenden lateinischen Ziffern die jeweiligen Kapitelnummern. Wird *zu anderen Bänden der Reihe* verwiesen, wird die Angabe „Band“ mit der betreffenden Bandnummer vorangestellt.

die mathematische Notation stellt er die Gebiete Analysis, Lineare Algebra und Stochastik vor – jeweils mit spezifischen Anwendungsfällen, denen Medienwissenschaft-Studenten schon einmal begegnet sein könnten (etwa die Mandelbrot-Menge, Zahlensysteme, das Abtast-Theorem, die Fourier-Analyse oder die Informationsentropie). Auf eine eigene Darstellung der Geschichte der Rechenautomaten, die sicherlich eng mit der Mathematik in Zusammenhang stehen, haben wir aus Gründen der thematischen Stringenz verzichtet und verweisen hierfür auf die ausführliche und reichhaltig bebilderte Darstellung Helmut Bruderers (2018a, 2018b). Anstelle dessen lässt der Autor Programmierexperimente zur Veranschaulichung komplexer (teilweise im doppelten Wortsinne) mathematischer Sachverhalte einfließen.

Im Kapitel *Physik für Medienwissenschaftler* stellt der Astrophysiker *Martin Wendt* viele der klassischen Gebiete der Physik noch einmal vor und zeigt, worin ihre Relevanz für die Medienwissenschaft besteht. Hierzu müssen die Grundlagen der Mechanik, des Elektromagnetismus, der Optik, Wärme, Bewegung und anderer Felder jeweils knapp rekapituliert werden. Medientechnische Apparate, die zur Messung physikalischer Sachverhalte genutzt werden, sowie solche Geräte, in denen die jeweils diskutierten physikalischen Gesetze zur Anwendung kommen (wie etwa in der Optik), illustrieren den Text. Ein Ausblick in die Quantenmechanik schließt zum einen an die vorangegangenen Bände, in denen Quantencomputer thematisiert wurden, an und leitet zum Thema Chemie über.

Der Farbchemiker *Ingo Klöckl* legt mit seinem Teilband *Chemie für Medienwissenschaftler* die wahrscheinlich erste auf dieses Feld fokussierte Abhandlung vor. Hierin geht er von der Geschichte der Chemie (basierend auf der Entwicklung und Erweiterung des Periodensystems der Elemente) und den Grundlagen der anorganischen und organischen Chemie zu Anwendungsfällen chemischer Verfahren und Stoffe in der Medientechnik über. Dies sind in der Anorganik vor allem Gläser und Keramiken (in Linsen, als Filter, Isolatoren etc.), Metalle (als Leiter, Energiespeicher und in Sonderanwendungen der Elektronik) sowie Halbleiter (in Digitaltechnik). Organische Chemie ist insbesondere in der Kunststoffindustrie (Isolatoren, Gehäuse, Datenträger, . . .), bei Kleb- und Farbstoffen wichtig. Ihre Nomenklatur, Taxonomie und Reaktionstypen, die sich von denen der anorganischen Chemie unterscheiden, werden gesondert dargestellt. Den Abschluss bildet ein Kapitel über Foto- und Farbchemie, in welchem historisch und systematisch die Entwicklung dieser medientechnischen Anwendungsfelder dargelegt wird.

Mit diesem dritten Band der Lehrbuchreihe soll also eine zentrale Grundlage zum Verständnis der natur- und ingenieurswissenschaftlichen Probleme der Medientechnik vorgestellt werden. Die Einarbeitung bedarf, aufgrund der Abstraktheit der Themengebiete, sicherlich einer konzentrierten Diskussion in Seminaren und/oder Vorlesungen – flankiert durch ergänzende, vertiefende und Nachschlagsliteratur. Hierfür geben die drei Autoren am Ende ihrer Teilbände kurze und begründete Lektüreempfehlungen. In dem Maße, wie diese Fachgebiete hier für die Medienwissenschaft erschlossen werden, hoffen wir auch zeigen zu können, wie sich Medientechnologien (etwa in Form von Messinstrumenten und Darstellungsverfahren) auch in die jeweiligen Formal-, Natur- und Ingenieurswissenschaften eingeschrieben haben. Die Reihe *Medientechnisches Wissen* könnte hier einen interdisziplinären Dialog eröffnen, der Medienwissenschaft als eine Sturkturwissenschaft definiert, die transversal zu den Fächern verläuft.

Die Redaktion des dritten Bandes *Medientechnisches Wissen* wurde von Chiara Rochlitz besorgt. Ihr sowie den Autoren Bernd Ulmann, Martin Wendt und Ingo Klöckl, die vor die Aufgabe gestellt wurden, das Wissen Ihres Fachgebietes auf circa 150 Seiten zu konzentrieren und im Redaktionsprozess zu streichen, zu ergänzen und zu erläutern, gilt mein Dank ebenso wie Wolfgang Ernst, dem Lehrstuhlinhaber für Medientheorien an der Berliner Humboldt-Universität für seine kritische Vorabdiskussion der Kapitel. Dem *DeGruyter*-Verlag, dessen Lektoren und Setzer uns bei der Erstellung des Bandes technikkundig zu Seite gestanden haben, sei darüber hinaus gedankt.

Berlin im Frühjahr 2020
Stefan Höltgen

Literatur

Kittler, Friedrich (2002): Computergrafik. Eine halbtechnische Einführung. In: Wolf, Herta (Hg.): Paradigma Fotografie. Fotokritik am Ende des fotografischen Zeitalter. Band 1. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 178–194.

Bruderer, Herbert (2018a): Meilensteine der Rechentechnik. Band 1: Mechanische Rechenmaschinen, Rechenschieber, historische Automaten und wissenschaftliche Instrumente. 2. Auflage. Berlin/Boston: Oldenbourg/De Gruyter.

Bruderer, Herbert (2018b): Meilensteine der Rechentechnik. Band 2: Erfindung des Computers, Elektronenrechner, Entwicklungen in Deutschland, England und der Schweiz. 2. Auflage. Berlin/Boston: Oldenbourg/De Gruyter.

Kajiya, James T. (1986): The rendering equation. In: Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH) 1986, ACM Press, S. 143–150.

Teil I: **Mathematik für Medienwissenschaftler (Bernd Ulmann)**

1 Einleitung

So ungeliebt Mathematik häufig als Schulfach ist, handelt es sich bei ihrer zumindest grundlegenden Beherrschung um eine Kernkompetenz, lässt sich ohne ihre Werkzeuge und Methoden doch weder die Natur beschreibend erfassen, noch ist wirklicher Erkenntnisgewinn im eigentlichen Sinne möglich. Ohne die zugegebenermaßen gerade zu Beginn des Studiums erdrückend erscheinende Rigorosität, die jeder mathematischen Behandlung eines Gegenstandes zugrunde liegt, wäre es unmöglich, neben dem reinen Beschreiben beobachtbarer Sachverhalte auch begreifend und schöpferisch tätig zu werden. Die folgenden Kapitel geben einen – aus Platzgründen zwangsläufig hinsichtlich seines Umfanges stark beschränkten – Überblick über wesentliche Begriffe und Gedanken der Mathematik und möchten zum weiterführenden Selbststudium anregen.

An erster Stelle sollte bei einer Beschäftigung mit mathematischen Fragen stets die Freude an der Beschreibung mehr oder weniger komplexer Fragestellungen und ihrer hoffentlich anschließenden Lösung im Vordergrund stehen. Mathematik ist keine dröge Wissenschaft! Ganz im Gegenteil. In wenigen Fachgebieten tummelten sich im Laufe der Geschichte so viele oftmals vielseitig begabte und häufig auch schillernde Persönlichkeiten, deren Blick meist weit über den sprichwörtlichen Tellerrand ihres eigentlichen Fachgebietes hinaus ging und geht, wie in der Mathematik.

Ebenso darf die Feststellung nicht fehlen, dass Mathematik in unserer Zeit eine Rolle spielt, die noch vor wenigen Jahrzehnten unvorstellbar gewesen wäre. Ohne Mathematik und die ihr nahe verwandte Informatik wäre eine vergleichsweise hochtechnologische Zivilisation wie die unsere weder realisier- noch an sich überhaupt denkbar. Kein Bereich des täglichen Lebens kommt ohne mathematische Verfahren in Form von Algorithmen aus, keine Maschine kann ohne die Verwendung von Methoden aus auf den ersten Blick extrem abstrakt anmutenden mathematischen Fachgebieten entwickelt, gebaut oder betrieben werden. Telekomunikation wäre noch immer ein Traum ohne die mathematischen Arbeiten beispielsweise eines Oliver Heaviside[1] und anderer, die ubiquitäre Verfügbarkeit von Strom, Wasser, Gas, die Steuerung von Verkehrsflüssen, schlicht alles, was unsere moderne Welt im wahrsten Wortsinne am Laufen hält, beruht letztlich auf Mathematik.

Ein Beitrag wie der vorliegende ist ohne die Hilfe eine Reihe von Personen nicht denkbar. Zunächst möchte ich meiner Frau, Rikka Mitsam, nicht nur für ihre Geduld, mit der sie in den letzten Monaten auf mich verzichtet hat, sondern vor allem für ihre Hilfe beim Korrekturlesen und für viele Verbesserungsvorschläge danken. Weiterhin gebührt Herrn Erik Reischl für seine Korrekturen und Anmerkungen Dank. Nicht zuletzt möchte ich Herrn Dr. Stefan Höltgen danken, auf dessen Initiative das ganze Buchprojekt zurückgeht.

1 Eine sehr lesenswerte Biographie findet sich beispielsweise in (Mahon 2017).

https://doi.org/10.1515/9783110496277-001

2 Einführung

2.1 Notation und Begriffe

Schlägt man ein mathematisches Fachbuch auf, fällt zuallererst der ungewohnte Textsatz ins Auge: Während bei vielen anderen Wissenschaften Textpassagen überwiegen, nimmt herkömmlicher Text häufig nur einen kleinen Teil einer mathematischen Veröffentlichung ein. Dafür überwiegt eine auf den ersten Blick vollkommen unverständlich anmutende abstrakte Zeichensprache. Dies rührt nicht daher, dass Mathematiker sich partout von anderen Wissenschaften durch eine eigene, arkane Zeichensprache absetzen möchten – ganz und gar nicht. Hintergrund dieser Eigentümlichkeit ist die Tatsache, dass Mathematik eine auf die Spitze getriebene Rigorosität und Genauigkeit im Ausdruck hinsichtlich ihrer Ausdrucksmittel *erfordert*. Natürliche Sprachen sind, wenn derart hohe Ansprüche gestellt werden, vollkommen ungeeignet, wie der niederländische Mathematiker und Informatiker Edsger Wybe Dijkstra einmal wunderbar auf den Punkt brachte (Dean et al., 1996, Vorwort):

> So-called 'natural language' is wonderful for the purposes it was created for, such as to be rude in, to tell jokes, to cheat or to make love in (and Theorists of Literary Criticism can even be content-free in it), but it is hopelessly inadequate when we have to deal unambiguously with situations of great intricacy, situations which unavoidably arise in such activities as legislation, arbitration, mathematics or programming.

