Otto Opitz, Stefan Etschberger, Wolfgang R. Burkart, Robert Klein
Mathematik

Otto Opitz, Stefan Etschberger,
Wolfgang R. Burkart, Robert Klein

Mathematik

Lehrbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften

DE GRUYTER
OLDENBOURG

ISBN 978-3-11-047532-6
e-ISBN (PDF) 978-3-11-047533-3
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-047550-0

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Druck und Bindung: Hubert und Co. GmbH & Co. KG, Göttingen
♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier
Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort

Ein solider Überblick über mathematische Grundlagen ist heute unverzichtbarer Bestandteil eines modernen Studiums der Wirtschaftswissenschaften. Die Mathematik fördert zudem das Verständnis vielfältiger mathematischer Planungsmethoden sowie der Statistik und Stochastik. In allen früheren Auflagen des vorliegenden Lehrbuchs wurde versucht, die für die Ökonomie wichtigsten Bausteine der Mathematik in anspruchsvoller, aber doch auch verständlicher Form darzustellen.

Das für die Konzeption der 12. Auflage erweiterte Autorenteam war sich darin einig, dass das Niveau bisheriger Auflagen beibehalten werden sollte. Darüber hinaus sollte der Inhalt allerdings um geeignete Verfahren des Operations Research, insbesondere Methoden der Optimierung und der Finanzmathematik, erweitert werden. Damit wird u. a. die Absicht verfolgt, mathematisch-theoretische Grundlagen und deren Anwendungen, die in der Literatur häufig getrennt diskutiert werden, zu verbinden und formal aufeinander abzustimmen. Insofern wurde der Inhalt der 12. Auflage gegenüber allen Vorgängerauflagen wesentlich erweitert. Noch stärker als bisher wird das Buch somit zum umfassenden und zuverlässigen Begleiter sowohl durch das Bachelor- als auch das Masterstudium und mithin auch weiterführenden Ansprüchen gerecht.

Neu an der aktuellen Fassung ist auch die seitenweise vorgenommene *Zweispaltigkeit*. Diese soll die flüssige Lesbarkeit fördern.

Wie in früheren Auflagen setzt sich die Darstellung kapitelweise wiederkehrend aus bestimmten *Grundbausteinen* zusammen, die deutlich voneinander abgesetzt sind. Abgesehen von den Kapiteln 1, 2, 3, in denen einige elementare Grundlagen aus der Schule wiederholt werden, handelt es sich um folgende Bausteine:

- Beschreibung des mathematischen Problems und des entsprechenden ökonomischen Hintergrunds
- Definition relevanter mathematischer Begriffe
- Sätze über mathematische Zusammenhänge
- Beweis bzw. Beweisideen zu den angegebenen Sätzen
- Beispiele mit Anwendungen aus der Ökonomie
- Ergänzende Bemerkungen

Die Fülle an *Beispielen* wurde beibehalten. Relevante Beispiele fördern das generelle Verständnis der Theorie, die Einsicht in deren Anwendungsrelevanz sowie Fertigkeiten der numerischen Behandlung.

Inhaltlich unterscheidet sich das Buch von vergleichbaren Darstellungen durch die Erweiterung von Anwendungen in den Kapiteln 27 bis 30, bei denen Probleme der Finanzmathematik sowie Methoden der linearen, nichtlinearen und ganzzahligen Optimierung in einer Form dargestellt werden, die nicht nur einführenden Charakter haben.

Zur Reihung der in diesem Lehrbuch behandelten Gebiete erfolgen nun einige Anmerkungen.

Am Anfang stehen elementare Grundlagen der Schulmathematik, und zwar *arithmetische Grundlagen* in Kapitel 1 und *geometrische Grundlagen* in Kapitel 2. Kapitel 3 befasst sich mit einer Einführung in die *komplexen Zahlen* und deren Rechenregeln, die beispielsweise bei der Lösung von Differenzen- und Differentialgleichungen höherer Ordnung (Kapitel 25), bei der Bestimmung von Matrixeigenwerten (Kapitel 20, 26) oder einfach bei der Nullstellenbestimmung von Polynomen (Abschnitt 9.3) benötigt werden.

Die folgenden Kapitel 4 bis 7 sind wichtigen *formalen Grundlagen* der Mathematik gewidmet. Ziel der *Aussagenlogik* ist die Erlernung einer mathematisch korrekten Argumentation und Beweisführung. Es geht gewissermaßen darum, die Spielregeln kennenzulernen, mit denen das Gebäude der folgenden Kapitel erstellt wird. Bereits die Darstellung der elementaren *Mengenlehre* ist ohne Aussagenlogik nicht möglich. Kenntnisse der Mengenlehre sind andererseits für alle später folgenden Teilgebiete wichtig. Betrachtet man Zuordnungen von Elementen zweier Mengen unter gewissen Bedingungen, so kommt man zum Begriff der *Relation* und unter weiteren Bedingungen zum Begriff der *Abbildung* oder *Funktion*, deren Definitions- und Wertebereich wiederum Mengen sind. Andererseits geht es in der linearen Algebra um die Einführung und Beschreibung von Punktmengen n-dimensionaler Räume und darauf aufbauend um die Lösung linearer Gleichungssysteme.

Der folgende Teil des Lehrbuchs, bestehend aus den Kapiteln 8 bis 13, befasst sich mit der *Analysis von Funktionen einer Variablen*. Im Mittelpunkt stehen dabei die ausführliche Diskussion *elementarer reeller Funktionen* sowie deren *Differentiation* und *Integration*. Grundlegend für derartige Überlegungen ist die Theorie von *Zahlenfolgen* und *Reihen*, das *Grenzwertverhalten von Funktionen* und damit zusammenhängend die *Stetigkeit von Funktionen*. In der Differentialrechnung sind Fragen des Änderungsverhaltens gegenüber Funktionen zu diskutieren. Damit erweist sich die Differentialrechnung auch als wesentliche Voraussetzung für die *Kurvendiskussion* reeller Funktionen, also für Fragen der Monotonie, Konvexität und Extremwertbestimmung. Ist nur das Veränderungsverhalten einer Funktion bekannt, so kann mit Hilfe der *Integration* die Funktion explizit bestimmt werden. Damit kann die Integration reeller Funktionen als Umkehrung der Differentialrechnung gesehen werden.

Mit Fragen der *linearen Algebra* befassen sich nachfolgend die Kapitel 14 bis 20. Voraussetzung zur Behandlung dieses Gebietes sind die Begriffe der *Matrix* und des *Vektors* als spezieller Matrix sowie die relevanten Rechenregeln. Damit kann man *Punktmengen* des *n-dimensionalen Raumes*, insbesondere Teilräume, offene, abgeschlossene und konvexe Mengen in übersichtlicher Weise beschreiben. Einige Anmerkungen über *Vektorräume* verdeutlichen den Zusammenhang von Matrixeigenschaften und Punktmengen n-dimensionaler Räume. Auf diesen Überlegungen basiert schließlich die Untersuchung von linearen Gleichungssystemen und Abbildungen. Für die Lösung *linearer Gleichungssysteme* steht ein auf Gauß und Jordan zurückgehendes Verfahren im Vordergrund. Die Diskussion *linearer Abbildungen* führt zur Diskussion der Existenz *inverser Matrizen*, deren Berechnung ebenfalls mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus erfolgt. Zur Lösung spezieller Gleichungssysteme kann auch die *Determinante* einer Matrix benutzt werden. Zentrale Bedeutung erlangt die Determinante jedoch erst bei der Behandlung von *Eigenwertproblemen* quadratischer Matrizen und beim Nachweis von *Definitheitseigenschaften* dieser Matrizen. Einerseits gelingt es, mit Hilfe der Eigenwerttheorie gleichförmige ökonomische Verhaltens- und Wachstumsprozesse zu beschreiben, andererseits sind Kurvendiskussionen bei differenzierbaren Funktionen mehrerer Variablen eng mit Definitheitseigenschaften bestimmter Matrizen und damit auch mit Eigenwertproblemen verbunden. In der linearen Algebra werden damit alle Grundlagen für die Analysis von Funktionen mehrerer Variablen gelegt.

Die *Analysis von reellen Funktionen mehrerer Variablen* ist Gegenstand der Kapitel 21 bis 23. Unter Verweis auf entsprechende Kapitel der Analysis von Funktionen einer Variablen werden die Begriffe *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* erweitert. Dabei geht es insbesondere um *partielles Differenzieren*, um *Richtungsableitungen* und das *totale Differential*. Darauf aufbauend werden die Standardfragen der Monotonie, Konvexität und Extremwertbestimmung behandelt. Die Berechnung der Koeffizienten in der *einfachen linearen Regression* erweist sich als interessante Anwendung der Extremwertbestimmung. Eine kurze Übersicht über einfache Grundlagen zur *Integration von Funktionen mehrerer Variablen* schließt diesen Teil des Buches ab.

Das für den Ökonomen sehr wichtige Gebiet der *Differenzen- und Differentialgleichungen* kann in Einführungsveranstaltungen oft nur knapp abgehandelt werden. Dennoch bietet dieses Gebiet für viele ökonomische Verhaltens- und Wachstumsprozesse geeignete Modelle. Aus diesem Grunde wurde in den Kapiteln 24 bis 26 auf eine strenge Theorie zugunsten von Beispielen verzichtet. Ferner erfolgte eine weitgehende Beschränkung auf *lineare Gleichungen* bzw. *Gleichungssysteme* mit *konstanten Koeffizienten*.

Die Kapitel 27 bis 30 befassen sich mit einigen *wesentlichen Anwendungen* der Mathematik auf wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen.

Direkt aufbauend auf dem Kapitel 8 über Folgen und Reihen gilt die *Finanzmathematik* als wichtiger Bestandteil eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums. Ausgehend von der *Zins-* und *Abschreibungsrechnung* wird das *Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik* mit seiner Relevanz für Investitions- und Finanzierungsentscheidungen dargestellt. Ergänzt wird das Kapitel 27 durch Ausführungen zur *Renten-, Tilgungs-* und *Kursrechnung*.

In der *linearen Optimierung* geht es zunächst um *Darstellungsformen* und die *Lösbarkeit* entsprechender Problemstellungen. Grundlage dafür sind lineare Abbildungen und Gleichungssysteme (Kapitel 17, 18). Die *Dualität* von *Maximum-* und *Minimumproblemen* steht im Zentrum des Kapitels 28. Ein interessantes

Beispiel dazu stellt das *lineare Standardtransportproblem* dar, das aufgrund seiner speziellen Struktur mit einem so genannten primal-dualen Algorithmus behandelt werden kann. Zur Lösung sehr allgemeiner Probleme wird schließlich die *Zweiphasenmethode* beschrieben.

Die *nichtlineare Optimierung* (Kapitel 29) schließt direkt an die Kapitel 21, 22 über Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen und deren Eigenschaften an. Die Erweiterung gegenüber den genannten Kapiteln besteht darin, dass analog zur linearen Optimierung *Nebenbedingungen* eine tragende Rolle spielen. In diesem Zusammenhang sind vor allem die klassischen Ansätze von *Lagrange* und *Kuhn/Tucker* zu nennen, die verfahrensbedingt Optimallösungen liefern, falls solche existieren. Demgegenüber ermitteln sogenannte *Gradienten-* oder *Strafkostenverfahren* im Allgemeinen Optimallösungen nur näherungsweise.

Die Forderung nach *Ganzzahligkeit in Optimierungsmodellen* (Kapitel 30) wurde in der Mathematik lange Zeit kaum beachtet. Neben den klassischen *Schnittebenenverfahren von Gomory* wurden für viele spezielle Anwendungen maßgeschneiderte Lösungsverfahren entwickelt. Als wichtiges allgemein orientiertes Lösungskonzept der ganzzahligen Optimierung gilt das *Branch-and-Bound-Prinzip*. Es geht dabei um die Zerlegung der Menge der zulässigen Lösungen in Teilmengen, um daraus Schranken für Optimallösungen abzuleiten.

Zweifellos können die hier diskutierten Anwendungen kaum Gegenstand der Mathematikausbildung von Studierenden im Grundstudium der Wirtschaftswissenschaften sein. Nützlich sind die entsprechenden Kapitel dennoch im Rahmen von Vorlesungen über Operations Research oder mathematische Planungsverfahren.