Die Geschichte der Mathematik und damit auch die der Frage, wie man möglichst eindeutig und schnell verständlich hochkomplexe Sachverhalte formulieren und notieren kann, reicht nicht nur Jahrhunderte, sondern Jahrtausende zurück. Bereits in babylonischen Keilschrifttexten finden sich erstaunlich anspruchsvolle Rechenaufgaben, wie diese hier, deren Formulierung noch ohne eine ausgefeilte Notation auskommen musste und entsprechend nur auf den ersten Blick leicht verständlich ist (siehe (Neugebauer 1969: S. 71)):

> Länge mit 3 vervielfacht[,] Breite mit 2 vervielfacht[,] addiert quadratisch[,] Fläche [der] Länge addiert und so 4,56,40.

Zunächst einmal fällt eine seltsame Zahlennotation auf: „4,56,40" ist natürlich eine Umschrift in moderne Zahlendarstellung, aber dennoch nicht sofort verständlich. Hierzu muss man wissen, dass die Babylonier mit einem Zahlensystem zur Basis 60, dem *Sexagesimalsystem*, rechneten – im Unterschied zu unserem heute gebräuchlichen Zehnersystem. Eine Folge dieses Zahlensystems ist in moderner Zeit noch immer

https://doi.org/10.1515/9783110496277-002

bei der Angabe von Zeiten und Winkeln zu spüren, bei denen jeweils 60 Sekunden eine Minute und 60 Minuten eine Stunde beziehungsweise ein (Alt-)Grad darstellen.[2]

Übersetzt man diesen historischen Text in eine moderne Form, gestaltet sich die Formulierung an sich nicht nur wesentlich kürzer, sondern auch und vor allem prägnanter:

$$(3x + 2y)^2 + x^2 = 4, 56, 40$$

In Ermangelung der Idee einer Variablen als Stellvertreter für einen gesuchten Wert oder gar eine gesuchte Funktion mussten sich die Babylonier bei der Formulierung ihrer mathematischen Probleme, die häufig einen ausgesprochen praktischen Hintergrund besaßen, noch mit Begriffen aus der Anschauungswelt, wie „Länge", „Breite" und „Fläche" behelfen, was die obige Aufgabenstellung aus heutiger Perspektive nahezu unsinnig erscheinen lässt.

Erst die wunderbare Idee, Buchstaben oder besondere Symbole zur Kennzeichnung beliebiger unbekannter Quantitäten etc. zu verwenden, befreite die Mathematik aus diesem Korsett einer durch eine ungeeignete und ungenügende Notation erzwungen „Anschaulichkeit", die in den meisten Fällen eher in die Irre führte, als zu einem Erkenntnisgewinn beizutragen. Auch Symbole zur Kennzeichnung einfacher oder auch komplexer Operationen, wie $+$, $-$, $\int$ uvm., die uns heute selbstverständlich erscheinen und in vielen Fällen ihren Weg in den Alltag gefunden haben, sind das Resultat eines im Grunde genommen jahrtausendelangen Ringens um sprachliche und notationstechnische Präzision, die von der stetig wachsenden Komplexität der untersuchten Sachverhalte geprägt war. Bereits Landvermesser im alten Ägypten standen vor einer vergleichsweise komplexen Aufgabe – nach Überschwemmungen mussten Landstücke vermessen und zugewiesen werden. Während die Flächenbestimmung bei quadratischen Formen einfach ist, steigt die Komplexität über Trapeze bis hin zu mehr oder weniger unregelmäßig geformten Ackerflächen stark an.

Mit der ständig steigenden Komplexität der Fragestellungen, die nurmehr mit Hilfe mathematischer Methoden beschrieben und untersucht werden konnten, musste auch die mathematische Notation immer weiter verfeinert werden – ein Vorgang, der niemals abgeschlossen sein wird: Mit mächtigeren Ausdrucksmitteln können komplexere Fragestellungen untersucht werden. Im Verlauf dieser Untersuchungen ergeben sich jeweils neue Fragestellungen, die über kurz oder lang Änderungen, Anpassungen und Erweiterungen der Notation erforderlich machen, wodurch deren Leistungsfähigkeit weiter steigt usf.

2 Bei der praktischen Handhabung stellt ein solches Sexagesimalsystem den Anwender vor eine nicht zu unterschätzende Hürde: Während eine kleine Einmaleinstabelle lediglich 100 Einträge enthält, die mit wenig Mühe zur Beschleunigung von Rechnungen auswendig gelernt werden können, verfügt eine entsprechende Multiplikationstafel im Sexagesimalsystem über $60 \cdot 60 = 3600$ Einträge. Dieser Nachteil wird nur zu einem kleinen Teil durch den Vorteil erkauft, dass die Darstellung großer Zahlenwerte weniger Ziffern als beispielsweise im Dezimalsystem erfordert und darüber hinaus die 60 als Basis mehr Teiler als die heute gebräuchliche 10 aufweist, was einige Rechnungen wiederum vereinfacht.

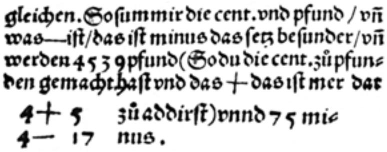
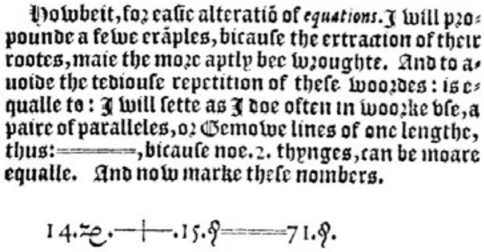

gleichen. So summir die cent. vnd pfund / vñ was — ist / das ist minus das setz besunder / vñ werden 4539 pfund (So du die cent. zu pfunden gemacht hast vnd das + das ist mer das 4+5 zu addirst) vnnd 75 minus. 4— 17

Abb. 2.1: Die Verwendung von „+“ und „−“ in (Widmann 1508:59f.)


Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══════, bicause noe. 2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

14.ꝛ.—+—.15.ϕ═════71.ϕ.

Abb. 2.2: Die Einführung des Gleichheitszeichens und die erste bekannte Gleichung, $14x + 15 = 71$ (siehe (Recorde 1557:236))

Ein schönes Beispiel hierfür sind die heute nahezu jedem geläufigen Symbole „+“ und „−“, welche die Operationen *Addition* und *Subtraktion* repräsentieren. Noch vor etwa 500 Jahren waren diese Symbole nicht bekannt und selbst einfache kaufmännische Rechnungen konnten nur verklausuliert ausgedrückt werden. Es ist Johannes Widmann, der 1486 in Leipzig die wohl erste wirkliche Algebra-Vorlesung hielt, zu verdanken, bei dieser Gelegenheit diese beiden Symbole in Welt gesetzt zu haben. Weite Verbreitung fanden sie nach der Publikation seines Buches „*Behend und hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschafften*“, aus dem auch Abb. 2.1 entnommen ist. Auch andere, zum Teil heute wieder nahezu vergessene mathematische Symbole wurden, wenn auch nicht von Widmann eingeführt, so doch einem breiten Publikum bekannt gemacht. Hierunter fallen beispielsweise die sogenannten *cossischen Zeichen*, die Vorläufer unserer heutigen Potenzschreibweise einer Variablen wie x sind. Andere Autoren, wie beispielsweise Heinrich Schreiber, übernahmen das Plus- und Minuszeichen in ihre Texte und sorgten so für weitere Verbreitung.

Erst 1557 wurde eines der wichtigsten und mächtigsten mathematischen Symbole eingeführt, das unscheinbare Gleichheitszeichen „=“. Robert Recorde verwendete zwei parallele Linien, um kenntlich zu machen, dass zwei Dinge einander gleich sind, da, wie er ausführte, nichts gleicher als ebensolche zwei Parallelen sein kann. Abb. 2.2 zeigt die erste wirkliche *Gleichung*, d. h. die erste notationstechnische Repräsentation zweier einander gleicher Dinge:

$$14x + 15 = 71$$

Die Einführung des Gleichheitszeichens und des damit verbundenen Konzeptes verschaffte der Mathematik und damit einhergehend den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, einen zuvor unvorstellbaren Aufschwung, der bis heute anhält und mit einer immer komplexeren und leistungsfähigeren Notation einhergeht. Entsprechend groß ist die Bedeutung, die einer grundlegenden Lesekompetenz hinsichtlich mathematischer Ausdrücke zukommt.

Angemerkt werden soll abschließend noch, dass die heute verwendete mathematische Notation nicht ohne Nachteile ist. Aufgrund der langen historischen Entwicklung, der unterschiedlichen, zum Teil nach Jahrzehnten oder Jahrhunderten zusammenfließenden Strömungen innerhalb der Mathematik, persönlicher Vorlieben und Abneigungen einflussreicher Mathematiker und aufgrund vieler anderer Ursachen finden sich viele Eigenschaften, die man, könnte man eine solch komplexe Notation von Grund auf neu entwickeln, sicherlich vermeiden würde. Selbst etwas im Grunde genommen einfaches wie die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer beliebig vorgegebenen Zahl n, die zwar intuitiv verständlich als $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ geschrieben werden kann, aus Gründen der Eindeutigkeit und besseren Manipulierbarkeit jedoch in der Regel als

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

notiert wird, ist aus heutiger Sicht zumindest gewöhnungsbedürftig, da dieser Ausdruck nicht einfach von links nach rechts gelesen wird, sondern die unter und über dem großen griechischen Buchstaben *Sigma* stehenden Ausdrücke ebenfalls berücksichtigt werden müssen.

Viele, wenn nicht die meisten mathematischen Ausdrücke, besitzen diese Eigenschaft, nicht einfach linear von links nach rechts gelesen werden zu können, sondern sind vielmehr flächig in ihrer Form, eine Eigenschaft, die dem Deutschen oder Englischen etc. fremd ist. Einer der bekanntesten und bemerkenswerten Ansätze, die mathematische Notation als solche grundlegend zu reformieren, geht auf den kanadischen Mathematiker und Informatiker Ken Iverson zurück, der in (Iverson 1962) nichts weniger als eine vollständig eigene, extrem leistungsfähige Notation vorstellte, die kurze Zeit später zum Ausgangspunkt für die Programmiersprache *APL* wurde. Leider konnte sich Iversons Notation nicht gegen die seit Jahrhunderten benutzte und gewohnte Notation durchsetzen.

Die folgende Tabelle listet einige grundlegende mathematische Symbole auf, die im weiteren Verlauf an jeweils geeigneter Stelle eingeführt werden. An dieser Stelle dienen sie zunächst als Ausgangspunkt zur Erläuterung der grundlegenden Struktur mathematischer Formeln, anhand derer eine gewisse Lesekompetenz in diesem Bereich erlangt werden kann.

Symbol	**Bedeutung**
$\cup$	Mengenvereinigung
$\cap$	Mengenschnitt
$\setminus$	Mengendifferenz
$\{\dots\}$	Mengenklammern
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\varnothing$ oder $\{\}$	leere Menge
$\mathcal{C}^0$	Menge der stetigen Funktionen
$\mathcal{C}^n$	Menge n-mal stetig differenzierbarer Funktionen
$[a,b]$	Geschlossenes Intervall von a bis b
(a,b) oder $]a,b[$	Offenes Intervall von a bis b
$\wedge$	Logisches Und
$\vee$	Logisches Oder
$\neg$ oder $\sim$	Logische Negation
$\perp$	Orthogonal
$\circ$	Hintereinanderausführen von Funktionen
$+$	Addition
$-$	Subtraktion
$\cdot$	Multiplikation (nur in Ausnahmefällen notiert)
/ oder $\frac{a}{b}$	Division
$\mid$	teilt ohne Rest
$\nmid$	teilt nicht ohne Rest
$\times$	Kartesisches Produkt
$>$	größer
$<$	kleiner
$=$	Gleichheitszeichen
$:=$	Definition/Festlegung
$\geq$	größer gleich
$\leq$	kleiner gleich
$\subset$	echte Teilmenge
$\subseteq$	Teilmenge
$\lvert x\rvert$	Betrag von x
Δ	Differenz
d	Differential
∂	Partielles Differential
$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$	Summe über alle a_i, wobei i von 0 bis n läuft
$\prod\limits_{i=0}^{n} a_i$	Produkt über alle a_i, wobei i von 0 bis n läuft
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral über $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b
$\aleph_0$	Aleph-Null
$\mathcal{O}$	Big-O, ein Komplexitätsmaß (Landau-Symbol)
$x!$	Fakultät von x
Γ	Gamma-Funktion
$\Longrightarrow$	Aus ... folgt...
$\Longleftrightarrow$	... genau dann, wenn...
$\longrightarrow$	... geht gegen...
$\longmapsto$	Abbildungsvorschrift
$\exists$	Es gibt/existiert ein...
$\exists!$	Es gibt/existiert genau ein...
$\forall$	Für alle...

Symbol	Bedeutung
$\square$	Ende eines Beweises
$p(x)$	Polynom
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
$P\left(A\middle\|B\right)$	Bedingte Wahrscheinlichkeit
$\rho(x_i)$	Wahrscheinlichkeitsfunktion
$F(x)$	Stammfunktion, kumulative Verteilungsfunktion,...
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Delta
e	Euler'sche Zahl
π	Kreiszahl („Pi")
σ_X^2	Varianz
$\sqrt{\dots}$	Quadratwurzel
$\sqrt[n]{\dots}$	n-te Wurzel

Sogenannte *Variablen*, d. h. „Stellvertreter" für (unbekannte) Größen, werden durch Buchstaben in mathematischen Formeln repräsentiert, wobei häufig x, y und z verwendet werden. Eine einfache Gleichung wie $y = 2x$ wird stets von links nach rechts gelesen, in diesem Fall also „y ist gleich zwei mal x". Häufig genügen einzelne Buchstaben nicht, um alle Variablen einer Problemstellung zu spezifizieren. In solchen Fällen wird oft mit sogenannten *Indizes* gearbeitet, bei denen es sich um satztechnisch tiefgestellte Zahlen handelt, wie zum Beispiel in $x_2 = x_1 + x_0$ Gelesen wird dies als „x-zwei ist gleich x-eins plus x-null". Solche festen Indizes sind eher unüblich, da die Stärke der Mathematik gerade darin liegt, allgemeine Aussagen treffen zu können, so dass eher eine Formulierung wie $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$ anzutreffen sein wird, die als „x-i ist gleich x-i-minus-eins plus x-i-minus-zwei" gelesen wird. Der Index i ist hierbei selbst eine Variable, die in der Regel eine sogenannte *natürliche Zahl* ist, d. h. nur positive ganzzahlige Werte $1, 2, 3, 4, \dots$ annehmen kann.

Im Textsatz gelten für mathematische Formeln besondere Regeln, wie an dieser Stelle bereits aufgefallen sein dürfte. Variablen werden meist in kursiven Buchstaben gesetzt, um sie unter anderem von besonderen Funktionen wie $\sin(x)$ zu unterscheiden.[3]

Funktionen sind Berechnungsvorschriften, die auf ihren sogenannten *Argumenten* arbeiten, die zwischen dem auf den Funktionsnamen folgenden Klammerpaar notiert werden. Das Argument der eben genannten Sinus-Funktion ist hier also die Variable x. Werden allgemeine Funktionen benutzt, so werden diese meist durch einen ebenfalls kursiven Buchstaben f, g, selten auch h, kenntlich gemacht. Das folgende Beispiel definiert eine Funktion mit Namen f, die zwei Argumente x und y besitzt:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3 Eines der besten Werkzeuge für professionellen Text- und Formelsatz ist das LaTeX-System, von Notlösungen, wie sie typische Textverarbeitungsprogramme anbieten, sollte nicht zuletzt aus ästhetischen Gesichtspunkten abgesehen werden.

Gelesen wird dies als „f von x, y ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe von x-Quadrat und y-Quadrat“. Die hier auftretende Quadratwurzel ist an sich auch eine Funktion, allerdings wird sie aus historischen Gründen wie gezeigt notiert. Der obere Querbalken des Wurzelsymbols ragt über das gesamte Argument der Wurzelfunktion.

Das folgende Beispiel ist aus der Algorithmik entlehnt, wo es im Zusammenhang mit der Laufzeitkomplexität von Algorithmen (vgl. Band 2, Kap. I.5.1.3) auftritt. Es ist hinsichtlich der mathematischen Lesekompetenz vor allem aufgrund der Verwendung verschiedener sogenannter *Quantoren* von Interesse:

$$\mathcal{O}(f(n)) = \left\{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \,\middle|\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \wedge c \in \mathbb{R}^+, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\right\}$$

Gelesen wird diese auf den ersten Blick etwas verwirrend wirkende Formulierung wie folgt: „O von f von n ist die Menge aller Funktionen g, die von den natürlichen Zahlen auf die natürlichen Zahlen abbilden, wobei gilt, dass es ein ganzzahliges n-null und einen positiven reellen Wert c gibt, so dass für alle n größer oder gleich n_0 gilt: g von n ist kleiner oder gleich c mal $f(n)$“.

Wie aus der oben stehenden Tabelle ersichtlich ist, bezeichnet das Symbol $\mathbb{N}$ die sogenannte Menge der *natürlichen Zahlen*, die an dieser Stelle intuitiv als die Zusammenfassung aller positiven ganzen Zahlen (gegebenenfalls einschließlich der Null) verstanden werden kann. Präziser werden diese und andere grundlegende Mengen in Kapitel 2.3 behandelt. Das Symbol $\in$ besagt, dass die links hiervon notierte Variable ein Element der rechts von diesem Zeichen stehenden Menge ist.

Eine Reihe mathematischer Symbole verfügt über Indizes oder Grenzen, die unter und über dem eigentlichen Symbol notiert werden. An diesen Stellen wird entsprechend kurzfristig von der gewohnten Leserichtung von links nach rechts abgewichen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(t-u)\,\mathrm{d}u = f(t)$$

Gelesen wird dieser Ausdruck als „Das Integral von minus unendlich bis plus unendlich über Delta von u mal f von t minus u d u ist gleich f von t“. Das kleine Delta ist ein Beispiel für die an sich häufige Verwendung griechischer Buchstaben in mathematischen Ausdrücken. Um derartige Gleichungen lesen zu können, ist die Tabelle griechischer Buchstaben in Anhang 6.

Ein weiteres Beispiel für eine mathematische Operation, die Grenzen unter und über dem sie repräsentierenden Symbol verwendet, ist das Summenzeichen $\sum$, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gelesen: „Die Summe von i gleich eins bis n über i ist gleich n mal n plus eins halbe.“

2.2 Grundlegende Beweistechniken

Der zentrale Gedanke der Mathematik ist, Dinge zu beweisen, um allgemeingültige Aussagen zu erhalten. Nur selten sind spezielle Eigenschaften mathematischer Objekte von Interesse, wie beispielsweise die Feststellung, dass 2 die einzig gerade Primzahl ist. Von wirklicher Relevanz sind in der Regel Aussagen, die sich durch logisches Schließen auf einige (wenige) sogenannte *Axiome* sowie andere bereits bewiesene Aussagen zurückführen lassen. (Vgl. Band 1, Kap. I.2)

Als Axiom wird eine Aussage bezeichnet, die innerhalb des betrachteten Systems (in diesem Falle also der Mathematik als solcher) nicht bewiesen werden kann, aber sozusagen „einleuchtend" oder „intuitiv" klar ist. Beispielsweise werden die natürlichen Zahlen, deren Menge mit $\mathbb{N}$ symbolisiert wird, durch die nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano benannten *Peano-Axiome* charakterisiert. Umgangssprachlich können diese wie folgt formuliert werden:

- 0 (oder 1 – je nachdem, wie man den Beginn der natürlichen Zahlen festlegt) ist eine natürliche Zahl. Geschrieben wird dies als $0 \in \mathbb{N}$.
- Jede natürliche Zahl hat eine Nachfolgerzahl n^*, die ebenfalls eine natürliche Zahl ist, d. h. $\forall n \in \mathbb{N} : n^* \in \mathbb{N}$.
- 0 (oder 1 – siehe oben) ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl, also $\forall n \in \mathbb{N} : n^* \neq 0$.
- Zwei beliebige natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich, d. h. $\forall n, m \in \mathbb{N} : n^* = m^* \implies n = m$. Gelesen wird dies als „für alle n und m aus der Menge der natürlichen Zahlen gilt, dass, wenn die Nachfolger n^* und m^* von n und m gleich sind, auch n und m gleich sind".
- Enthält eine Menge X (Mengen werden meist mit kursiven Großbuchstaben bezeichnet) die 0 (oder 1) und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n^*, so sind die natürlichen Zahlen, d. h. $\mathbb{N}$, eine *Teilmenge* von X, d. h. X enthält mindestens alle Elemente, die auch $\mathbb{N}$ enthält.

Keine dieser Aussagen kann auf einfachere Aussagen zurückgeführt, d. h. *bewiesen* werden, aber jede dieser Aussagen ist intuitiv „klar". Um damit „arbeiten" zu können, benötigt man noch die Feststellung, dass 1 der Nachfolger von 0 ist, d. h. $1 = 0^*$ (beziehungsweise 2 ist der Nachfolger von 1) sowie eine Definition für eine Addition, um den Nachfolger $n* = n + 1$ einer jeden natürlichen Zahl bestimmen zu können.