Mit der vorliegenden 12. Auflage erfuhr das Lehrbuch seine umfangreichste Veränderung und Erweiterung. Für die Erstellung des Manuskripts zeichnen die Autoren S. Etschberger und W. Burkart verantwortlich, für den Inhalt selbstverständlich alle vier Autoren.

Dem Verlag De Gruyter Oldenbourg, insbesondere Herrn Dr. Stefan Giesen, danken wir für die Aufgeschlossenheit in allen Fragen und die gute Zusammenarbeit.

Augsburg, im Mai 2017

Otto Opitz
Stefan Etschberger
Wolfgang Burkart
Robert Klein

Inhaltsverzeichnis

Vorwort V

Elementare Grundlagen

1 Grundlagen der Arithmetik 1
1.1 Zahlenbereiche, Grundrechenarten 1
1.2 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 3
1.3 Indizierung, Summen und Produkte 5
1.4 Kombinatorik 6
1.5 Gleichungen mit einer Variablen 10
1.6 Ungleichungen mit einer Variablen 14

2 Grundlagen der Geometrie 17
2.1 Ebene Geometrie 17
2.2 Räumliche Geometrie 20
2.3 Trigonometrie 21
2.4 Analytische Geometrie der Ebene 23

3 Komplexe Zahlen 29
3.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen 29
3.2 Grundrechenarten 31
3.3 Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren 33
3.4 Gleichungen höheren Grades 36

Formale Grundlagen

4 Aussagen und ihre Verknüpfungen 39
4.1 Axiome, Definitionen, Sätze 39
4.2 Verknüpfung von Aussagen 40
4.3 Tautologie und Kontradiktion 44
4.4 Allaussagen, Existenzaussagen 47

5 Mathematische Beweisführung 49
5.1 Beweis durch Nachrechnen 49
5.2 Direkter Beweis einer Implikation 49
5.3 Widerlegen einer Implikation durch ein Gegenbeispiel 50
5.4 Indirekter Beweis oder Widerspruchsbeweis für eine Implikation 50
5.5 Beweisverfahren für die Äquivalenz 51
5.6 Beweis durch vollständige Induktion 52

6 Mengen und ihre Operationen 55
6.1 Mengenbegriff . . . 55
6.2 Beziehung von Mengen . . . 57
6.3 Verknüpfung von Mengen . . . 59

7 Binäre Relationen 65
7.1 Einführung und Darstellungsformen . . . 65
7.2 Ordnungsrelationen . . . 68
7.3 Invertierung und Komposition . . . 76
7.4 Funktionen als spezielle Relationen . . . 80

Analysis von Funktionen einer Variablen

8 Folgen und Reihen 85
8.1 Explizit und rekursiv definierte Folgen . . . 85
8.2 Arithmetische und geometrische Folgen . . . 87
8.3 Konvergenz und Divergenz unendlicher Folgen . . . 87
8.4 Rechnen mit konvergenten Folgen . . . 90
8.5 Arithmetische und geometrische Reihen . . . 92
8.6 Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen . . . 94
8.7 Die Eulersche Zahl als Grenzwert . . . 97

9 Reelle Funktionen einer Variablen 99
9.1 Einführende Beispiele . . . 99
9.2 Eigenschaften reeller Funktionen . . . 104
9.3 Elementare reelle Funktionen . . . 109

10 Grenzwerte und Stetigkeit 125
10.1 Grenzwerte reeller Funktionen . . . 125
10.2 Stetige Funktionen . . . 127
10.3 Zwischenwertsatz . . . 132

11 Differentiation von Funktionen einer Variablen 135
11.1 Differenzenquotient und Differentiation . . . 135
11.2 Differentiationsregeln . . . 139
11.3 Differenzieren elementarer Funktionen . . . 141
11.4 Ableitungen höherer Ordnung . . . 144
11.5 Änderungsraten und Elastizitäten . . . 146

12 Kurvendiskussion 151
12.1 Monotonie und Konvexität . . . 151
12.2 Extremwertbestimmung . . . 156
12.3 Approximation reeller Funktionen durch Polynome . . . 162

13 Integration 169
13.1 Unbestimmte Integrale . . . 170
13.2 Bestimmte Integrale und Flächenberechnung . . . 177
13.3 Uneigentliche Integrale . . . 186

Lineare Algebra

14 Matrizen und Vektoren 189

14.1 Einführende Bemerkungen zur Schreibweise 190
14.2 Regeln der Addition und Subtraktion 193
14.3 Regeln der Multiplikation 196

15 Punktmengen im $\mathbb{R}^n$ 203

15.1 Absolutbetrag von Vektoren 203
15.2 Hyperebenen und Sphären 205
15.3 Offene und abgeschlossene Punktmengen 207
15.4 Konvexe Mengen 209

16 Vektorräume 215

16.1 Begriff, Basis und Dimension 215
16.2 Basistausch 218
16.3 Rang einer Matrix 223

17 Lineare Gleichungssysteme 231

17.1 Einführende Beispiele 231
17.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme 233
17.3 Lösung homogener Gleichungssysteme 239
17.4 Lösung inhomogener Gleichungssysteme 242
17.5 Zusammenhang mit Vektorräumen 244

18 Lineare Abbildungen 247

18.1 Eigenschaften linearer Abbildungen 247
18.2 Inverse und orthogonale Matrizen 252

19 Determinanten 259

19.1 Definition und Berechnung 259
19.2 Eigenschaften von Determinanten 263
19.3 Zusammenhänge mit Matrixrängen und linearen Gleichungssystemen 266

20 Eigenwertprobleme 269

20.1 Einführende Beispiele 269
20.2 Eigenwerte und Eigenvektoren 271
20.3 Existenz reeller Eigenwerte 275
20.4 Definitheit von Matrizen 281

Analysis von Funktionen mehrerer Variablen

21 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen 285

21.1 Darstellung und Beispiele 285
21.2 Stetigkeit und partielle Differentiation 289
21.3 Richtungsableitungen 294
21.4 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung und totales Differential 299

22 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen mehrerer Variablen 305
22.1 Monotonie und Konvexität . . . 305
22.2 Extremwertbestimmung . . . 307
22.3 Einfache lineare Regression . . . 311

23 Mehrfache Integrale 315
23.1 Parameterintegrale . . . 315
23.2 Doppelintegrale . . . 319

Differenzen- und Differentialgleichungen

24 Differenzen- und Differentialgleichungen erster Ordnung 323
24.1 Grundlagen und Beispiele . . . 323
24.2 Lösung von Differenzengleichungen erster Ordnung . . . 327
24.3 Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 331

25 Differenzen- und Differentialgleichungen höherer Ordnung 335
25.1 Grundlagen und Beispiele . . . 335
25.2 Homogene lineare Differenzen- und Differentialgleichungen . . . 336
25.3 Inhomogene lineare Differenzen- und Differentialgleichungen . . . 343

26 Differenzen- und Differentialgleichungssysteme erster Ordnung 349
26.1 Grundlagen und Beispiele . . . 349
26.2 Homogene lineare Differenzen- und Differentialgleichungssysteme . . . 351
26.3 Inhomogene lineare Differenzen- und Differentialgleichungssysteme . . . 356

Anwendungen

27 Finanzmathematik 361
27.1 Zinsrechnung . . . 361
27.2 Abschreibungen . . . 365
27.3 Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik . . . 366
27.4 Investitions- und Finanzierungsentscheidungen . . . 369
27.5 Rentenrechnung . . . 373
27.6 Tilgungsrechnung . . . 380
27.7 Kursrechnung . . . 383

28 Lineare Optimierung 387
28.1 Darstellungsformen, Anwendungen, Lösbarkeit . . . 387
28.2 Simplexalgorithmus und Standardmaximumproblem . . . 394
28.3 Dualität und Standardminimumproblem . . . 403
28.4 Der duale Simplexalgorithmus . . . 406
28.5 Zweiphasenmethode . . . 414
28.6 Lineare Transportprobleme . . . 416

29 Nichtlineare Optimierung 423
29.1 Darstellungsformen, Beispiele und Grundlagen der nichtlinearen Optimierung 423
29.2 Der Ansatz von Lagrange 428
29.3 Der Ansatz von Kuhn und Tucker 437
29.4 Gradientenverfahren 442
29.5 Strafkostenverfahren 449

30 Ganzzahlige Optimierung 453
30.1 Darstellungsformen, Beispiele und Grundlagen der ganzzahligen Optimierung 453
30.2 Das Branch-and-Bound-Prinzip 456
30.3 Das Schnittebenenverfahren von Gomory 462

Anhang

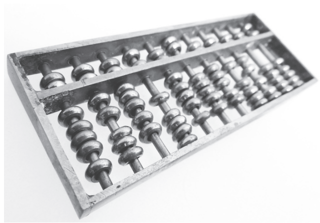
Literaturverzeichnis 465

Symbolverzeichnis 469

Griechisches Alphabet 475

Stichwortverzeichnis 477

1 Grundlagen der Arithmetik



Im ersten Kapitel behandeln wir zunächst die *reellen Zahlen* und wie man mit ihnen rechnet. Das umfasst neben den Grundrechenarten auch das Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren. Danach besprechen wir die allgemeine Notation von Summen und Produkten mittels spezieller Symbole sowie einige grundlegende Sachverhalte der Kombinatorik. Schließlich gehen wir auf das Lösen von Gleichungen und den Umgang mit Ungleichungen ein.

1.1 Zahlenbereiche, Grundrechenarten

Ausgehend von den *natürlichen Zahlen*

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

werden wir den Zahlenbereich schrittweise erweitern. Fügt man die Zahl 0 sowie die negativen Zahlen $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ hinzu, so erhält man den Bereich der *ganzen Zahlen*. Alle denkbaren *Brüche* mit ganzen Zahlen im *Zähler* und *Nenner* – ausgenommen die Zahl 0 im Nenner – bilden den Bereich der *rationalen Zahlen*, zum Beispiel

$$\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{1}{5},\ \tfrac{25}{7},\ \tfrac{6}{1} = 6\,.$$

Betrachtet man die Grundrechenarten der *Addition* (+), *Subtraktion* (−), *Multiplikation* (·) und *Division* (:), allgemein in der Mathematik auch als Operationen bezeichnet, so gilt:

- Für zwei natürliche Zahlen a, b führen die *Summe* $a + b$ und das *Produkt* $a \cdot b$ wieder zu einer natürlichen Zahl.
- Für zwei ganze Zahlen a, b ist das Resultat von Summe, Produkt und *Differenz* $a - b$ jeweils wieder ganzzahlig.
- Für zwei rationale Zahlen a, b erhalten wir auch wieder ein rationales Ergebnis durch Summe, Produkt, Differenz und den *Quotienten* $a : b$ beziehungsweise $\frac{a}{b}$, falls b von 0 verschieden ist, kurz $b \neq 0$.

Ist der Quotient $a : b = \frac{a}{b}$ zweier ganzer Zahlen a, b ganzzahlig, so heißt a durch b *ohne Rest teilbar*. Man bezeichnet b als *Teiler* von a und a als *Vielfaches* von b.

Bei der Division der ganzen Zahlen a, b durch eine natürliche Zahl n ist es oft wichtig zu wissen, ob ein gleicher oder verschiedener Rest entsteht. Erhalten wir bei der Division $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ einen gleichen Rest, so ist $\frac{a-b}{n}$ ganzzahlig beziehungsweise $a - b$ durch n ohne Rest teilbar. In diesem Fall heißen die ganzen Zahlen a, b *kongruent modulo* n und man schreibt

$$a = b \pmod{n}, \tag{1.1}$$

falls $\frac{a-b}{n}$ ganzzahlig ist. Die natürliche Zahl n heißt *Modul* der Kongruenz.

Beispielsweise bedeutet

$a = 0 \pmod{n}$: a ist durch n ohne Rest teilbar.
$a = 1 \pmod{n}$: bei $\frac{a}{n}$ entsteht ein Rest von 1.

Damit gilt für alle geraden Zahlen $a = 2, 4, 6, \ldots$ beziehungsweise für alle ungeraden $b = 1, 3, 5, \ldots$

$$a = 0 \pmod{2}, \qquad b = 1 \pmod{2}\,.$$

Für rationale Zahlen existiert neben der Darstellung als *Bruch* zweier ganzer Zahlen auch die sogenannte *Dezimaldarstellung*, beispielsweise

$$\frac{6}{10} = 0 + \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{8} = 3 + \frac{125}{1000} = 3.125$$

$$-\frac{18}{11} = -1 - \frac{7}{11} = -1 - \frac{63}{99} = -1.6363\ldots = -1.\overline{63}$$

$$\frac{16}{7} = 2.285714\,285714\,\ldots = 2.\overline{285714} = 2 + \frac{285714}{999999} = 2 + \frac{2 \cdot 142857}{7 \cdot 142857} = 2 + \frac{2}{7}$$

DOI: 10.1515/9783110475333-001

Man erhält jeweils *endliche* ($6/10$) oder *unendlich-periodische* ($-18/11$) Dezimalzahlen.

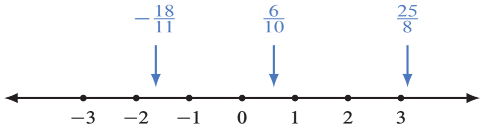


Abbildung 1.1: *Zahlengerade und rationale Zahlen*

Offenbar ist der Bereich der rationalen Zahlen noch nicht umfassend genug, um alle Punkte der Zahlengeraden zu erreichen. Beispielsweise gibt es keine rationale Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Zahl 2 ergibt. Mit der Dezimalzahl $a = 1.414213562\ldots$ kommt man der Lösung um so näher, je mehr Dezimalstellen ausgerechnet werden. Eine sich wiederholende Ziffernfolge kann dabei jedoch nicht festgestellt werden. Man spricht von einem *unendlich-nichtperiodischen Dezimalbruch* oder von einer *irrationalen Zahl*. Irrationale Zahlen sind beispielsweise die *Eulersche Zahl* $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ und die *Kreiszahl* $\pi = 3.14159\ldots$.

Erweitert man den Bereich der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen, so entsteht der Bereich der *reellen Zahlen*.

Jeder reellen Zahl entspricht nun ein Punkt der Zahlengeraden und jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl. Mit den Bezeichnungen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ für die genannten Zahlenbereiche erhalten wir einen hierarchischen Aufbau wie in Abbildung 1.2.

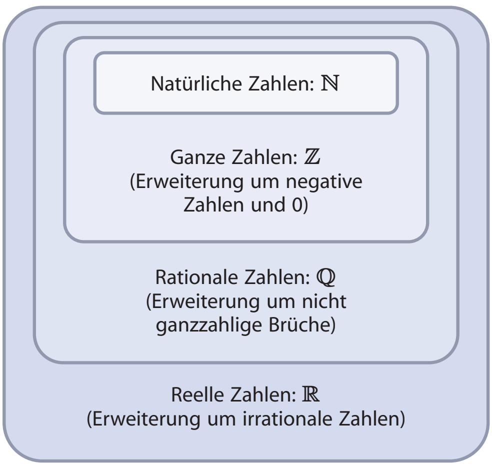


Abbildung 1.2: *Hierarchischer Aufbau des Zahlensystems*

Für die Verknüpfung von reellen Zahlen a, b, c gilt bezüglich der Addition:

- $a + b = b + a$
  (Kommutativgesetz der Addition)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
  (Assoziativgesetz der Addition)
- für alle a gibt es eine Zahl 0 mit
  $a + 0 = 0 + a = a$
- für alle a, b gibt es eine Zahl x mit
  $a + x = x + a = b$

Für die multiplikative Verknüpfung gilt:

- $a \cdot b = b \cdot a$
  (Kommutativgesetz der Multiplikation)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  (Assoziativgesetz der Multiplikation)
- für alle a gibt es eine Zahl 1 mit
  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- für alle a, b mit $a \neq 0$ gibt es eine Zahl x mit
  $a \cdot x = x \cdot a = b$

Außerdem gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

Hier ist auf folgende Regeln zu achten:

- Multiplikation und Division haben Vorrang vor Addition und Subtraktion, z. B. $5 \cdot 3 - 5 : 2 = 15 - 2.5 = 12.5$
- Rechenoperationen in Klammern sind bevorzugt durchzuführen, z. B. $5 \cdot (3 - 0.5) = 5 \cdot 2.5 = 12.5$ (vgl. Distributivgesetz)

Daraus ergeben sich einige grundsätzliche Regeln für das *Klammerrechnen*:

$$\begin{aligned} -(a) &= -a & -(-a) &= a \\ (a + b) &= a + b & & \\ -(a + b) &= -a - b & -(a - b) &= -a + b \\ -(a \cdot b) &= (-a) \cdot b & & \\ &= -a \cdot b & (-a)(-b) &= ab \end{aligned} \tag{1.2}$$

Für das Rechnen mit *Brüchen* $\frac{a}{b}$ heißt a der *Zähler* und b der *Nenner* des Bruches. Unter der Voraussetzung, dass der Nenner jeweils verschieden von 0 ist, gelten die Regeln:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} &= \frac{a \pm c}{b} & \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} & \frac{a}{b} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Beispiel 1.1

a) $$\begin{aligned} & 12 - (2 - 4 - (2 - 5) + (4 - 6 + 2) \\ & -(3 - (2 - 5) - 2)) \\ &= 12 - (2 - 4 + 3 + 0 - (3 + 3 - 2)) \\ &= 12 - (1 - 4) = 12 + 3 = 15 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} & 3 + 5(1 - 4) - 6(4 - 3(1 - 2)) \cdot 2(3 - 2 \cdot 2) \\ &= 3 - 15 - 6(4 + 3) \cdot 2(-1) \\ &= -12 - 42(-2) = 72 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} & \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{2}{5}\right) \cdot 20 - \tfrac{16}{3}\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}\right) - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{14}{6}\right) \\ &= \tfrac{25-4}{10} \cdot 20 - \tfrac{16}{3} \cdot \tfrac{6-3}{4} - \tfrac{2-14}{6} \\ &= 42 - 4 + 2 = 40 \end{aligned}$$

Oft sind exakte Ergebnisse von Rechenoperationen in Dezimalschreibweise nicht erforderlich oder möglich (irrationale Zahlen). Dann beschränkt man sich im Ergebnis auf eine vorgegebene Anzahl von Nachkommastellen.

Gegebenenfalls ist dazu die auf die letzte interessierende Dezimalstelle folgende Ziffer zu betrachten. Im Fall von 0, 1, 2, 3, 4 bleibt die letzte interessierende Dezimalstelle unverändert, im Fall von 5, 6, 7, 8, 9 wird die interessierende Dezimalstelle um 1 erhöht. Man spricht dann vom *Abrunden* bzw. *Aufrunden* reeller Dezimalzahlen.

Beispiel 1.2

Wir betrachten die rationale Zahl $\frac{1}{16} = 0.0625$ sowie die irrationale Zahl $\mathrm{e} \approx 2.7182818$.

	Gerundete Zahl	
Nachkommastellen	$\frac{1}{16}$	e
0	0	3
1	0.1	2.7
2	0.06	2.72
3	0.063	2.718

1.2 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Ausgangspunkt ist zunächst für eine reelle Zahl a und eine natürliche Zahl n die Gleichung:

$$x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n \tag{1.4}$$

Das Symbol x beschreibt das *n-fache Produkt* einer reellen Zahl. Man bezeichnet a als *Basis*, n als *Exponenten*, a^n heißt die *n-te Potenz von a* oder kurz „a hoch n“. Mit der Vereinbarung

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.5}$$

können wir das *Potenzieren* auf negative Exponenten erweitern.

Für ganzzahlige $m, n \neq 0$ und reelle $a, b \neq 0$ gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} = (a^n)^m \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ a^0 &= a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Zusätzlich vereinbart man $0^0 = 1$.

Beispiel 1.3

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot 3^3 &= 9 \cdot 27 = 243 = 3^5 \\ (3^2)^3 &= 9^3 = 729 = 3^6 \\ 3^2 \cdot 2^2 &= 9 \cdot 4 = 36 = 6^2 \\ \frac{3^2}{2^2} &= \frac{9}{4} = 2.25 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Das Radizieren stellt in gewissem Sinne eine Umkehrung des Potenzierens dar. Beim *Potenzieren* sucht man zur reellen Basis a und zu ganzzahligem Exponenten n die Zahl $x = a^n$. Beim *Radizieren* sucht man eine Basis x, deren n-te Potenz die Zahl a ergibt. Betrachtet wird für eine reelle Zahl a und eine natürliche Zahl n die Gleichung

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}} = x^n = a\,. \tag{1.7}$$

Die Lösung dieser *Potenz-* oder *Wurzelgleichung* heißt die *n-te Wurzel* von a. Man schreibt

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \tag{1.8}$$

und bezeichnet a als *Radikand*, n als *Wurzelexponent*.

Wichtig erscheint schließlich der Hinweis, dass man für die n-te Wurzel einer reellen Zahl möglicherweise eine reelle Zahl, zwei reelle Zahlen oder auch keine reelle Zahl findet.

Ist n eine ungerade Zahl, so existiert für $\sqrt[n]{a}$ stets eine eindeutige reelle Lösung. Ist jedoch n eine gerade Zahl, so existiert keine reelle Lösung, wenn der Radikand a negativ ist.

Für $a > 0$ und n geradzahlig existieren immer zwei reelle Lösungen der Form x_1 und $x_2 = -x_1$ mit

$$x_1 = +\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,, \qquad x_2 = -\sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.}$$
$$x = \pm\sqrt[n]{a}\,.$$

Es ergeben sich folgende Rechenregeln für ganzzahlige $m, n \neq 0$ und reelle $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[1]{a} &= a^{\frac{1}{1}} = a \\
\sqrt[m]{a^n} &= a^{\frac{n}{m}} \\
\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{m}} a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \\
&= a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a} \\
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Damit kann das Radizieren als Erweiterung des *Potenzierens* auf *rationale Exponenten* angesehen werden.

Oft verwendet man für $\sqrt[2]{a}$ die Abkürzung $\sqrt{a}$. Man spricht dann auch von der *Quadratwurzel* von a.

Beispiel 1.4

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8^2} &= 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 2^2 = 4 \\
\sqrt[3]{\sqrt{729}} &= 729^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3 \\
\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt{64} &= 64^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 8 = 32 = 64^{\frac{5}{6}} \\
\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} &= 2 \cdot 3 = 6 = (8 \cdot 27)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Für das *Logarithmieren* geht man von zwei gegebenen positiven reellen Zahlen a, b aus. Gesucht wird ein Wert x, so dass die x-te Potenz von a gerade b ergibt, also

$$a^x = b \quad \text{bzw.} \quad x = \log_a b\,. \tag{1.10}$$

Die Lösung heißt der *Logarithmus von b zur Basis a*. Damit gilt für $a > 1$:

$$\log_a b \begin{cases} > 0 & \text{für } b > 1 \\ = 0 & \text{für } b = 1 \\ < 0 & \text{für } 0 < b < 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
\log_a a &= 1 && \\
\log_a (b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c && (b, c > 0) \\
\log_a (b/c) &= \log_a b - \log_a c && (b, c > 0) \\
\log_a \left(b^c\right) &= c \log_a b && (b > 0,\ c \text{ beliebig})
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Aus der Schule geläufig ist der *dekadische Logarithmus* oder *Zehnerlogarithmus* mit $a = 10$, also

$$\begin{aligned}
10^x = b \text{ bzw.} \quad & x = \log_{10} b = \log b\,, \\
\text{gelegentlich auch} \quad & x = \lg b\,.
\end{aligned}$$

Besonders wichtig für die Analysis ist der *natürliche Logarithmus* mit der Basis $\mathrm{e} \approx 2.71828\ldots$, bekannt als Eulersche Zahl:

$$\mathrm{e}^x = b \quad \text{bzw.} \quad x = \log_{\mathrm{e}} b = \ln b\,.$$

Die Logarithmen verschiedener Basen können ineinander überführt werden. Dabei überlegt man sich folgende Schritte:

$$a^x = b^y = c \qquad (\text{mit } a, b > 1 \text{ reell, } c > 0 \text{ reell})$$

Daraus folgt

$$x = \log_a c,\ y = \log_b c \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{y} = \frac{\log_a c}{\log_b c}$$

sowie mit den Rechenregeln in (1.12)

$$\log_a a^x = \log_a b^y \text{ bzw. } x \cdot \log_a a = x = y \log_a b$$
$$\text{bzw. } \frac{x}{y} = \log_a b.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich:

$$\frac{x}{y} = \log_a b = \frac{\log_a c}{\log_b c} \quad \text{bzw.} \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Für $a = c$ gilt speziell $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Beispiel 1.5

a) $\ln 10 = 2.302585\ldots = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0.4343\ldots}$

b) $\log e = 0.4343\ldots = \frac{\ln e}{\ln 10} = \frac{1}{2.302585\ldots}$

c) $\ln 5 + \log_5 6 = \ln 5 + \frac{\ln 6}{\ln 5}$
$\approx 1.60944 + \frac{1.79176}{1.60944} = 2.72272$

d) $\ln 10 \cdot \log e = \ln 10 \cdot \frac{\ln e}{\ln 10} = 1$

e) $\log_2 8 + \log_5 25 = \log_2 2^3 + \log_5 5^2$
$= 3 + 2 = 5$

f) $\log_{0.1} 10 = \frac{\log 10}{\log 0.1} = \frac{1}{-1} = -1$

1.3 Indizierung, Summen und Produkte

Kennzeichnet man reelle Zahlen durch Symbole $a, b, c, \ldots$, so reichen diese Symbole oft nicht aus, um große Zahlenmengen darzustellen. Man verwendet dann *indizierte* Symbole $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, \ldots$. Die dem Symbol a bzw. b angefügte und etwas tiefer gestellte Zahl $1, 2, 3\ldots$ heißt *Index*. Stellt eine Unternehmung n verschiedene Produkte her, so kann man die Produktionsquantitäten etwa mit $q_1, q_2, \ldots, q_n$ oder q_j $(j = 1, \ldots, n)$ bezeichnen.