Mathematische Erkenntnis liegt nun darin, auf Basis solcher Axiome zu beweisbaren Aussagen zu gelangen, die ihrerseits als Grundlage für weitere Aussagen steigender Komplexität dienen. Solche beweisbaren Aussagen, d. h. genauer gesagt, *widerspruchsfreie* logische Aussagen werden als *Sätze* (vgl. Band 1, Kap. I.2.1.2) bezeichnet. Mitunter wird ein Satz, der von besonderer Bedeutung ist, als *Theorem* oder auch *Hauptsatz* bezeichnet. Ein Satz, der von untergeordneter Bedeutung ist und beispielsweise als Grundlage für einen solchen Hauptsatz dient, wird meist als *Lemma* bezeichnet. Eine eher triviale Folgerung aus einem Satz heißt *Korollar*.

Von zentraler Bedeutung ist der *Beweis* eines solchen Satzes. Seine Gültigkeit muss widerspruchsfrei und allgemein auf Grundlage bereits bewiesener Sätze beziehungsweise der zugrunde liegenden Axiome bewiesen werden. Hierfür gibt es eine Reihe typischer Beweistechniken, wie den *direkten Beweis*, bei dem sozusagen konstruktiv aus Bekanntem der zu beweisende Satz hergeleitet wird, den *Widerspruchsbeweis*, bei dem von der Verneinung des zu beweisenden Satzes ausgegangen wird, um auf dieser Basis einen Widerspruch zu erzeugen, oder den *Induktionsbeweis*.

Ein wunderschönes Beispiel für einen Widerspruchsbeweis geht auf den frühen griechischen Mathematiker Euklid, der vermutlich im dritten Jahrhundert vor u. Z. lebte, zurück. Bewiesen wird die Aussage, dass es unendlich viele sogenannte *Primzahlen* gibt. Als Primzahl wird eine natürliche Zahl n bezeichnet, die durch genau zwei unterschiedliche natürliche Zahlen, nämlich 1 und sich selbst, ohne Rest dividiert werden kann. Offensichtlich sind die Zahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, etc. prim, aber es ist nicht auf den ersten Blick klar, ob es unendlich viele dieser besonderen Zahlen gibt, die übrigens von großer Bedeutung für moderne Verschlüsselungstechniken sind. Das Erstellen einer Primzahlliste hilft nicht weiter, da sie zwangsläufig nur endlich viele Zahlen enthalten kann, so dass auf ihrer Basis keine allgemeingültige Aussage möglich ist. Eine solche Liste könnte sogar den Verdacht nähren, dass es vielleicht nur endlich viele Primzahlen gibt, da die Lücken zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen tendenziell immer größer zu werden scheinen, was auf den ersten Blick nicht ganz unvernünftig zu sein scheint, immerhin steigt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teiler für eine Zahl existiert, mit der Größe dieser Zahl.

Euklid gelang es nun unter Herleitung eines Widerspruches zu beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, wobei er folgenden Weg beschritt:

- Zunächst sei angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, zum Beispiel n Stück, die mit $p_1, \dots, p_n$ bezeichnet werden, wobei n eine natürliche Zahl ist.
- Aus diesen n Primzahlen kann wie folgt eine neue Zahl x konstruiert werden: $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$, was sich unter Verwendung des Produktzeichens auch wie folgt schreiben lässt:
$$x = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_n$$
- Diese neue Zahl x wird offensichtlich von keiner der n Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ ohne Rest geteilt, da in jedem Fall ein Rest $\frac{1}{p_i}$ übrig bliebe.
- Entweder ist also x selbst eine Primzahl, die nicht in der als vollständig vorausgesetzten Liste enthalten war, oder es gibt eine Primzahl, die ebenfalls nicht in der Liste enthalten ist, die x ohne Rest teilt.
- Damit wurde ein Widerspruch herbeigeführt, was zeigt, dass die zu Beginn gemachte Annahme einer endlichen Anzahl von Primzahlen falsch sein muss, so dass das Gegenteil dieser Annahme gilt. Es gibt also unendlich viele Primzahlen.

Die solchermaßen bewiesene Aussage ist also ein *Satz* und kann ihrerseits als Grundlage für weitere Beweise dienen usf.

Eine weitere grundlegende Beweistechnik ist der bereits erwähnte Induktionsbeweis, der im Folgenden anhand eines einfachen Beispiels dargestellt wird: Einer weitverbreiteten Geschichte nach bekam Carl Friedrich Gauß, der zu Recht als *Fürst der Mathematik* in die Geschichte eingehen sollte, als neunjähriger Schüler zusammen mit den anderen Schülern seiner Klasse die undankbare Fleissaufgabe gestellt, die Summe der ersten einhundert natürlichen Zahlen, d. h. $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$ auszurechnen. (Vgl. Band 2, Kap. II.3.3.2)

Während seine Mitschüler die Aufgabe rein mechanisch in Angriff nahmen, fiel ihm sofort auf, dass sich diese Zahlen paarweise gruppieren lassen, so dass die Summe einer solchen Gruppe stets den Wert 101 animmt: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $\dots$, $50 + 51 = 101$ Insgesamt gibt es hier also fünfzig Zweiergruppen, deren Summe jeweils gleich 101 ist, so dass die Summe dieser *Teilsummen* gleich $50 \cdot 101 = 5050$ ist. Mit einem brillianten Kunstgriff gelang es ihm so, eine auf den ersten Blick ausgesprochen mühsam anmutende Aufgabe auf einen Schlag zu lösen. Dieser Trick war zwar prinzipiell bereits vor ihm bekannt, nur nicht ihm selbst in diesem jugendlichen Alter. Das Verfahren lässt sich verallgemeinern – ein generelles Ziel jeder mathematischen Betrachtung:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.1}$$

Ein Induktionsbeweis, wie er häufig für den Beweis von Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen, die größer gleich einem bestimmten Startwert (im vorliegenden Beispiel ist dies der Wert 1) gelten, genutzt wird, besteht aus drei getrennten Beweisschritten:

1. Dem *Induktionsanfang*, mit dem gezeigt wird, dass die allgemein zu beweisende Aussage für den gewünschten Startwert gilt (wäre dies nicht erfüllt, erübrigte sich jede weitere Überlegung),
2. der *Induktionsannahme*, bei der man annimmt, dass die zu beweisende Aussage für irgendeinen Wert n wahr ist, sowie
3. schlussendlich dem *Induktionsschritt*, in welchem gezeigt wird, dass die Aussage, wenn sie für n erfüllt ist, auch für $n + 1$ erfüllt ist. Induktionsannahme und -schritt werden häufig auch zusammengefasst, so auch im folgenden Beispiel.

Der Induktionsanfang für den Beweis der Aussage (2.1) für den Startwert 1 ist einfach:

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

was korrekt ist – die Summe über den Wert 1 ist offenbar gleich 1.

An diesen initialen Induktionsanfang schließt sich nun der *Induktionsschritt* an, mit dem der Bogen von diesem einen Sonderfall zu allen folgenden, d. h. unendlich vielen natürlichen Zahlen geschlagen wird. Die Idee hierbei ist einfach: Kann man die zu beweisende Behauptung für den Wert $n + 1$ auf die Behauptung für den Wert n zurückführen, so gilt sie offenbar für alle natürlichen Zahlen, da ihre Gültigkeit für den Wert $n = 1$ dank des Induktionsanfanges bereits gezeigt wurde. Damit gilt sie also auch für $n = 2$, $n = 3$ usf.

Im vorliegenden Fall muss also die Aussage

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2}, \tag{2.2}$$

bei der jeweils n durch $n + 1$ ersetzt wurde, irgendwie auf (2.1) zurückgeführt werden. Hierzu kann zunächst die rechte Seite von (2.2) umgeschrieben werden, indem man den letzten Summanden aus der Summe herauszieht und explizit addiert:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i$$

Für die Summe auf der rechten Seite kann man nun (2.1) einsetzen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

Nun muss nur noch der Ausdruck auf der rechten Seite so umgeformt werden, dass er der rechten Seite aus Gleichung (2.2) entspricht:

$$(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Damit wurde also gezeigt, dass (2.2) auf (2.1) zurück geführt werden kann. Zusammen mit dem Induktionsanfang gilt damit die Aussage (2.1) also für alle natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$

Bei einem direkten Beweis wird die zu beweisende Behauptung direkt durch geeignetes Kombinieren und Umformen aus anderen, bereits bewiesenen Aussagen etc. hergeleitet. Als einfaches Beispiel hierfür wird im Folgenden die Aussage „die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist ohne Rest durch 3 teilbar“ bewiesen: Diese Summe hat zunächst einmal die Gestalt $n + (n + 1) + (n + 2)$. Hieraus folgt

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1),$$

woraus sich die Teilbarkeit durch 3 direkt ergibt.

Nach diesen einführenden Bemerkungen werden in den folgenden Kapiteln einige Grundlagen der Mengenlehre behandelt, die einen der Grundpfeiler der modernen Mathematik darstellt.

2.3 Mengen

Eine sogenannte *Menge* ist zunächst einmal ganz anschaulich die Zusammenfassung voneinander unterscheidbarer Dinge, der sogenannten *Elemente* der Menge, z. B. die

Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen oder die Menge aller roten Autos. Mengen können keine, endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten, wie diese beiden Beispiele bereits intuitiv nahelegen. Im einfachsten Fall wird eine Menge durch explizites Auflisten aller ihrer Elemente definiert. So könnte die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner 10 als

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9\} \tag{2.3}$$

geschrieben werden. Diese Notation findet schnell ihre Grenzen, wenn es sich um Mengen aus vielen oder gar unendlich vielen Elementen handelt. Für die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen ließe sich

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\}$$

schreiben, wobei die drei Punkte beunruhigend viel Interpretationsspielraum lassen, was in der Mathematik verständlicherweise nicht gerne gesehen wird. Um kenntlich zu machen, dass ein Element Bestandteil einer Menge ist, wird das Symbol „$\in$“ verwendet. Mit obiger Menge M gilt $1 \in M$. Ist ein Element nicht in einer Menge enthalten, wird dies wie folgt notiert: $2 \notin M$.

In Fällen wie dem obigen mit der Menge aller ungeraden Zahlen, in denen die exemplarische Auflistung von Elementen zumindest unpraktisch, wenn nicht gar irreführend ist, bietet es sich an, die Menge unter Angabe der Bedingungen, die ihre Elemente erfüllen müssen, zu notieren. Wenn $\mathbb{N}$, wie üblich, die Menge der natürlichen (d. h. positiven ganzen) Zahlen bezeichnet, dann lässt sich die Menge besser wie folgt schreiben:

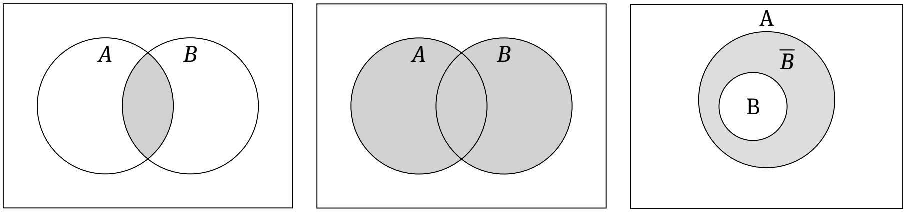
$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, 2 \nmid n \right\}$$

Gelesen wird dies als „*M* ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht ohne Rest durch 2 teilbar sind“, was gerade die Menge aller ungeraden Zahlen beschreibt.

Eine besondere und auf den ersten Blick etwas seltsam anmutende Menge ist die *leere Menge*, bezeichnet durch $\emptyset$. Mitunter wird diese Menge auch durch ein leeres Paar geschweifter Klammern notiert, d. h. $\emptyset = \{\}$. Diese Menge verfügt über keine Elemente und vertritt in gewisser Weise die Rolle, welche die Null bei den Zahlen innehat.

Enthalten zwei Mengen M und N die gleichen Elemente, so sind M und N *identisch*, was meist einfach als $M = N$ geschrieben wird.[4] Entsprechend wird durch $M \neq N$ zum Ausdruck gebracht, dass M und N nicht ausschließlich gleiche Elemente enthalten.

4 Man beachte, dass das Gleichheitszeichen für beliebige gleiche „Dinge“, nicht nur numerische Werte, genutzt werden kann.



Der graue Bereich entspricht $S = A \cap B$

Der graue Bereich entspricht $V = A \cup B$

Komplement $\overline{B}$ der Menge B im Universum A

Abb. 2.3: Venn-Diagramme grundlegender Mengenoperationen (vgl. Band 1, Kap. I.3.1)

2.3.1 Operationen auf Mengen

Ein wichtiges Konzept ist das der sogenannten *Mächtigkeit* einer Menge. Im einfachsten Fall einer Menge mit nur endlich vielen Elementen, wird damit die Anzahl der Elemente einer Menge bezeichnet. Notiert wird die Mächtigkeit einer Menge M als $|M|$. Für die in (2.3) definierte Menge gilt mithin $|M| = 5$.

Auf Mengen kann man nun eine Reihe einfacher Operationen wie Schnitt, Vereinigung und andere anwenden. Der sogenannte *Schnitt* zweier Mengen A und B liefert als Resultat eine dritte Menge, hier mit S bezeichnet und geschrieben als

$$S = A \cap B,$$

die nur diejenigen Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Grafisch dargestellt ist dies in Abb. 2.3 links. Die *Vereinigung*

$$V = A \cup B$$

zweier Mengen A und B liefert entsprechend eine neue Menge S, die alle Elemente der ursprünglichen Mengen A und B, jedoch ohne Doubletten enthält (Abb. 2.3 Mitte). Diese Einschränkung ist essenziell, da es eine grundlegende Eigenschaft von Mengen ist, dass diese nur *unterscheidbare* Elemente, d. h. insbesondere keine Doubletten enthalten kann.

Etwas komplexer ist das *relative Komplement* einer Menge, das rechts in Abb. 2.3 grafisch dargestellt ist. Zentrales Element ist hierbei eine Menge B, die vollständig in einer „umgebenden" Menge A enthalten ist.[5] Entsprechend wird B als *(echte) Teilmenge* von A bezeichnet, was als $B \subset A$ notiert wird. Allgemein ist also eine Menge B eine Teilmenge einer Menge A, wenn jedes Element von B auch Element von A ist.

A wird hierbei als das *Universum* bezeichnet, in dem die Menge B liegt. Das relative Komplement von B, geschrieben $\overline{B}$ oder B^C, ist nun die Menge aller Elemente aus

5 Das heißt, für den Schnitt gilt hier $B \cap A = B$.

dem Universum A, die nicht in B liegen, was auch als *mengentheoretische Differenz*, gelesen „A ohne B“, bezeichnet wird:

$$\overline{B} = B^C = B \backslash A = \left\{ x \in A \,\middle|\, x \notin B \right\}$$

2.3.2 Einige besondere Mengen

Neben der eben erwähnten leeren Menge, die durch ein eigenes Symbol repräsentiert wird, gibt es eine Vielzahl weiterer besonderer Mengen, von denen die für das Folgende wichtigsten kurz vorgestellt werden sollen.

2.3.2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge der *natürlichen Zahlen* enthält alle positiven ganzen Zahlen, üblicherweise beginnend mit der 1, und wird als $\mathbb{N}$ notiert. Soll auch die Null Bestandteil dieser Menge sein, wird sie $\mathbb{N}_0$ geschrieben und „n Null“ gesprochen. Intuitiv kann man auch

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

schreiben.

Eine besondere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist die durch $\mathbb{P}$ bezeichnete Menge der *Primzahlen*. Hierbei handelt es sich um Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar sind. Während Fragen rund um Zahlen dieser Menge früher von rein akademischem Interesse waren, besitzen sie heute als einer der Grundbausteine einer Vielzahl moderner Verschlüsselungsverfahren eine große kommerzielle Bedeutung.

2.3.2.2 Ganze Zahlen

Die Menge der *ganzen Zahlen* enthält zusätzlich zu den natürlichen Zahlen auch negative ganze Zahlen sowie die Null und wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet – intuitiv ist damit

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Die uns heute völlig selbstverständlichen negativen Zahlen wurden zum Zeitpunkt ihrer Einführung durch Michael Stifel als *numeri absurdi*, d. h. „absurde Zahlen“ abgetan, da man noch keinen wirklich abstrakten Zahlbegriff besaß und negative Werte keinem Element der Erlebniswelt zugeordnet werden konnten.[6]

2.3.2.3 Rationale Zahlen

Als *rationale Zahlen* werden *Brüche* bezeichnet, d. h. Werte der Form

$$\frac{p}{q},$$

6 Zwar gab es natürlich schon damals Schulden, die aber letztlich in einer Form notiert wurden, die bis heute in Gestalt von *Soll* und *Haben* weiter existiert.

wobei es sich bei p und q jeweils um ganze Zahlen handelt, und q selbstverständlich nicht gleich Null sein darf. Definiert ist die Menge der rationalen Zahlen entsprechend wie folgt:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{N} \ \wedge \ q \neq 0 \right\}$$

2.3.2.4 Relle Zahlen

Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass die rationalen Zahlen, d. h. die Brüche, quasi „ausreichend" sein könnten, um alle in der Praxis benötigten Werte darzustellen. Interessanterweise ist dies jedoch nicht der Fall, da es Zahlen gibt, die sich nicht als Bruch darstellen lassen und entsprechend als *irrationale Zahlen* bezeichnet werden.

Bereits im ausgehenden sechsten oder auch frühen fünften Jahrhundert u. Z. war Hippasos von Metapont[7] bekannt, dass es derartige Zahlen geben müsse. In Euklids bahnbrechendem Werk *Die Elemente* findet sich ein Beweis für die Irrationalität des Wertes von $\sqrt{2}$, der allerdings auf einen früheren Beweis zurückzugehen scheint.

Ein Wert wie $\sqrt{2}$ tritt beispielsweise als Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 auf, d. h. sozusagen in einem Allerweltsobjekt. Um zu beweisen, dass dieser Wert nicht als Bruch dargestellt werden kann, wird in der Regel ein Widerspruchsbeweis genutzt, indem zunächst behauptet wird, dass $\sqrt{2}$ als Bruch darstellbar sei, also

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{2.4}$$

mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q \neq 0$ gelte. Weiterhin kann vorausgesetzt werden, dass dieser Bruch *gekürzt* ist, dass also p und q keine gemeinsamen Teiler besitzen, was als *teilerfremd* bezeichnet wird. Aus (2.4) folgt direkt

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2},$$

woraus sich durch Multiplikation mit q^2 auf beiden Seiten

$$p^2 = 2q^2 \tag{2.5}$$

ergibt. Wenn nun aber das Quadrat von p gleich dem Zweifachen irgendeines anderen Wertes ist, muss p^2 eine gerade Zahl sein. Damit muss allerdings auch p eine gerade Zahl sein (das Quadrat einer ungeraden Zahl kann niemals gerade sein).

Wenn nun p eine gerade Zahl ist, so lässt sich dieser Wert als das Doppelte irgendeiner anderen natürlichen Zahl schreiben, d. h. es ist

$$p = 2r$$

7 Spätes 6. bis frühes 5. Jahrhundert vor u. Z.

für irgendein $r \in \mathbb{N}$. Daraus und mit (2.5) folgt nun direkt

$$2q^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung durch 2 dividiert, folgt

$$q^2 = 2r^2,$$

so dass sowohl q^2 als auch q jeweils gerade Zahlen sein müssen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur ursprünglichen Voraussetzung, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ gekürzt sein soll. Hieraus folgt direkt die Verneinung der Annahme, womit bewiesen ist, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.[8]

Wie sich zeigt, sind solche irrationalen Zahlen nicht die Ausnahme, sondern vielmehr die Regel und „überwiegen" die Menge der rationalen Zahlen sozusagen „bei Weitem".

Die Menge der *reellen Zahlen* besteht nun aus allen Elementen aus $\mathbb{Q}$ sowie der Menge aller irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Während man die Elemente der natürlichen, der ganzen und sogar der rationalen Zahlen *abzählen* kann, wie später gezeigt werden wird – d. h. man kann die Elemente dieser Mengen irgendwie in eine mehr oder weniger naheliegende Reihenfolge bringen und sie dann der Reihe nach durchnummerieren, geht dies mit der Menge $\mathbb{R}$ nicht mehr. Die Elemente dieser Menge liegen so „eng" gepackt in der Menge, dass zwischen zwei beliebig nahe beieinander liegenden reellen Zahlen immer wieder beliebig viele andere reelle Zahlen liegen. Entsprechend spricht man davon, dass diese Menge *dicht* ist, d. h., etwas hemdsärmelig ausgedrückt davon, dass die Elemente dieser Menge so dicht beieinander liegen, dass man niemals eine wie auch immer geartete „Lücke" finden kann, die für ein Abzählverfahren benötigt würde.[9]

2.3.2.5 Komplexe Zahlen

Wenn nun $\mathbb{R}$ dicht ist, stellt sich die Frage, ob es noch andere, sozusagen „umfassendere" Zahlmengen gibt – eine Frage, auf welche die Antwort „ja" ist. Eine solche, und

---

8 Auf Grundlage dieser Beweisidee lässt sich analog auch zeigen, dass die Quadratwurzel einer Primzahl stets eine irrationale Zahl ist. Im Prinzip genügt schon (2.5) alleine für einen Widerspruch, da jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primfaktoren dargestellt werden kann. Das heißt aber, dass eine Quadratzahl niemals das doppelte einer anderen Quadratzahl sein kann, da Werte der Form p^2 und q^2 stets eine gerade Anzahl von Primfaktoren besitzen (sie sind ja Produkte der Form $p \cdot p$ bzw. $q \cdot q$), während $2q^2$ einen Primfaktor, die 2, mehr besitzt, so dass links in Gleichung (2.5) ein Ausdruck mit einer geraden Anzahl von Primfaktoren steht, während der Term rechts eine ungerade Anzahl besitzt.