Gelegentlich ist es sogar zweckmäßig, *Doppelindizes* zu verwenden. Werden beispielsweise n verschiedene Produkte auf m Maschinen bearbeitet, so fallen für jede Einheit eines Produktes m Maschinenzeiten, also insgesamt $m \cdot n$ Zeitwerte an. Der Wert z_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ gibt die Zeit an, die die Herstellung einer Einheit des Produktes P_j auf Maschine M_i benötigt. Die Indizierung ist problemlos auf alle ganzen Zahlen ausdehnbar, also beispielsweise

$$a_{-k}, a_{-k+1}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n .$$

Für die Addition und Multiplikation mehrerer reeller Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ führen wir ein Summen- bzw. ein Produktsymbol ein. Für die *Summe* schreiben wir

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i . \tag{1.13}$$

Dabei bezeichnet i den *Summationsindex*, dieser läuft von 1 als *untere Grenze* bis n als *obere Grenze*.

Für ganzzahlige m, n mit $m \leq n$ und jeweils reellen a, c, a_i, b_i, a_{ij} ergeben sich damit folgende Rechenregeln:

$$\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

(k ist ganzzahlig mit $m \leq k \leq n$)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

(k ist ganzzahlig) (1.14)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{mj} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} + \ldots \\ &\quad + a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} \\ &= a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} + \ldots \\ &\quad + a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Damit gilt mit ganzzahligen m, n, p, q mit $m \leq n$, $p \leq q$ und reellen a_i, b_j:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} a_i \sum_{j=p}^{q} b_j &= \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_i b_j = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} b_j a_i \\ &= \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} b_j a_i = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_i b_j = \sum_{j=p}^{q} b_j \sum_{i=m}^{n} a_i\end{aligned} \tag{1.16}$$

Beispiel 1.6

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{(n)\text{-mal}} = na$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \sum\limits_{k=3}^{n+2} (k-2)$

c) $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

d) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} ij = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 18$$
$$\sum_{i=1}^{3} i \sum_{j=1}^{2} j = (1+2+3)\cdot(1+2) = 18$$

e) $$\sum_{k=1}^{5} k \sum_{k=1}^{5} k = (1+2+3+4+5)\cdot(1+2+3+4+5) = 15\cdot 15 = 225$$

Entsprechend schreiben wir mit i als *Multiplikationsindex* für das Produkt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i\,. \qquad (1.17)$$

Damit ergeben sich für ganzzahlige k, m, n mit $m \le k \le n$ und jeweils reellen a, c, a_i, b_i, a_{ij} folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=m}^{n} ca_i &= c^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} a_i \\
\prod_{i=m}^{n} a_i b_i &= \prod_{i=m}^{n} a_i \prod_{i=m}^{n} b_i \\
\prod_{i=m}^{n} \frac{a_i}{b_i} &= \prod_{i=m}^{n} a_i \Big/ \prod_{i=m}^{n} b_i \\
\prod_{i=m}^{n} a_i &= \prod_{i=m}^{k} a_i \prod_{i=k+1}^{n} a_i \\
\prod_{i=m}^{n} a_i &= \prod_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} \\
&= a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n
\end{aligned} \qquad (1.18)$$

Beispiel 1.7

a) $\prod\limits_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

b) $\prod\limits_{i=1}^{n} c = \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{(n)\text{-mal}} = c^n$

c) $$\prod_{i=1}^{3} i \prod_{j=2}^{4} j = (1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3\cdot 4) = 144$$
$$= \prod_{i=1}^{3} i \prod_{j=1}^{3} (j+1) = \prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3} i(j+1)$$

d) $$\left(\prod_{i=2}^{5} i\right)^2 = (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^2 = 120^2 = 14400 = \prod_{i=2}^{5} i^2$$

e) $$\frac{\prod_{i=1}^{4}(i+1)}{\prod_{i=1}^{4} i} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \prod_{i=1}^{4} \frac{i+1}{i}$$

1.4 Kombinatorik

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, n verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen. Jede derartige Reihung bezeichnet man als *Permutation*. Für die Objekte a_1, a_2, a_3 erhalten wir beispielsweise 6 Permutationen

$$\begin{array}{lll} (a_1, a_2, a_3) & (a_2, a_1, a_3) & (a_3, a_1, a_2) \\ (a_1, a_3, a_2) & (a_2, a_3, a_1) & (a_3, a_2, a_1)\,. \end{array}$$

Dieses Problem hängt eng mit dem Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n zusammen (Beispiel 1.7):

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i = n! \qquad (1.19)$$

Dieser Ausdruck $n!$ wird als *n-Fakultät* bezeichnet. Beispielsweise gilt

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\,.$$

Mit der Vereinbarung $0! = 1$ ergibt sich die Rekursionsformel

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Betrachten wir nun zur Bildung aller Permutationen der Objekte $a_1, \dots, a_n$ die Objekte der Reihe nach, so ergeben sich für a_1 genau n Positionen. Liegt a_1 fest, bleiben für a_2 noch $n-1$ Positionen usw. Liegen $a_1, \dots, a_{n-1}$ fest, so auch a_n. Wir erhalten $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten. Daraus resultiert ein grundlegendes Ergebnis der Kombinatorik:

Für n verschiedene Objekte existieren $n!$ Permutationen. (1.20)

Schwieriger wird die Situation, wenn die n Objekte sich aus r Gruppen von jeweils $n_1, n_2, \dots, n_r$ nicht unterscheidbaren Objekten mit $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ zusammensetzen. Wir bezeichnen für diesen Fall zunächst die gesuchte Anzahl von Permutationen mit x. Nimmt man an, alle n_1 Objekte der ersten Gruppe wären unterscheidbar, so gäbe es in dieser Gruppe $n_1!$ Permutationen. Die Gesamtzahl aller Permutationen würde von x auf $x \cdot n_1!$ anwachsen. In gleicher Weise verfährt man mit allen weiteren Gruppen, so dass die Gesamtzahl der Permutationen schließlich auf $x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_r!$ ansteigen würde. Dieses Ergebnis muss dann aber mit der Anzahl $n!$ der Permutationen von n verschiedenen Objekten übereinstimmen. Wir erhalten die Gleichheit

$$x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r! = n!$$

und damit das Ergebnis:

Für n Objekte, die sich aus r Gruppen mit $n_1, n_2, \dots, n_r$ nicht unterscheidbaren Objekten zusammensetzen, existieren

$$x = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \tag{1.21}$$

Permutationen. Insbesondere erhält man für $r = 2$ Gruppen mit $n_1 = k, n_2 = n-k$ nicht unterscheidbaren Objekten nach Formel (1.21)

$$x = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Permutationen. Da dieses Ergebnis eine wichtige Rolle für binomische Ausdrücke der Form $(a+b)^n$ spielt, bezeichnet man für $k, n = 0, 1, 2, \dots$ und $k \le n$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{1.22}$$

als *Binomialkoeffizient „n über k“* oder *„k aus n“*. Es gilt damit auch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Für $k > n$ setzt man $\binom{n}{k} = 0$.

Beispiel 1.8

a) Für die Objekte

$$a, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, d$$

ist $n = 13, n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{13!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4! \cdot 3!} \\ &= 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \\ &= 360360\,. \end{aligned}$$

b) In einem Regal einer Hochschulbibliothek sollen drei Exemplare des gleichen Lehrbuches der BWL sowie je zwei gleiche Lehrbücher der Ingenieurmathematik und der Informatik untergebracht werden. Unterscheidet man die Bücher nach ihrer Signatur, gibt es für die 7 Bücher insgesamt $7! = 5040$ Permutationen. Werden die Bücher nur nach ihrem Titel unterschieden, so erhält man

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$$

mögliche Permutationen. Sollen die Bücher eines Titels jeweils zusammenstehen, so gibt es lediglich $3! = 6$ Permutationen.

c) $$\binom{8}{1} = \frac{8!}{1! \cdot 7!} = \binom{8}{7} = 8\,,$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10\,,$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15\,,$$

Für die Binomialkoeffizienten gelten folgende Rechenregeln mit $k, n = 0, 1, 2, \ldots$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Mit (1.23) erhält man speziell für $k = 0$ bzw. $k = n$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,.$$

Wir wenden uns nun den *binomischen Ausdrücken* der Form $(a+b)^n$ zu. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ berechnet man:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}$$

Hier zeigt sich, dass – abgesehen von den Einsen am linken und rechten Rand der Formeln – die „inneren“ Koeffizienten mit der Summe der beiden unmittelbar über ihnen links und rechts stehenden Koeffizienten übereinstimmen.

Mit Hilfe von (1.23) und (1.24) kann man die Koeffizienten der binomischen Formeln im *Pascalschen Dreieck* wie in Abbildung 1.3 anordnen.

Aus Abbildung 1.3 ergibt sich die *Binomische Formel* für a, b als reelle Zahlen und n als natürliche Zahl:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \\
&\quad + \ldots + nab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i
\end{aligned} \tag{1.25}$$

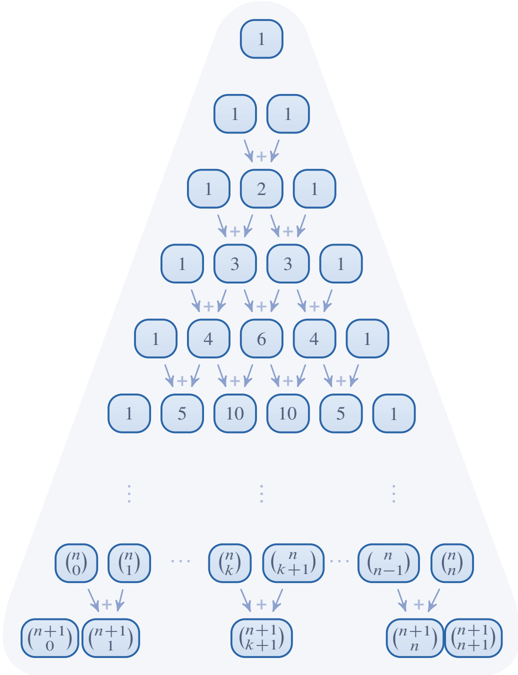


Abbildung 1.3: *Zahlendreieck nach Pascal (1623–1662)*

Wir kehren zur Bestimmung der Anzahl bestimmter Permutationen zurück und führen den Begriff der Kombination ein.

Für die natürlichen Zahlen k und n bezeichnet man jede Zusammenstellung von k aus n Elementen als eine *Kombination k-ter Ordnung*.

Je nachdem, ob es dabei auf die Reihenfolge der Zusammenstellung ankommt, unterscheiden wir Kombinationen

- *mit Berücksichtigung der Reihenfolge*,
- bzw. *ohne Berücksichtigung der Reihenfolge*.

Je nachdem, ob Elemente auch mehrmals ausgewählt werden können, unterscheiden wir Kombinationen

- *mit Wiederholung*,
- bzw. *ohne Wiederholung*.

Insgesamt sind also die vier in Tabelle 1.1 dargestellten Fälle zu diskutieren.

		Wiederholung mit	Wiederholung ohne
Reihenfolge	mit	n^k *Fall (a)*	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$ *Fall (b)*
Reihenfolge	ohne	$\dbinom{n+k-1}{k}$ *Fall (d)*	$\dbinom{n}{k}$ *Fall (c)*

Tabelle 1.1: *Anzahl Kombinationen k-ter Ordnung aus n Elementen*

Wir diskutieren zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1.9

Bei einem Wurf zweier Würfel soll i für die Augenzahl des ersten und j für die Augenzahl des zweiten Würfels stehen. Man erhält also Ergebnisse der Form (i, j). Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Ergebnisse:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Wir stellen fest, dass wir es mit Kombinationen zweiter Ordnung bei einer Basis von 6 Elementen zu tun haben und diskutieren die auftretenden 4 Fälle aus Tabelle 1.1.

a) Soll die Reihenfolge berücksichtigt werden, also beispielsweise $(3, 5) \neq (5, 3)$ und eine Wiederholung möglich sein, beispielsweise $(2, 2)$, so erhalten wir $36 = 6^2$ Ergebnisse.

b) Soll die Reihenfolge berücksichtigt werden, eine Wiederholung aber ausgeschlossen sein, so entfallen die 6 Ergebnisse $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$. Die Anzahl der Kombinationen beträgt damit $36 - 6 = 30 = \frac{6!}{4!}$.

c) Soll die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden und eine Wiederholung ausgeschlossen sein, so entfallen gegenüber b) die Hälfte der Ergebnisse, beispielsweise alle (i, j) mit $i < j$, es verbleiben noch $\frac{30}{2} = 15 = \binom{6}{2}$ Ergebnisse.

d) Soll schließlich die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden, eine Wiederholung aber zulässig sein, so kommen gegenüber c) wieder die 6 Ergebnisse $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$ dazu. Damit beträgt die Anzahl der Ergebnisse

$$15 + 6 = 21 = \binom{7}{2} = \binom{6+2-1}{2}.$$

In diesem Beispiel finden wir die vier möglichen Fälle von Tabelle 1.1 bestätigt. Dennoch schließen wir etwas allgemeinere Überlegungen an.

Fall (a): mit Reihenfolge, mit Wiederholung

Bei der Auswahl jedes der k Elemente gibt es n Möglichkeiten, da sowohl die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird, als auch Wiederholungen zugelassen sind. Wir erhalten insgesamt

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$$

Möglichkeiten.

Fall (b): mit Reihenfolge, ohne Wiederholung

Sollen gegenüber Fall (a) lediglich Wiederholungen ausgeschlossen sein, so haben wir bei der Auswahl von k aus n Elementen zur Besetzung der ersten Position n Möglichkeiten, zur Besetzung der zweiten Position $n - 1$ Möglichkeiten und schließlich zur Besetzung der k-ten Position noch $n - k + 1$ Möglichkeiten, wir erhalten

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

Fall (c): ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung

Dieser Fall unterscheidet sich vom Fall (b) dadurch, dass die Reihenfolge der k Elemente nicht mehr berücksichtigt wird. Sei nun x die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Nehmen wir an, wir müssten die Reihenfolge in der Kombination doch berücksichtigen, so ergäben sich $k!$ Möglichkeiten für jede der x Kombinationen, also insgesamt $x \cdot k!$ Möglichkeiten und wir erhalten Fall (b). Daraus resultiert die Gleichung $x \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ beziehungsweise für x

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

Fall (d): ohne Reihenfolge, mit Wiederholung

Gegenüber Fall (c) wird die Wiederholung wieder zugelassen, wobei die Reihenfolge der Elemente wie in Fall (c) unberücksichtigt bleibt.

Ein Objekt kann nun bis zu k-mal ausgewählt werden. Dazu ergänzt man $a_1, \dots, a_n$ um $k-1$ weitere Objekte $b_1, \dots, b_{k-1}$, von denen jedes für eine Wiederholung steht. Wird beispielsweise a_1 als erstes Objekt ausgewählt und j-mal wiederholt ($j = 1, \dots, k-1$), so enthält die entsprechende Kombination die Objekte $a_1, b_1, \dots, b_j$. Wird a_1 erstmals als i-tes Objekt ausgewählt und j-mal wiederholt ($j = 1, \dots, k-i$), so enthält die Kombination die Objekte $a_1, b_i, \dots, b_{i+j-1}$. Damit ist die Anzahl von Kombinationen k-ter Ordnung aus n Objekten $a_1, \dots, a_n$ mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gleich der Anzahl von Kombinationen k-ter Ordnung aus $n+k-1$ Objekten $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{k-1}$ ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Wir erhalten den Fall c) mit

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten.

Beispiel 1.10

a) Hat ein zehnköpfiger Aufsichtsrat aus seiner Mitte einen ersten und einen zweiten Vorsitzenden sowie einen Schriftführer zu wählen, so handelt es sich um eine Kombination dritter Ordnung mit Berücksichtigung der Reihenfolge, aber ohne Wiederholung; ferner ist $n = 10$. Damit gibt es $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten.

b) In der Elferwette des Fußballtotos sind elf Spiele jeweils mit 1, 0 oder 2 zu tippen. Die Reihenfolge der Spiele ist vorgegeben. In diesem Fall erhalten wir $3^{11} = 177\,147$ mögliche Tippreihen.

c) Im Zahlenlotto hat man 6 verschiedene aus 49 möglichen Zahlen anzukreuzen. Die Reihenfolge der Auswahl bleibt unberücksichtigt. Es ergeben sich

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Möglichkeiten.

d) In einem Supermarkt sollen im Lauf einer Woche sechs Werbeaktionen erfolgen. Zur Auswahl stehen Lautsprecherdurchsagen, Handzettel- und Plakatwerbung. Wir erhalten $n = 3$, $k = 6$. Damit gibt es keine Kombination ohne Wiederholung. Mit Wiederholung ergeben sich $3^6 = 729$ Möglichkeiten, falls die Reihenfolge der Aktionen eine Rolle spielt, andernfalls $\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$ Möglichkeiten.

1.5 Gleichungen mit einer Variablen

Beim Rechnen mit reellen Zahlen in den Abschnitten 1.1 und 1.2 wurden Symbole $a, b, c, d, \dots$ verwendet, die stellvertretend für bestimmte Zahlen stehen, also im konkreten Anwendungsfall vorgegeben sind. Man nennt sie *Konstanten* oder *Parameter*. Sollen Symbole, etwa $x, y, \dots$, im Rahmen gewisser Bedingungen einen oder mehrere zunächst unbekannte Werte annehmen können, so spricht man von *Variablen*. Werden nun zwei *Ausdrücke* oder *Terme*, bestehend aus Konstanten, Variablen und deren Verknüpfungen durch algebraische Operationen, beispielsweise

$$a + x, \quad \frac{ax^2}{b}, \quad \sqrt{xy} - \frac{a}{b}, \quad ab - b^2,$$

mit einem Gleichheitszeichen $=$ verbunden, so spricht man von einer *Gleichung*. Zur Umformung einer Gleichung $A = B$ mit den Termen A, B nutzt man folgende Regeln:

Rechenregel	Gleichung $A = B$
Vertauschen der Seiten	$B = A$
Addition/Subtraktion eines Terms C	$A + C = B + C$ $A - C = B - C$
Multiplikation/Division eines Terms C	$A \cdot C = B \cdot C$ $A/C = B/C$

Tabelle 1.2: *Umformung von Gleichungen*

Wir behandeln zunächst *lineare Gleichungen* der Form

$$ax + b = 0 \tag{1.26}$$

mit x als Variable, $a \neq 0$, b als gegebene reelle Konstanten. Die eindeutige Lösung ist dann

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Beispiel 1.11

a) Aus
$$2x + (5x + 6) = 5 - (2 - 4x)$$
folgt nach Zusammenfassung schrittweise
$$\begin{aligned} 7x + 6 &= 3 + 4x && \text{(Addition von } -4x - 6\text{)} \\ 3x &= -3 && \text{(Division durch 3)} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

b) Aus
$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{-2}{x+1}$$
folgt nach Multiplikation mit $(x+1)x$ schrittweise
$$\begin{aligned} 2x - 3(x + 1) &= -2x && \text{(Ausmultiplizieren)} \\ 2x - 3x - 3 &= -2x && \text{(Addition von } 2x + 3\text{)} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sogenannte *Verhältnisgleichungen* der Form
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
sind als lineare Gleichungen darstellbar, wenn drei der vier Größen bekannt sind. In der *Prozentrechnung* entspricht beispielsweise a dem *Prozentwert*, b dem *Grundwert*, c dem *Prozentsatz* (%) und $d = 100$.

Beispiel 1.12

a) 7200 von 15000 Studierenden einer Universität sind weiblich. Dann gilt:
$$\frac{p}{100} = \frac{7200}{15000} \text{ bzw. } p = \frac{720000}{15000} = 48\,(\%)$$
48% der Studierenden sind weiblich, 52% männlich.

b) Der Preis für 500 g Kaffee sei 6 €. Bei einem Wechselkurs von 1.3 (Dollar/Euro) ergibt sich folgender Preis in Dollar:
$$\tfrac{1.3}{1} = \tfrac{x}{6} \text{ bzw. } x = 6 \cdot 1.3 = 7.8\,\text{(Dollar)}$$

c) 24 Lampen benötigen nach 80-stündiger Brennzeit 180 kW h. Für den kW h-Verbrauch von 20 Lampen gleicher Stärke ergeben sich bei 100-stündiger Brennzeit
$$\frac{24 \cdot 80}{20 \cdot 100} = \frac{180}{x} \quad \text{bzw.}$$
$$x = \frac{20 \cdot 100 \cdot 180}{24 \cdot 80} = 187.5\,\text{kW h}\,.$$

d) Der Einkaufspreis eines Artikels beträgt 50 €, der Verkaufspreis 65 €. Dann gilt für den prozentualen Aufschlag:
$$\frac{65 - 50}{50} = \frac{x}{100} \quad \text{bzw.}$$
$$x = \frac{100 \cdot (65 - 50)}{50} = 30\,(\%)$$

e) Auf den Preis eines Gutes wird ein Rabatt von 8 % gewährt, auf den verminderten Preis zusätzlich 2.5 % Skonto- Der Kunde bezahlt schließlich 8.97 €.

Für den ursprünglichen Preis erhalten wir
$$\begin{aligned} \frac{x}{8.97} &= \frac{100}{100 - 8} \cdot \frac{100}{100 - 2.5} \\ &= \frac{100}{92} \cdot \frac{100}{97.5} \\ x \cdot 92 \cdot 97.5 &= 89700 \\ x &= 10\,(€)\,. \end{aligned}$$

Eine *quadratische Gleichung* ist gegeben durch
$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.27}$$
mit x als Variable, $a \neq 0, b, c$ als gegebene reelle Konstante.

Mit Hilfe der *binomischen Formeln*
$$(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2 \tag{1.28}$$
erhält man schrittweise:
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a} \\ x + \tfrac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a}} \\ x &= -\tfrac{b}{2a} \pm \tfrac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \\ x &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \end{aligned}$$

Die sogenannte *Diskriminante* $(b^2 - 4ac)$ ist entscheidend für die Art der Lösung der quadratischen Gleichung. Eine reellwertige Lösung kann nämlich nur existieren, wenn $(b^2 - 4ac)$ nicht negativ ist.

Im Einzelnen existieren für

- $b^2 - 4ac > 0$ zwei reelle Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \qquad (1.29)$$

- $b^2 - 4ac = 0$ eine „zweifache" reelle Lösung

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a},$$

- $b^2 - 4ac < 0$ keine reelle Lösung der quadratischen Gleichung.

Beispiel 1.13

a) Für $3x^2 + 4x + 2 = 0$ ist

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8 < 0,$$

also existiert keine reelle Lösung.

b) Für $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ist

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 = 0,$$

es existiert eine zweifache reelle Lösung

$$x_1 = x_2 = -\tfrac{6}{18} = -\tfrac{1}{3}.$$

c) Für $8x^2 - 6x + 1 = 0$ ist

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 8 = 4 > 0,$$

es existieren zwei reelle Lösungen

$$x_1 = \tfrac{1}{16}(6 + 2) = \tfrac{1}{2},$$
$$x_2 = \tfrac{1}{16}(6 - 2) = \tfrac{1}{4}.$$

Im Zusammenhang mit dem Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren haben wir unterschiedliche *nichtlineare* Potenz- bzw. Exponentialgleichungen kennen gelernt, die jeweils unter gewissen Voraussetzungen reelle Lösungen besitzen.