9 Eigentlich in den Bereich der Philosophie gehört die Frage, ob es sich bei reellen Zahlen um „reale" Objekte handelt, d. h. ob in der Natur, im Universum wirklich reelle Zahlen als solche auftreten können, oder ob es sich vielmehr um eine ideale mathematische Idee handelt.

die vermutlich wichtigste derartige Menge, ist die der *komplexen Zahlen*, geschrieben $\mathbb{C}$. Diese erweitern die reellen Zahlen um eine weitere Komponente, sogenannte *imaginäre Zahlen*. Geschichtlicher Hintergrund für die Entdeckung der komplexen Zahlen waren Fragestellungen wie die nach der Lösung einfacher Gleichungen wie zum Beispiel

$$x^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in den reellen Zahlen, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht gleich -1 sein kann. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wurde die *imaginäre Einheit*

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1}$$

eingeführt.[10]

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist nun ein Paar, ein sogenanntes *Tupel*, bestehend aus einem *Real-* und einem *Imaginärteil* der Form $z = (x + y\mathrm{i})$. Während natürliche, ganze, rationale oder reelle Zahlen als Punkte auf einem (eindimensionalen) *Zahlenstrahl* interpretiert werden können, gilt dies für komplexe Zahlen nicht. Diese werden auf einer *Zahlenebene*, der *komplexen Zahlenebene*, dargestellt, wobei die horizontale und vertikale Achse als reale beziehungsweise imaginäre Achse eines Koordinatensystems aufgefasst werden, eine komplexe Zahl $z = (x + y\mathrm{i})$ beschreibt also eindeutig einen Punkt in dieser Ebene an der horizontalen Position x und der vertikalen Position y.

Komplexe Zahlen können addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden, wobei stets zu beachten ist, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt, es ist also zunächst

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \text{ und}\\ (x_1 + y_1\mathrm{i}) - (x_2 + y_2\mathrm{i}) &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Multiplikation und Division sind ein wenig komplexer:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) &= (x_1x_2 + y_1y_2\mathrm{i}^2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}\\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i} \text{ und}\\ \frac{(x_1 + y_1\mathrm{i})}{(x_2 + y_2\mathrm{i})} &= \frac{(x_1 + x_2\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})}{(x_2 + y_2\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})}\\ &== \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Einer komplexen Zahl kann ein *Betrag* der Form

$$|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

zugeordnet werden, was in Kapitel 4.1 in Form sogenannter *Normen* allgemein auf Vektoren angewandt wird. Interessant ist, dass komplexe Zahlen nicht einfach wie natürliche, ganze, rationale oder reelle Zahlen *angeordnet* werden können. Während es bei

10 Die Verwendung von „:=“ anstelle eines einfachen Gleichheitszeichens bedeutet, dass hier etwas definiert wird.

zwei Punkten auf einem Zahlenstrahl einfach ist zu sagen, einer dieser Punkte sei größer, kleiner oder gleich dem anderen, kann bei Punkten in einer Ebene ohne Weiteres nur zwischen Gleichheit und Ungleichheit unterschieden werden. Ein „Größer“ oder „Kleiner“ gibt es nicht mehr.

Eine wesentliche Eigenschaft, für die jedoch an dieser Stelle auf Werke wie (Jänich 2008) und (Remmert et al. 2002) verwiesen sei, ist, dass zwischen komplexen Zahlen, der *Euler'schen Zahl* sowie den trigonometrischen Funktionen, die in Kapitel 3.3.6 dargestellt werden, folgender faszinierender Zusammenhang besteht: Es gilt allgemein

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Diese Identität hat weitreichende Bedeutung in allen Bereichen, in denen, wie in der Elektrotechnik, der Elektronik und Nachrichtentechnik etc. mit Schwingungen gearbeitet wird.

2.3.3 Kommutativität, Assoziativität und Distributivität

Von zentraler Bedeutung in allen Bereichen der Mathematik sind die Begriffe *Kommutativität*, *Assoziativität*, und *Distributivität*, die beschreiben, wie sich *zweistellige Operationen* beziehungsweise allgemeiner beliebige *zweistellige Verknüpfungen* $\circ$ (im einfachsten Falle beispielsweise Addition, Subtraktion etc.) verhalten, wenn ihre *Operanden* vertauscht, Klammern umgesetzt oder Ausdrücke ausgeklammert werden. *Zweistellig* wird eine solche Verknüpfung genannt, wenn sie auf genau zwei Operanden angewandt wird, wie es beispielsweise bei $x + y$ der Fall ist.

Eine Verknüpfung $\circ$ heißt *kommutativ*, wenn

$$x \circ y = y \circ x$$

gilt, wie es beispielsweise bei der Addition ganzer Zahlen der Fall ist, d. h. die Reihenfolge der Operanden keinen Einfluss auf das Resultat der Ausführung der Operation hat.

Assoziativ wird $\circ$ genannt, wenn

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

gilt, was zum Beispiel ebenfalls von der Addition ganzer Zahlen erfüllt wird – es ist beispielsweise gleichgültig, in welcher Reihenfolge drei Zahlen addiert werden.

Das *Distributivgesetz* bezieht sich auf zwei verschiedene Verknüpfungen, beispielsweise Addition und Multiplikation, und beschreibt, wie sich diese verhalten, wenn Klammern aufgelöst werden. In diesem Fall gilt bekanntermaßen

$$x(y + z) = xy + xz,$$

das als *Ausklammern* bekannte Vorgehen. Konkret wird die obige Regel als *linksdistributiv* bezeichnet, um sie von der *Rechtsdistributivität*

$$(x + y)z = xz + yz$$

zu unterscheiden. (Vgl. Band 1, Kap. I.2.1.4)

2.3.4 Abbildungen

Unter einer *Abbildung* wird eine Vorschrift verstanden, mit deren Hilfe Elemente einer Art „Ausgangsmenge", der sogenannten *Definitionsmenge* eindeutig auf Elemente einer *Zielmenge* abgebildet werden. Meist ist es wünschenswert, dass eine solche Abbildung Elemente ohne „Mehrdeutigkeiten" von der Definitions- in die Zielmenge abbildet, d. h. ein Element der Zielmenge kann höchstens das Ergebnis der Anwendung dieser Abbildung auf ein bestimmtes Element der Definitionsmenge sein. Eine solche Abbildung wird *injektiv* genannt.

Abbildungen müssen allerdings nicht alle Elemente der Zielmenge erreichen, d. h. es kann durchaus sein, dass nur einige wenige Elemente der Zielmenge das Ergebnis der Anwendung der Abbildung auf ihre Definitionsmenge sind. Eine solche Abbildung ist nicht *surjektiv*.

Ein einfaches Beispiel mag dies verdeutlichen: Die Abbildung, die alle reellen Zahlen auf ihr jeweiliges Quadrat abbildet, geschrieben

$$f(x) = x^2,$$

hat als Definitions- und Zielmenge z. B. die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$. In der Zielmenge werden jedoch die negativen reellen Zahlen ausgespart, da diese nie das Resultat eines Quadrates einer reellen Zahl sein können. Diese Funktion ist also nicht surjektiv.

Wie steht es um die Injektivität? Offenbar ist das Quadrat einer positiven reellen Zahl gleich dem Quadrat der gleichen Zahl, jedoch mit negativem Vorzeichen, d. h. es ist $x^2 = (-x)^2$, so dass beispielsweise die Werte 2 und -2 der Definitionsmenge beide auf das gleiche Element der Zielmenge, 4, abgebildet werden. Diese Abbildung ist also auch nicht injektiv.

Abb. 2.4 zeigt eine grafische Darstellung der Eigenschaften injektiv und surjektiv. Ist eine Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv, so wird sie *bijektiv* genannt. Solche Abbildungen sind in der Regel sehr wünschenswert, da man zu ihnen eine sogenannte *Umkehrabbildung* finden kann, mit deren Hilfe Werte der Zielmenge entsprechend Elementen der Definitionsmenge zugeordnet werden können.

Die Elemente, die eine Abbildung, angewandt auf ihre Definitionsmenge, liefert, bilden die sogenannte *Bildmenge* dieser Abbildung. Entsprechend wird die Bildmenge der Umkehrabbildung auch als *Urbild* bezeichnet.

Abbildungen werden häufig, so auch im Folgenden, als *Funktionen* bezeichnet, was auch durch Schreibweisen wie $f(x)$ angedeutet wird. Um zu zeigen, von welcher

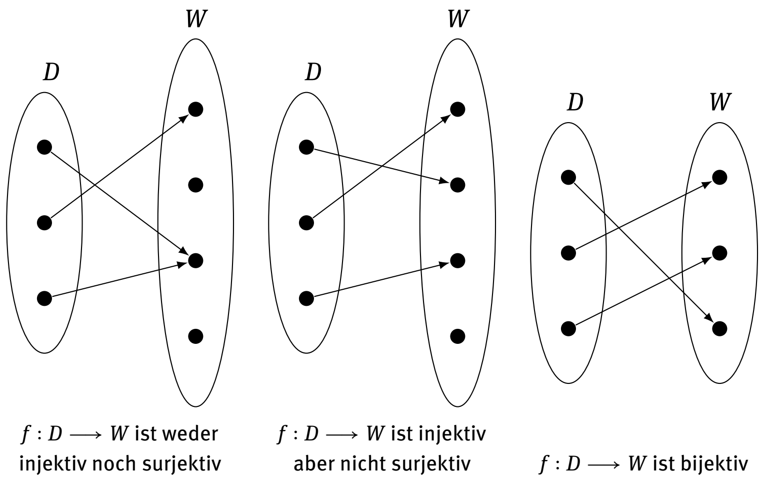


Abb. 2.4: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Menge eine Funktion in welche andere Menge abbildet, wird $f : X \longrightarrow Y$ geschrieben, wohingegen die Schreibweise $f(x) = \ldots$ die Funktionsdefinition repräsentiert. Allgemein wird die *Umkehrfunktion* einer Funktion f mit f^{-1} bezeichnet.

Sind zwei Funktionen f und g gegeben, die in gewisser Art „zueinander passen“, d. h. die Bildmenge von f muss zumindest eine Teilmenge der Definitionsmenge von g sein, so kann g auf das Resultat von f angewandt werden. Dies wird als die *Verkettung* oder *Hintereinanderausführung* zweier Funktionen bezeichnet und meist als $g(f(x))$ oder auch $g \circ f$ geschrieben. Gelesen wird eine solche Verkettung als „g nach f“.

Ein Beispiel mag dies verdeutlichen: Es seien zwei Funktionen gegeben:

$$f(x) = x - 1 \text{ und}$$
$$g(x) = x^2,$$

wobei als Definitions- und Wertemenge jeweils $\mathbb{R}$ gelte. Hiermit sind die beiden Verkettungen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 1 \text{ und}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 1)^2$$

möglich, die Verkettungsoperation ist also nicht kommutativ, d. h. in der Regel ist $f \circ g \neq g \circ f$.