Seien a, b Konstanten und x die Variable, für die im Rahmen der jeweiligen Gleichung eine Lösung gesucht wird. Damit fassen wir die auftretenden Fälle in der folgenden Tabelle 1.3 zusammen:

Potenz- bzw. Exponentialgleichungen	reelle Lösungen existieren, falls
$x = a^b$	$a > 0, b$ reell $a < 0, b = \frac{p}{q}$ [1)] $a = 0, b > 0$
$\left.\begin{array}{l} x^b = a \text{ oder} \\ x = \sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}} \end{array}\right\}$	$\begin{cases} a > 0, b \text{ reell} \\ a = 0, b \neq 0 \\ a < 0, b = \frac{p}{q} \end{cases}$ [1)]
$b^x = a$ oder $x = \log_b a$	$a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$

[1)] Dabei gilt für $\frac{p}{q}$ jeweils: p ganzzahlig, q ungerade, also $q = \pm 1, \pm 3, \ldots$ und $\frac{p}{q}$ gekürzt

Tabelle 1.3: *Existenz von Lösungen für Potenz- und Exponentialgleichungen*

Für Potenz- und Exponentialgleichungen allgemeiner Art ergänzen wir in Tabelle 1.4 die in Tabelle 1.2 angegebenen Rechenregeln:

Rechenregel	Gleichung $A = B$
Potenzieren mit n natürlich	$A^n = B^n$
Radizieren mit n natürlich, $A, B > 0$	$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$
Potenzieren mit reeller Basis $a > 0, a \neq 1$	$a^A = a^B$
Logarithmieren mit reeller Basis $a > 1$ sowie $A, B > 0$	$\log_a A = \log_b B$

Tabelle 1.4: *Umformungen von nichtlinearen Gleichungen*

Beispiel 1.14

Für
$$\sqrt{x-2}+4=x$$
erhält man nach der Subtraktion von 4 schrittweise:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= x-4 && \text{(quadrieren)}\\
x-2 &= x^2-8x+16 && \text{(Addition von } -x+2)\\
0 &= x^2-9x+18 && \text{(Lösen der quadratischen Gleichung)}
\end{aligned}$$

$$x=\tfrac{1}{2}\left(9\pm\sqrt{81-72}\right)=\tfrac{1}{2}(9\pm 3)$$
$$x_1=6, \quad x_2=3$$

Die Rechenprobe zeigt für $x_1=6$
$$\sqrt{6-2}+4=2+4=6$$
beziehungsweise für $x_2=3$
$$\sqrt{3-2}+4=1+4\neq 3\,.$$

Wir erhalten also nur eine Lösung $x_1=6$.

Beispiel 1.15

Für
$$\sqrt[3]{x^2-1}=1$$
erhält man durch Potenzieren mit 3:

$$\begin{aligned}
x^2-1 &= 1^3=1 && \text{(Addition von 1)}\\
x^2 &= 2\\
x_1 &= \sqrt{2}, \quad x_2=-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Die Rechenprobe
$$\sqrt[3]{\left(\pm\sqrt{2}\right)^2-1}=\sqrt[3]{2-1}=1$$
bestätigt beide erhaltene Lösungen
$$x_1=\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2=-\sqrt{2}\,.$$

Beispiel 1.16

Für die Exponentialgleichung
$$2\cdot 3^{2x-1}=7\cdot 3^{x+1}$$
erhält man nach Logarithmieren schrittweise:

$$\begin{aligned}
&\log_3 2+(2x-1)\log_3 3\\
&=\log_3 7+(x+1)\log_3 3 && (\log_3 3=1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2x-1)\cdot 1-(x+1)\cdot 1\\
&=\log_3 7-\log_3 2 && \text{(Rechenregeln für Logarithmen)}
\end{aligned}$$

$$x-2=\frac{\ln 7}{\ln 3}-\frac{\ln 2}{\ln 3}=\frac{\ln 7-\ln 2}{\ln 3}=\frac{\ln 7/2}{\ln 3}$$
$$x=\frac{\ln 7/2}{\ln 3}+2\approx 3.14\ldots$$

Die Rechenprobe $2\cdot 3^{5.28}\approx 661\approx 7\cdot 3^{4.14}$ bestätigt die Lösung.

Beispiel 1.17

Die Gleichung
$$\ln(2x+1)^2=2$$
ergibt nach Potenzieren mit der Basis e:

$$\begin{aligned}
(2x+1)^2 &= \mathrm{e}^2 && \text{(Quadratwurzel)}\\
2x+1 &= \pm\mathrm{e}\\
x_1 &= \tfrac{\mathrm{e}-1}{2}, \quad x_2=\tfrac{-\mathrm{e}-1}{2}
\end{aligned}$$

Die Rechenprobe liefert
$$\ln(\pm\mathrm{e}-1+1)^2=\ln(\pm\mathrm{e})^2=2$$
und bestätigt damit beide Lösungen x_1, x_2 für die obige Gleichung.

Anhand dieser Beispiele fassen wir das Vorgehen bei derartigen Gleichungen zusammen:

1. Eliminieren der Potenzen durch Radizieren oder Logarithmieren (Beispiel 1.16, 1.17) beziehungsweise Eliminieren von Wurzeln oder Logarithmen durch Potenzieren (Beispiel 1.14, 1.15)
2. Lösen der Gleichung, falls möglich
3. Überprüfen der Lösung durch eine Rechenprobe

1.6 Ungleichungen mit einer Variablen

Neben dem Gleichheitszeichen = existieren für den Vergleich von Zahlen oder Termen weitere Symbole. Es bedeuten:

$$\begin{aligned} a \neq b: &\quad a \text{ ist ungleich } b \\ a \underset{(=)}{<} b: &\quad a \text{ ist kleiner (oder gleich) } b \\ a \underset{(=)}{>} b: &\quad a \text{ ist größer (oder gleich) } b \end{aligned}$$

Zur Umformung einer Ungleichung $A \leq B$ mit den Termen A, B nutzt man unter anderem die Regeln in Tabelle 1.5.

Rechenregel	Ungleichung $A \leq B$
Vertauschen der Seiten	$B \geq A$
Addition/Subtraktion eines Terms C	$A \pm C \leq B \pm C$
Multiplikation/Division eines Terms $C > 0$	$A \cdot B \leq B \cdot C$ $A/C \leq B/C$
Multiplikation/Division eines Terms $C < 0$	$A \cdot B \geq B \cdot C$ $A/C \geq B/C$

Tabelle 1.5: *Umformung von Ungleichungn*

Entsprechend zu (1.26) besitzt die lineare Ungleichung

$$ax + b \leq 0 \tag{1.30}$$

mit x als Variable, $a \neq 0$, b als gegebene reelle Konstanten die Lösung

$$x \leq -\frac{b}{a} \text{ für } a > 0 \quad \text{bzw.} \quad x \geq -\frac{b}{a} \text{ für } a < 0\,.$$

Wir betrachten nun Ausschnitte reeller Zahlen zwischen Werten a und b mit $b > a$. Dann verwendet man die Schreibweise

- $[a, b]$ für ein *abgeschlossenes Intervall*, falls $a \leq x \leq b$,
- (a, b) für ein *offenes Intervall*, falls $a < x < b$,
- $(a, b]$ für ein *linksseitig offenes* und *rechtsseitig abgeschlossenes* Intervall, falls $a < x \leq b$,
- $[a, b)$ für ein *linksseitig abgeschlossenes* und *rechtsseitig offenes* Intervall, falls $a \leq x < b$.

Entsprechend dazu enthalten die Intervalle

$(-\infty, b]$ alle reellen Zahlen mit $x \leq b$,
(a, ∞) alle reellen Zahlen mit $x > a$,
$(-\infty, \infty)$ alle reellen Zahlen, also $-\infty < x < \infty$.

Für $a = b$ besteht das Intervall $[a, b] = [a, a]$ aus einem Wert $x = a$, für $a > b$ enthält das Intervall $[a, b]$ keine Werte.

Beispiel 1.18

Zur Lösung der Ungleichung

$$\frac{x+1}{x-2} > \frac{1}{2}$$

mit $x \neq 2$ unterscheiden wir zwei Fälle:

I) $x > 2:$
$$\begin{aligned} 2(x+1) &> x-2 \\ 2x+2 &> x-2 \\ x &> -4 \end{aligned}$$
Aus $x > 2$ und $x > -4$ ergibt sich $x > 2$.

II) $x < 2:$
$$\begin{aligned} 2(x+1) &< x-2 \\ 2x+2 &< x-2 \\ x &< -4 \end{aligned}$$
Aus $x < 2$ und $x < -4$ ergibt sich $x < -4$.

Gesamtlösung: x liegt entweder im Intervall $(-\infty, -4)$ oder in $(2, \infty)$

Arbeitet man nur mit der Addition bzw. Subtraktion, kann man zur Lösung von Bruchungleichungen in manchen Fällen auf Fallunterscheidungen verzichten.

Beispiel 1.19

Für die Ungleichung

$$\frac{2}{x-1} \leq \frac{1}{x+1}$$

mit $x \neq \pm 1$ ergeben sich folgende gleichwertige Darstellungen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} &\leq 0 \\ \frac{2 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\ \frac{2x+2-x+1}{(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\ \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Damit sieht man unmittelbar durch Betrachtung der Vorzeichen der einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner, dass x aus dem Intervall $(-\infty, -3)$ oder aus $(-1, 1)$ die Ungleichung lösen.

Der *Betrag* oder *Absolutbetrag* einer reellen Zahl a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

ist auf der Zahlengeraden als Abstand vom Nullpunkt interpretierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a| &= |-a| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \\ |a-b| &\leq |a| - |b| \\ |ab| &= |a| \cdot |b| \\ |a:b| &= |a| : |b| \end{aligned} \tag{1.32}$$

Beispiel 1.20

Gesucht sind alle x, die die Betragsungleichung

$$|x-2| \leq |x| + 1$$

erfüllen. Es ergeben sich 3 Fälle:

I) $x \geq 2$:

$$x - 2 \leq x + 1 \text{ bzw. } 0 \leq 3\,,$$

also für alle $x \geq 2$ lösbar

II) $0 \leq x < 2$:

$$2 - x \leq x + 1 \text{ bzw. } 1 \leq 2x\,,$$

also $\frac{1}{2} \leq x$

III) $x < 0$:

$$2 - x \leq -x + 1 \text{ bzw. } 2 \leq 1\,,$$

also unlösbar

Wir erhalten im

Fall I) die Lösung $x \geq 2$ und im

Fall II) die Lösung $\frac{1}{2} \leq x < 2$.

Damit ist die Ungleichung lösbar für alle x mit

$$x \geq \frac{1}{2}\,.$$

Beispiel 1.21

Auch die Lösung der Gleichung

$$\frac{|x+1|}{|x|} = \frac{1}{x} + 1 \quad (x \neq 0)$$

erhält man durch Fallunterscheidung:

I) $x > 0$:

$$x + 1 = 1 + x$$

gilt für alle reellen x

II) $-1 \leq x < 0$:

$$x + 1 = -1 - x \text{ bzw. } x = -1$$

III) $x < -1$:

$$-(x+1) = -1 - x$$

gilt für alle reellen x

Wir erhalten im

Fall I) die Lösung $x > 0$, im

Fall II) die Lösung $x = -1$ und im

Fall III) die Lösung $x \leq -1$.

Damit ist die Ungleichung lösbar für alle x aus dem Intervall $(-\infty, -1)$ oder $(0, \infty)$.