2.3.5 Mächtigkeit

Mit Hilfe von Abbildungen können nun Betrachtungen bezüglich der Vergleichbarkeit von Mengen angestellt werden. Unter der *Mächtigkeit* einer endlichen Menge M, geschrieben $|M|$, wird, wie bereits erwähnt, die Anzahl der Elemente in dieser Menge verstanden. Beispielsweise ist also

$$\left|\{1, 2, 3, 4, 5\}\right| = 5.$$

Im Falle unendlich großer Mengen, wie beispielsweise $\mathbb{N}$ ist eine solche Herangehensweise natürlich nicht möglich. Vielmehr kann man versuchen, eine vergleichende Aussage über die Mächtigkeit zweier unendlich großer Mengen zu machen, indem eine bijektive Abbildung von der einen Menge in die andere konstruiert wird. Existiert eine solche Abbildung, so heißen die beiden Mengen, zwischen denen jene vermittelt, *gleichmächtig*.

2.3.6 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Mit dieser Idee kann nun verglichen werden, wie es um die Mächtigkeiten der bereits zuvor beschriebenen grundlegenden Zahlmengen bestellt ist. Wird zum Beispiel die Menge der geraden Zahlen als Teilmenge der natürlichen Zahlen gebildet, könnte sich der Eindruck aufdrängen, diese sei nur „halb so groß“ wie die Menge der natürlichen Zahlen selbst. Eine solche Vermutung geht jedoch in die Irre, da Ideen wie „halb so groß“ im Zusammenhang mit unendlichen Mengen ins Leere führen.

Man kann nämlich eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $f(n) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ definieren, die von den natürlichen Zahlen in die Menge der geraden Zahlen abbildet. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, d. h. jedem Element aus $\mathbb{N}$ ist genau ein Element aus der Menge der geraden Zahlen zugeordnet. Entsprechend sind beide Mengen gleichmächtig!

In Fällen, in denen eine solche bijektive Abbildung zwischen einer Menge und der Menge der natürlichen Zahlen definiert werden kann, spricht man von *abzählbarer Unendlichkeit*, da die beteiligten Mengen zwar jede für sich unendlich viele Elemente enthalten, diese aber vermittels dieser Abbildung auf die natürlichen Zahlen in einfacher Weise „abgezählt“ werden können. Dies ist sozusagen die „kleinste“ Form der Unendlichkeit, auch, wenn Begriffe wie „klein“ in diesem Zusammenhang eigentlich sinnlos sind.

! Dieses auf den ersten Blick der Intuition widersprechende Ergebnis ist typisch für den Umgang mit unendlichen Mengen, wie auch das berühmte Beispiel von *Hilberts Hotel*, benannt nach dem Mathematiker David Hilbert, zeigt: Man versetze sich in die Rolle des Portiers in Hilberts Hotel, das dadurch gekennzeichnet ist, dass es abzählbar unendlich viele Zimmer besitzt. Diese Zimmer sind alle besetzt, als plötzlich ein neuer Gast auftaucht. Als guter Portier steht es natürlich außer Frage, ihn wieder wegzuschicken, d. h. es ist eine Idee gefragt, mit deren Hilfe dieser zusätzliche Gast untergebracht werden kann. Diese Idee ist verblüffend einfach: Der Portier bittet jeden bereits im Hotel residierenden Gast, sein Zimmer zu verlassen und in das Zimmer umzuziehen, dessen Nummer der vorigen Zimmernummer plus eins entspricht. Hierdurch wird in einem einzigen Schritt, da alle Gäste gleichzeitig umziehen, das Zimmer mit der Nummer 1 für den Neuankömmling frei.

Welche Möglichkeit hat der Portier bei voll besetzem Hotel, wenn anstelle eines einsamen Gastes ein vollbesetzter *Hilbert-Bus* ankommt, der, man ahnt es bereits, seinerseits abzählbar unendlich viele Plätze aufweist? Er kann nicht unendlich oft das eben beschriebene Verfahren anwenden, weil das niemals zu einem Abschluss käme, es ist also eine andere Vorgehensweise notwendig, die aber ebenso einfach und wirkungsvoll ist: Er bittet alle bereits im Hotel wohnenden Gäste, ihre Zimmer zu verlassen und in die Zimmer umzuziehen, deren Zimmernummer dem Doppelten ihrer bisherigen Zimmernummer entspricht. Hierdurch werden auf einen Schlag alle Zimmer mit ungerader Zimmernummer frei, was, wie oben gezeigt wurde, wieder abzählbar unendlich viele Zimmer sind, in welche die Passagiere des Hilbert-Bus' einziehen können.

Hieraus ergibt sich also, dass nicht nur $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$, gleichmächtig sind, sondern auch, dass $\mathbb{N}$ auch gleichmächtig zur Menge aller geraden und damit auch zur Menge aller ungeraden Zahlen ist.

Lassen sich diese Überlegungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ erweitern? Auf den ersten Blick scheint $\mathbb{Z}$ mächtiger als $\mathbb{N}$ zu sein, da letzteres bei 1 quasi einen „Anfang" hat, während $\mathbb{Z}$ sowohl im Positiven als auch im Negativen ins Unendliche geht. Dennoch lässt sich eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ finden:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese Funktion bildet nun beispielsweise die 1 auf die 0, die 2 auf die 1, die 3 auf die -1, die 4 auf die 2, die 5 auf die -2 usf. ab, d. h. alle Elemente von $\mathbb{N}$ werden eindeutig und sozusagen „lückenlos" auf die Elemente von $\mathbb{Z}$ abgebildet, was aber bedeutet, dass diese beiden Mengen ebenfalls gleichmächtig sind, ein auf den ersten Blick vielleicht überraschendes Ergebnis.

Verblüffenderweise kann man auch eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ konstruieren, woraus sich ergibt, dass selbst die auf den nicht nur ersten, sondern sicherlich auch zweiten Blick irgendwie „mächtiger wirkenden" rationalen Zahlen die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzen, also abzählbar unendlich sind. Der zentrale Trick hierbei ist eine geschickte Anordnung der rationalen Zahlen, wie in Abb. 2.5 dargestellt. Diese auf Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor zurückgehende Grundidee ist, die Menge der rationalen Zahlen sozusagen diagonal zu durchlaufen und ihre Elemente hierbei eindeutig und wieder lückenlos Elementen aus $\mathbb{N}$ zuzuordnen. Die Tatsache, dass in der Abb. nur positive Brüche dargestellt sind, tut dem Argument keinen Abbruch, da man auch, wenn alle Vorzeichenkombinationen berücksichtigt werden, die rationalen Zahlen quasi in Rhombusform durchlaufen kann.

Dies bedeutet also, dass alle folgenden Mengen gleichmächtig sind: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Was aber ist mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$? Es lässt sich zeigen, dass zwischen keiner der oben genannten Mengen und $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ eine bijektive Abbildung konstruiert werden kann. Diese sind also mächtiger als $\mathbb{N}$, was auch in der Überlegung zur Dichte von $\mathbb{R}$ zuvor

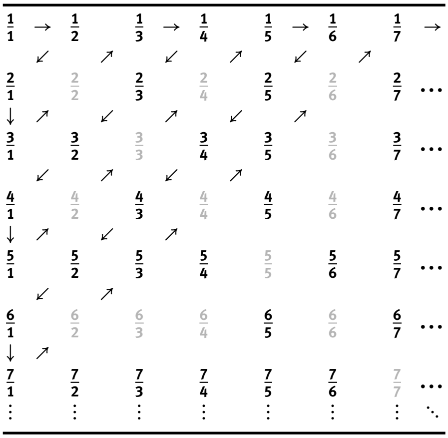


Abb. 2.5: Cantors erstes Diagonalargument – ungekürzte Brüche sind hellgrau dargestellt und werden übersprungen

implizit zum Ausdruck gelangt. $\mathbb{R}$ und auch $\mathbb{C}$ werden entsprechend als *überabzählbar* bezeichnet, was eine ganz andere Form der Unendlichkeit als die abzählbare darstellt.

2.3.7 Zahlenrepräsentation

Nach diesen grundlegenden Betrachtungen über Zahlenmengen stellt sich die Frage, wie numerische Werte eigentlich in *Computern*[11] repräsentiert werden. Zunächst einmal handelt es sich bei jedem Computer um eine in jeder Hinsicht endliche Maschine, d. h. vor allem, dass selbstverständlich nur eine endliche Menge an Speicherplatz zur Verfügung steht, wodurch bereits klar wird, dass kein Computer auch nur mit $\mathbb{N}$, ganz abgesehen von $\mathbb{R}$ zu arbeiten imstande ist. Hieraus ergeben sich eine Reihe von Problemen, derer man sich stets bewusst sein muss, wenn Rechnungen mit Hilfe eines Digitalrechners ausgeführt werden sollen.

Grundlage nahezu einer jeden Zahlendarstellung in einem Computer ist ein sogenanntes *Stellenwertsystem*, das dadurch gekennzeichnet ist, dass die *Wertigkeit* einer Ziffer durch ihre Position innerhalb einer Zahl festgelegt ist. Das gebräuchliche *Dezimalsystem* ist ein typischer Vertreter eines solchen Stellenwertsystems. Beispielsweise ist der *Wert* der Ziffernfolge $1, 2, 3$ im Dezimalsystem gleich einhundertunddreiundzwanzig, was sich wie folgt ergibt:

11 Unter einem *Computer* soll im Folgenden stets ein sogenannte *speicherprogrammierter Digitalrechner*, d. h. eine algorithmisch gesteuerte Maschine mit digitaler, d. h. ziffernweiser Zahlenrepräsentation, verstanden werden.

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 123.$$

Der Wert 10 hier ist die sogenannte *Basis* dieses speziellen Stellenwertsystems, d. h. das System verfügt über zehn verschiedene Ziffern, in diesem Falle also 0 bis 9. Die rechte Ziffer einer Zahl ist die *Einerstelle*, wobei die Wertigkeit einer Stelle jeweils um den Faktor der Basis stellenweise von rechts nach links vorgehend, steigt.

Solche Stellenwertsysteme lassen sich selbstverständlich auch mit anderen Basen konstruieren, wobei der Basis 2 hierbei besondere Bedeutung zukommt, da es technisch wesentlich einfacher ist, Schaltelemente zu bauen, die zwischen zwei anstatt zehn Zuständen unterscheiden können. Entsprechend bilden Zahlen zur Basis 2 die Grundlage nahezu aller modernen Computer. In dieser Basis notierte Zahlen werden als *Binärzahlen*, *Dualzahlen* oder (selten) auch als *dyadische Darstellung* bezeichnet. Anstelle des Begriffes *Ziffer*, wie er im Dezimalen und in anderen Zahlensystemen üblich ist, wird eine einzelne Stelle solcher Binärzahlen als *Bit* bezeichnet.

Geht aus dem jeweiligen Zusammenhang nicht hervor, in welcher Basis Zahlen notiert sind, so wird diese in der Regel in Form eines Subskriptes angegeben, so entspricht beispielsweise die Dezimalzahl 5_{10} der Binärzahl 101_2.