Wir betrachten nun quadratische Ungleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\leq 0) \tag{1.33}$$

mit x als Variable, $a \neq 0$, b, c als gegebene reelle Konstanten. Nach (1.27) besitzt die zugehörige Gleichung

I) zwei verschiedene reelle Lösungen x_1, x_2 mit $x_1 > x_2$ für

$$b^2 - 4ac > 0\,,$$

II) eine „zweifache" reelle Lösung $x_1 = x_2$ für

$$b^2 - 4ac = 0\,,$$

III) keine reelle Lösung für

$$b^2 - 4ac < 0\,.$$

Für die gegebene Ungleichung orientiert sich die Lösung am Koeffizienten der höchsten x-Potenz, also am Wert a. Dann gilt für $a > 0$ ($a < 0$) in Abhängigkeit der Lösungen für die zugehörige Gleichung

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\leq 0) \\ & \text{für } \ x \geq x_1 \text{ und für } x \leq x_2 \\ & ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (\geq 0) \\ & \text{für } \ x_2 \leq x \leq x_1\,, \\ \text{II)} & ax^2 + bx + c \geq 0 \ (\leq 0) \\ & \text{für alle reellen } x\,, \\ \text{III)} & ax^2 + bx + c > 0 \ (< 0) \\ & \text{für alle reellen } x\,. \end{array} \tag{1.34}$$

Beispiel 1.22

a) Für $3x^2 + 4x + 2 = 0$ existiert keine reelle Lösung (Beispiel 1.13a). Damit gilt
$$3x^2 + 4x + 2 > 0$$
für alle reellen x (Fall III).

b) Für $9x^2 + 6x + 1 = 0$ existiert eine zweifache reelle Lösung $x = -\frac{1}{3}$ (Beispiel 1.13b). Damit gilt $9x^2 + 6x + 1 > 0$ für alle $x \neq -\frac{1}{3}$ (Fall II).

c) Für $-x^2 + 1 = -(x+1)(x-1) = 0$ existieren zwei reelle Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ mit $x_1 > x_2$. Damit gilt nach Fall I)
$$-x^2 + 1 \leq 0 \qquad \text{für } x \geq 1 \text{ und } x \leq -1$$
$$-x^2 + 1 \geq 0 \qquad \text{für } -1 \leq x \leq 1$$

Abschließend behandeln wir exemplarisch einige Wurzel- und Exponentialungleichungen.

Beispiel 1.23

Für $\sqrt{x-2} + 4 = x$ erhält man die Lösung
$$x = 6\,. \qquad \text{(Beispiel 1.14)}$$
Für $x \geq 6$ wächst die linke Seite der Gleichung schwächer als die rechte Seite. Damit gilt mit
$$\sqrt{x-2} \geq 0 \qquad \text{bzw. } x \geq 2$$
$$\sqrt{x-2} + 4 \leq x \qquad \text{für } x \geq 6 \text{ bzw.}$$
$$\sqrt{x-2} + 4 \geq x \qquad \text{für } 2 \leq x \leq 6$$
Für $x<2$ gibt es keine Lösung der Ungleichungen
$$\sqrt{x-2} + 4 \leq x \;\text{ bzw. }\; \sqrt{x-2} + \geq x\,.$$

Beispiel 1.24

Für $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 1$ erhält man nach Beispiel 1.15 die Lösungen
$$x = \pm\sqrt{2}\,.$$
Bei konstanter rechter Seite wächst die linke Seite der Gleichung mit wachsendem x^2. Damit gilt
$$\sqrt[3]{x^2 - 1} \geq 1 \qquad \text{für } x \geq \sqrt{2}$$
$$\text{und für } x \leq -\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 1 \qquad \text{für } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$
Somit gilt für alle reellen $x \neq \pm\sqrt{2}$ entweder
$$\sqrt[3]{x^2 - 1} > 1 \;\text{ oder }\; \sqrt[3]{x^2 - 1} < 1\,.$$

Beispiel 1.25

Für $1 + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x+1}$ erhält man:
$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^1 \\ 1 &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^x \\ 1 &= \mathrm{e}^x(\mathrm{e} - 1) \\ (\mathrm{e}-1)^{-1} &= \mathrm{e}^x \\ \ln(\mathrm{e}-1)^{-1} &= x \\ -\ln(\mathrm{e}-1) &= x < 0 \end{aligned}$$

Für $1 + \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{x+1}$ erhält man nach geeigneten Umformungen $-\ln(\mathrm{e}-1) \leq x$.

Entsprechend folgt aus $1 + \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{x+1}$
$$-\ln(\mathrm{e}-1) \geq x\,.$$
Damit gilt für die reellen $x \neq -\ln(\mathrm{e}-1)$ entweder
$$1 + \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{x+1} \quad \text{oder} \quad 1 + \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{x+1}\,.$$
Für $1 + \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{x+1}$ ist x stets negativ.

Relevante Literatur

Arrenberg, Jutta u. a. (2013). *Vorkurs in Wirtschaftsmathematik*. 4. Aufl. Oldenbourg, Kap. 2, 5–10

Bosch, Karl (2010). *Brückenkurs Mathematik: Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben*. 14. Aufl. De Gruyter Oldenbourg, Kap. 2–14, 16, 17

Cramer, Erhard und Nešlehová, Johanna (2015). *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen*. 6. Aufl. Springer Spektrum, Kap. 1, 3, 4, 6–8

Kemnitz, Arnfried (2014). *Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge*. 11. Aufl. Springer Spektrum, Kap. 1, 2, 9

Opitz, Otto u. a. (2014). *Mathematik: Übungsbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften*. 8. Aufl. De Gruyter Oldenbourg, Kap. 1

Purkert, Walter (2014). *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. 8. Aufl. Springer Gabler, Kap. 1, 2

Schäfer, Wolfgang u. a. (2006). *Mathematik-Vorkurs: Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*. 6. Aufl. Vieweg+Teubner, Kap. 1-3, 6, 10, 12, 14

Schwarze, Jochen (2011a). *Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. 8. Aufl. NWB, Kap. 4–10

Tietze, Jürgen (2013). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik: Das praxisnahe Lehrbuch – inklusive Brückenkurs für Einsteiger*. 17. Aufl. Springer Spektrum, Kap. 1.2

2 Grundlagen der Geometrie

In diesem Kapitel stehen die Grundlagen der *Geometrie* im Mittelpunkt. Dabei geht es um ebene sowie räumliche Geometrie, Trigonometrie und einige Aspekte der analytischen Geometrie der Ebene.

2.1 Ebene Geometrie

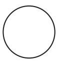
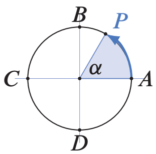
Ausgangspunkt sind die Begriffe

Punkt: • A

Strecke mit Begrenzungspunkten: 

Gerade:

Linie: 

Kreislinie:  *Winkel:* 

Ein Punkt P, der in A beginnend sich auf der Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn bewegt, beschreibt einen Winkel α. Wir vereinbaren das *Gradmaß*

$$\alpha = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } P = A \\ 90^\circ & \text{für } P = B \\ 180^\circ & \text{für } P = C \\ 270^\circ & \text{für } P = D \end{cases}$$

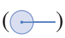
Für einen vollen Umlauf von P auf der Kreislinie gilt $\alpha = 360^\circ$. Ferner spricht man von einem

spitzen Winkel für α aus $(0, 90^\circ)$ ()

rechten Winkel für $\alpha = 90^\circ$ ()

stumpfen Winkel für α aus $(90^\circ, 180^\circ)$ ()

gestreckten Winkel für $\alpha = 180^\circ$ ()

vollen Winkel für $\alpha = 360^\circ$ ()

Zwei unterschiedliche Geraden der Ebene verlaufen entweder *parallel* oder sie besitzen einen *Schnittpunkt* wie in Abbildung 2.1 ersichtlich.

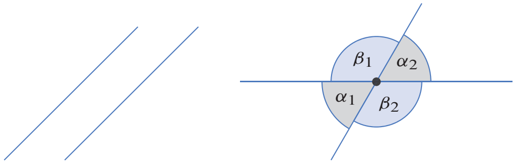


Abbildung 2.1: *Zwei parallele Geraden (links) und zwei Geraden mit Schnittpunkt*

Für die dabei auftretenden Winkel im Schnittpunkt von Geraden gilt

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \; \beta_1 = \beta_2 .$$

Zwei Geraden heißen *senkrecht zueinander* oder *orthogonal*, falls $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$.

Schneiden sich drei Geraden einer Ebene paarweise, so erhalten wir ein *Dreieck* (Abbildung 2.2) mit den *Ecken* oder *Eckpunkten* A, B, C, den *Seiten* a, b, c und den Winkeln α, β, γ.

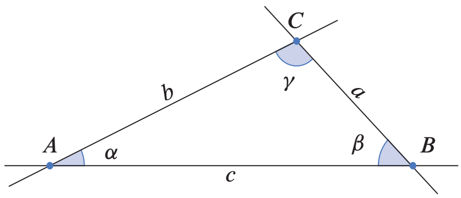


Abbildung 2.2: *Allgemeines Dreieck*

Dabei gilt stets:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ ,$$
$$a < b + c , \; b < a + c , \; c < a + b .$$

Je nach dem größten Winkel unterscheidet man spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. In einem *gleichschenkligen* Dreieck sind zwei Seiten gleich lang, in einem *gleichseitigen* Dreieck alle drei Seiten.

DOI: 10.1515/9783110475333-002

Für ein *rechtwinkliges Dreieck* z. B. mit $\gamma = 90°$ in Abbildung 2.2 gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2.1}$$

Während der *Umfang* eines beliebigen Dreiecks mit $u = a + b + c$ einfach zu berechnen ist, benötigen wir für die *Fläche* den Begriff der *Höhe*, d. h. einer Strecke, die von einer Ecke ausgehend orthogonal zur gegenüber liegenden Seite bzw. deren Verlängerung ist (Abbildung 2.3).

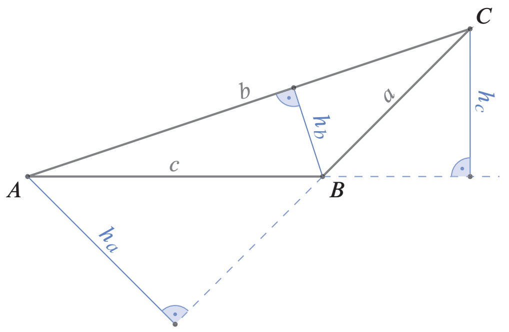


Abbildung 2.3: *Höhen in einem stumpfwinkligen Dreieck*

Dann gilt für die *Fläche*

$$F = \tfrac{1}{2} a h_a = \tfrac{1}{2} b h_b = \tfrac{1}{2} c h_c \,. \tag{2.2}$$

Eine von vier Strecken begrenzte Fläche der Ebene heißt *Viereck* (siehe Abbildung 2.4) mit den Ecken A, B, C, D , den Seiten a, b, c, d und den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

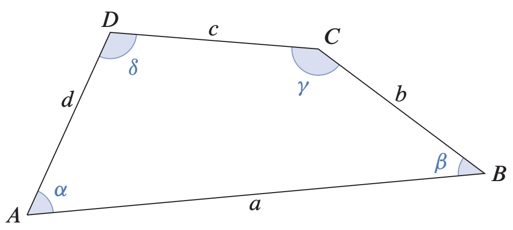


Abbildung 2.4: *Allgemeines Viereck*

Da sich ein Viereck stets in zwei Dreiecke zerlegen lässt, gilt für die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Der Umfang ist $a + b + c + d$.

Ein Viereck mit zwei parallelen Seiten heißt *Trapez* mit der Fläche

$$F = \frac{1}{2}(a + c)\,h \,.$$

Dabei sind a, c parallel und die Höhe h entspricht dem Abstand von a und c.

Ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten heißt *Parallelogramm* mit der Fläche

$$F = a h_a \,.$$

Dabei ist a eine beliebige Seite und die Höhe h_a der Abstand zwischen a und der dazu parallelen Seite.

Ein Viereck mit den Seiten $a = c$ und $b = d$ sowie $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$ heißt *Rechteck* mit der Fläche

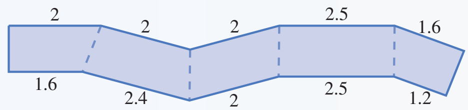
$$F = ab \,.$$

Dabei sind die Seiten a, b orthogonal. Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt *Quadrat* mit der Fläche $F = a^2$.

Ein von $n \geq 3$ Strecken begrenzte Fläche der Ebene heißt *n-Eck* mit einer Winkelsumme von $(n - 2) \cdot 180°$. Sind alle Begrenzungsstrecken gleich lang und alle Winkel gleich groß, so spricht man von einem *regelmäßigen* n-Eck.

Beispiel 2.1

Der dargestellte Weg (Maße in Metern) von einem Meter Breite soll mit rechteckigen Steinen, die 20 cm lang und 8 cm breit sind, gepflastert werden.



Für Verschnitt, Abfall etc. ist ein Zuschlag von 5 % zu rechnen. Gesucht ist die Anzahl der benötigten Steine.