2.3.7.1 Integerwerte

Das Computeräquivalent zu den ganzen Zahlen sind die sogenannten *Integers*, die sich von $\mathbb{Z}$ dadurch unterscheiden, dass ein Computer als endliche Maschine verständlicherweise nur endlich viele dieser Werte unterscheiden kann. Im Unterschied zum Rechnen mit ganzen Zahlen können beim Rechnen mit Integers *Überläufe*, auch als *Overflows* bezeichnet, auftreten! In der Informatik wird zwischen Integers mit und ohne Vorzeichen, sogenannten *(un)signed Integers* unterschieden. Im Folgenden werden zunächst vorzeichenlose Integerwerte betrachtet. Sie können direkt in Dezimalzahlen umgewandelt werden (vgl. Band 1, Kap. I.5.4), wie dieses Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned}
10101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 128 + 32 + 8 + 4 + 1 \\
&= 173
\end{aligned}$$

In der Praxis haben sich heutzutage sogenannte *Wortlängen* durchgesetzt, die Zweierpotenzen entsprechen. Typische Längen für derartige Binärzahlen sind 8, 16, 32 und 64 Bit. Acht Bit lange Werte werden als *Byte* bezeichnet.[12]

12 In der Frühzeit der Informatik waren Wortlängen, die ganzzahlige Vielfache von 3 waren, weit verbreitet. 12-, 18-, 24-, 36- und 60-Bit-Maschinen waren keine Seltenheit.

Wie man anhand des obigen Beispiels leicht sieht, entscheidet das rechte Bit einer Binärzahl, das sogenannte *Least Significant Bit*, kurz *LSB*, darüber, ob es sich bei dem jeweiligen Wert um eine gerade oder ungerade Zahl handelt. In diesen Fällen ist das LSB 0 beziehungsweise gleich 1. Diese Beobachtung kann nun als Ausgangspunkt zur Beantwortung der Frage dienen, wie eine Dezimalzahl in die ihr entsprechende Binärzahl umgewandelt werden kann.

Betrachtet man den Rest, den die zu konvertierende Dezimalzahl bei Division durch 2 lässt, so stellt dieser gerade das LSB dar. Verfährt man mit dem Divisionsergebnis analog hierzu weiter, ergeben sich die weiteren Bits der Reihe nach, wie folgendes Beispiel anhand der Umwandlung der Dezimalzahl 123 zeigt, wobei *MSB* das *Most Significant Bit* bezeichnet:

$$\begin{aligned}
123 \div 2 &= 61 \text{ Rest } 1 \text{ (LSB)}\\
61 \div 2 &= 30 \text{ Rest } 1\\
30 \div 2 &= 15 \text{ Rest } 0\\
15 \div 2 &= 7 \text{ Rest } 1\\
7 \div 2 &= 3 \text{ Rest } 1\\
3 \div 2 &= 1 \text{ Rest } 1\\
1 \div 2 &= 0 \text{ Rest } 1 \text{ (MSB)}
\end{aligned}$$

D. h. $123_{10} = 1111011_2$. Die wiederholte Division durch 2 liefert also die Bits der Binärdarstellung, beginnend mit dem LSB und endend mit dem MSB. Analog kann durch entsprechende Divisionen auch in andere Zahlensysteme konvertiert werden. (Vgl. Band 2, Kap. II.2.2.4)

Tab. 2.1: Darstellung von Vierbitgruppen durch jeweils eine hexadezimale Ziffer

Binär	Hexadezimal	Binär	Hexadezimal
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	*A*
0011	3	1011	*B*
0100	4	1100	*C*
0101	5	1101	*D*
0110	6	1110	*E*
0111	7	1111	*F*

Da Binärzahlen für ihre Darstellung mehr Ziffern als zu ihnen äquivalente Dezimalzahlen benötigen, liegt es nahe, in der Praxis an ihrer Stelle mit sogenannten *Hexadezimalzahlen*, d. h. Zahlen zur Basis 16, zu arbeiten. Hierbei entspricht eine hexadezimale Ziffer, die Werte von 0 bis 9 und A bis F annehmen kann, jeweils vier aufeinander folgenden Bits der korrespondierenden Binärzahl, wie Tabelle 2.1 zeigt.[13] Eine solche 4-Bit-Gruppe wird meist als *Nibble* bezeichnet.[14] Die obige Bitfolge 1111011 wird nun links durch Anhängen einer 0 auf 8 Bit erweitert, deren hexadezimale Darstellung gleich $7B$ lautet.

Allgemein lassen sich die Grundrechenarten direkt auf Zahlen, die in Form eines Stellenwertsystems dargestellt werden, anwenden (vgl. Band 1, Kap. I.5.3). Es muss lediglich berücksichtigt werden, dass für die einzelnen Stellen mitunter nicht zehn, sondern nur 2 oder auch 16 unterschiedliche Ziffern zur Verfügung stehen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0_1 & 0_1 & 1_1 & 1_1 & 1 & 0_1 & 0_1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Nun ließe sich problemlos ein Computer konstruieren, der sowohl zu addieren als auch zu subtrahieren in der Lage wäre. Aus kommerzieller Sicht wäre eine solche Maschine jedoch unvernünftig, da zu keinem Zeitpunkt gleichzeit addiert und subtrahiert würde, so dass im besten Falle lediglich 50% der Hardware genutzt werden würden. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bieten vorzeichenbehaftete Integers, mit deren Hilfe die Subtraktion $a - b$ auf die Addition $a + (-b)$ zurück geführt werden kann, wobei $(-b)$ das sogenannte *Komplement*, genauer das *Zweierkomplement*[15] von b darstellt.

! Am einfachsten lässt sich die Idee des Zweierkomplementes anhand einer hypothetischen „Uhr“ mit beispielsweise 16 auf einem Ziffernblatt angeordneten Stunden und lediglich einem Stundenzeiger veranschaulichen: Angenommen, der Stundenzeiger stehe auf der Ziffer 7, und es soll hiervon der Wert 4 subtrahiert werden. Anstatt nun den Zeiger um 4 Positionen entgegen dem Uhrzeigersinn (Subtraktion) zu verdrehen, könnte er auch um 12 Positionen im Uhrzeigersinn (Addition) verstellt werden, um auf das korrekte Ergebnis 3 zu kommen. Dies hat seine Ursache offenbar darin, dass das Zifferblatt nur eine endliche Anzahl von Werten, in diesem Fall 16, umfasst, so dass eine vollständige Umrundung des Ziffernblattes stets wieder auf den ursprünglichen Startwert führt.

---

13 Vor etwa den 1980er Jahren nutze man in der praktischen Informatik häufig auch sogenannte *Oktalzahlen* anstelle der heute gebräuchlichen Hexadezimalnotation. Von dieser unterscheiden sich jene dadurch, dass jeweils einer Dreibitgruppe eine Ziffer von 0 bis 7 zugeordnet wird, was vor allem dann von Vorteil ist, wenn ein Computer eine Wortlänge besitzt, die ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist. Heute ist die Oktalnotation jedoch nahezu ausgestorben.

14 Das ist ein Wortspiel – ein „Byte“ klingt im Englischen wie ein „Bissen“, während „to nibble“ die Bedeutung „knabbern“ oder „annagen“ hat – sozusagen ein „kleiner Bissen“.

15 Neben diesem heute gebräuchlichen Zweierkomplement wurde historisch auch das *Einerkomplement* eingesetzt, auf das im Folgenden allerdings nicht weiter eingegangen wird. (vgl. Band 1, Kap. I.5.4)

Anstatt in diesem Beispiel also 4 zu subtrahieren, kann auch 12 addiert werden, was in diesem Fall das $2er$-Komplement zu 4 darstellt. Wie jedoch wird das Komplement einer gegebenen Zahl a allgemein bestimmt? Dies hängt von der Anzahl der Ziffern der Uhr ab, die, wenn man es binär betrachtet, von der Wortlänge des jeweils betrachteten Computers abhängt.

Angenommen, die Wortlänge betrage n Bits, beispielsweise 4. Dann lassen sich hiermit allgemein 2^n verschiedene Werte darstellen, bei vier Bits wäre dies der Bereich von 0 bis 15, passend zu obigem Beispiel. Um nun das 2er-Komplement a^* eines Wertes a zu bestimmen, muss lediglich $2^n - a$ gerechnet werden, da 2^n Schritte den Zeiger wieder auf seinen Ausgangspunkt bringen, was auf den ersten Blick nicht nach einem Gewinn aussieht, da hier noch immer eine Subtraktion benötigt wird, die ja eigentlich durch den Übergang zu Zahlen in Komplementdarstellung hätte vermieden werden sollen.

Um im Kontext des Beispieles zu bleiben, wird im Folgenden von einer Wortlänge von 4 Bits ausgegangen. Zu bestimmen ist nun das 2er-Komplement des Wertes 4, d. h. es ist im Prinzip $2^4 - 4 = 16 - 4$ zu rechnen. Binär entspricht dies der Subtraktion $10000 - 0100$, wobei der Wert $2^4 = 16$ selbst eigentlich gar nicht dargestellt werden kann, da er fünf anstelle der verfügbaren vier Bits benötigt.

Hier kann nun ein einfacher Trick weiterhelfen, indem die 16 als $15 + 1$ aufgefasst wird, d. h. es wird statt $16 - 4$ einfacher $15 + 1 - 4 = 15 - 4 + 1$ gerechnet. Diese kleine Umstellung der Operationsreihenfolge ist essenziell, da dies binär die Gestalt $1111 - 0100 + 0001$ hat, was eine ausgesprochen einfache Rechnung darstellt, da von 1111 jede beliebige vier Bit lange Binärzahl subtrahiert werden kann, ohne, dass hierbei ein Überlauf auftritt, d. h. bei der Teilrechnung $1111 - 0100$ muss nicht mehr schrittweise von rechts nach links vorgegangen werden, vielmehr können alle vier Bits parallel und damit deutlich schneller als bei sequentiellem Vorgehen subtrahiert werden, indem einfach alle Bits des zu subtrahierenden Wertes invertiert werden, so dass aus jeder 1 eine 0 und umgekehrt wird.

Das gesuchte Komplement ist also $a^* = 1111 - 0100 + 0001 = 1011 + 0001 = 1100$, was gerade dem bereits oben bestimmten Dezimalwert 12 entspricht. Das Elegante an dieser Methode ist, dass das Komplement eines beliebigen Integerwertes a einfach durch Ausführen der beiden folgenden Schritte bestimmt werden kann:

---

1. Invertiere alle Bits der Binärdarstellung von a.
2. Addiere zu dem resultierenden Wert 1.

Wichtig ist hierbei, stets mit der gleichen Anzahl von Stellen zu arbeiten, d. h. auch, wenn führende Nullen auftreten, müssen diese notiert werden, da sie bei der Bildung des Komplementes zu Einsen werden, die natürlich nicht verloren gehen dürfen. Das in Abb. 2.6 dargestellte Beispiel verdeutlicht das allgemeine Vorgehen.