Für die Wegfläche gilt (von links gerechnet):

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(2 + 1.6) \cdot 1}_{\text{(Trapez)}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(2 + 2.4) \cdot 1}_{\text{(Trapez)}}$$

$$+ \underbrace{2 \cdot 1}_{\text{(Parallelogramm)}} + \underbrace{2.5 \cdot 1}_{\text{(Rechteck)}}$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2}(1.6 + 1.2) \cdot 1}_{\text{(Trapez)}}$$

$$= 1.8 + 2.2 + 2 + 2.5 + 1.4 = 9.9\,(\mathrm{m}^2)$$

Die Anzahl der Steine mit Zuschlag beträgt

$$\frac{9.9}{0.08 \cdot 0.2} \cdot 1.05 = 649.6875$$

Damit werden aufgerundet 650 Steine benötigt.

Beispiel 2.2

Ein rechteckiges Haus ist 12 Meter lang, 8 Meter breit, 7 Meter hoch (ohne Dach). Für eine Tür entfallen an den Außenwänden 2m^2, für 7 Fenster jeweils 2.5m^2 und für weitere 5 Fenster pro Fenster 1.5m^2. Gesucht ist die kg-Menge an Farbe für einen Fassadenanstrich, wenn 1kg Farbe für 8m^2 reicht. Für die Fassadenfläche errechnen wir

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot 12 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \cdot 7 - 2 - 7 \cdot 2.5 - 5 \cdot 1.5 \\
&= 280 - 27 = 253\ (\text{m}^2)\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die benötigte Farbmenge $253 : 8 = 31.625$ (kg).

Die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben, heißt *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r. Mit $\pi \approx 3.14159$ beträgt der Kreisumfang $2r\pi$ und die Fläche $r^2\pi$ für beliebiges $r > 0$.

Eine Gerade, die den Kreis schneidet, heißt *Sekante*, die entsprechende durch den Kreis begrenzte Strecke *Sehne*. Eine Sehne durch den Mittelpunkt entspricht dem *Durchmesser* $2r$ des Kreises. Eine Gerade, die den Kreis in einem Punkt berührt, heißt *Tangente* (Abbildung 2.5).

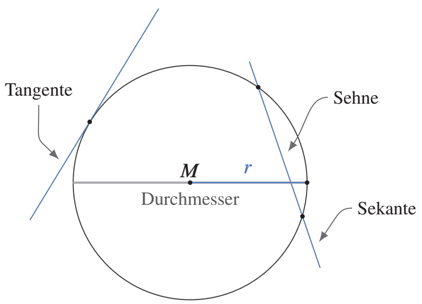


Abbildung 2.5: *Sehne, Sekante, Tangente eines Kreises*

Ferner erhält man sogenannte Kreissektoren und Kreissegmente (Abbildung 2.6) in Abhängigkeit eines Mittelpunktswinkels α. Offenbar besteht zwischen dem Bogen b und dem Winkel α der Zusammenhang

$$\frac{b}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360} \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2r\pi \tag{2.3}$$

Für den Flächeninhalt F des Kreissektors gilt entsprechend

$$\frac{F}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{\alpha}{360} \cdot r^2\pi = \frac{br}{2}\,. \tag{2.4}$$

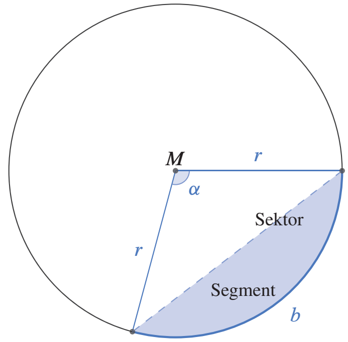


Abbildung 2.6: *Kreissektor und Kreissegment zum Mittelpunktswinkel* α

Die Fläche eines Kreissegments ergibt sich schließlich aus der Differenz der Fläche eines Kreissektors und eines gleichschenkligen Dreiecks.

Beispiel 2.3

Wir nehmen an, die Erde sei eine ideale Kugel mit dem Radius r. Um die Erdkugel werde am Äquator ein Kabel gelegt, das 5 Meter länger als der Erdumfang ist. Für den Fall, dass das Kabel überall den gleichen Abstand von der Erdoberfläche hat, ist dieser Abstand zu berechnen.

Der Erdumfang sei $2r\pi$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
&2r\pi + 5 = 2(r + x)\pi \\
&\text{bzw.} \quad 5 = 2x\pi \qquad \text{bzw.} \quad x \approx 0.8\,\text{m}
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis $x \approx 0.8$ m ist überraschenderweise unabhängig vom wahren Radius der Erde.

Beispiel 2.4

In einem Kreis mit dem Radius r ist die Fläche F des Kreissektors S für $\alpha = 90°$ zu berechnen. Man bestimme ferner einen Kreis K, dessen Fläche mit F identisch ist. Das Verhältnis der Umfänge von K und S ist anzugeben.

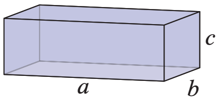
$$F = \frac{90\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2}{4} = x^2\pi \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{r}{2}$$

Damit ist $x = \frac{r}{2}$ der Radius von K. Das gesuchte Umfangverhältnis beträgt

$$\frac{2 \cdot \frac{r}{2}\pi}{\frac{90 \cdot 2\pi r}{360} + 2r} = \frac{r\pi}{\frac{r\pi}{2} + 2r} = \frac{2\pi}{\pi + 4}\,.$$

2.2 Räumliche Geometrie

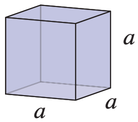
In diesem Abschnitt stellen wir in den Abbildungen 2.7 bis 2.13 wichtige Gebilde im dreidimensionalen Raum graphisch dar und geben dazu einige Kenngrößen an.



Volumen
$V = a \cdot b \cdot c$

Oberfläche
$O = 2ab + 2ac + 2bc$

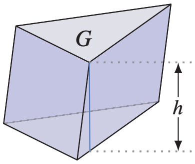
Abbildung 2.7: *Quader mit Seitenlängen a, b, c*



Volumen
$V = a^3$

Oberfläche
$O = 6a^2$

Abbildung 2.8: *Würfel mit Seitenlänge a*

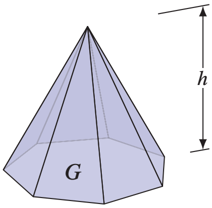


Volumen
$V = Gh$

Mantelfläche
$M = Uh$

Oberfläche
$O = 2G + Uh$

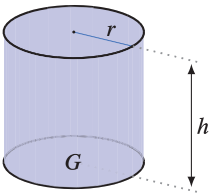
Abbildung 2.9: *Prisma mit dreieckiger Grundfläche G und U als Umfang des Grunddreiecks*



Volumen
$V = \frac{1}{3}Gh$

Oberfläche
$O = G + 7D$

Abbildung 2.10: *Pyramide mit siebeneckiger Grundfläche G und sieben Seitendreiecken mit jeweils der Fläche D*

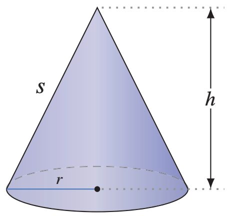


Volumen
$V = Gh = r^2\pi \cdot h$

Mantelfläche
$M = 2r\pi \cdot h$

Oberfläche
$O = 2r\pi h + 2r^2\pi$

Abbildung 2.11: *Kreiszylinder mit Radius r*

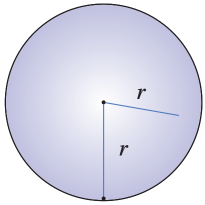


Volumen
$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot h$

Mantelfläche
$M = \pi r s$
(mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$)

Oberfläche
$O = \pi r s + r^2\pi$

Abbildung 2.12: *Kreiskegel mit Radius r*



Volumen
$V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Oberfläche
$O = 4r^2\pi$

Abbildung 2.13: *Kugel mit Radius r*

Beispiel 2.5

1000 m Kupferdraht (Dichte 8.8 g/cm³) wiegen 5 kg. Man berechne den Durchmesser.

$$\begin{aligned} 5000\,\mathrm{g} &= 8.8\,\mathrm{g/cm^3} \cdot \text{ Volumen Kreiszylinder} \\ &= 8.8\,\mathrm{g/cm^3} \cdot r^2\pi \cdot 100\,000\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

bzw.

$$r^2 = \frac{5}{100 \cdot 8.8\pi}\mathrm{cm}^2 = 0.0018\,\mathrm{cm}^2$$

bzw.

$$2r = 0.085\,\mathrm{cm} = 0.85\,\mathrm{mm}$$

Der Kupferdraht hat einen Durchmesser von 0.85 mm.

Beispiel 2.6

Aus einem Würfel mit der Seitenlänge $a = 10\,\mathrm{cm}$ wird eine Kugel mit dem Radius $r = 5\,\mathrm{cm}$ herausgeschnitten. Dann besitzt der Abfall das Volumen

$$\begin{aligned} V &= 1000\,\mathrm{cm}^3 - \tfrac{4}{3} \cdot 125\pi\,\mathrm{cm}^3 \\ &= 476.4\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

Abschließend behandeln wir wichtige Schnitte durch einen Kegel und erhalten daraus die bekannten Kegelschnitte in Abbildung 2.14.

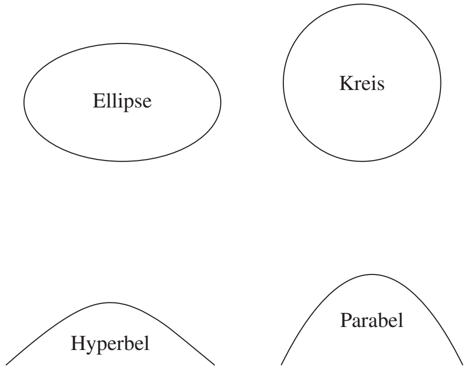


Abbildung 2.14: *Kegelschnitte*

Die Verbindungsstrecke einer Kegelspitze mit dem Kreismittelpunkt ist die *Rotationsachse* des Kegels. Ein gerader Schnitt durch den Kegel längs der Rotationsachse ergibt ein Dreieck (Abbildung 2.15).

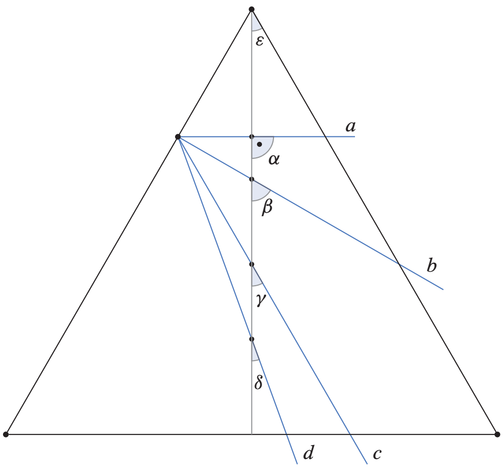


Abbildung 2.15: *Kegelschnitte in Abhängigkeit des Schnittwinkels zur Rotationsachse*

Damit ergeben sich die in Abbildung 2.14 skizzierten Gebilde in Abhängigkeit der Schnittwinkel $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ und zwar (Abbildung 2.15)

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha &= 90^\circ \text{ (Schnitt } a\text{) ein Kreis,} \\ \text{für } \varepsilon < \beta &< 90^\circ \text{ (Schnitt } b\text{) eine Ellipse,} \\ \text{für } \gamma &= \varepsilon \text{ (Schnitt } c\text{) eine Parabel,} \\ \text{für } 0 < \delta &< \varepsilon \text{ (Schnitt } d\text{) eine Hyperbel.} \end{aligned}$$

2.3 Trigonometrie

Wir gehen von einem Kreis mit Radius $r > 0$ aus und variieren den in Abbildung 2.16 angegebenen Winkel α zwischen 0° und 360°. Entsprechend bewegt sich der Kreisbogen zwischen 0 und $2r\pi$ (Kapitel 2.1). Man bezeichnet α als *Gradmaß*, x als *Bogenmaß* des Winkels.

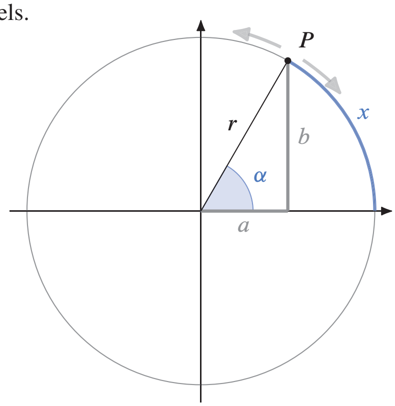


Abbildung 2.16: *Trigonometrie am Kreis*

Für $r = 1$ erhält man den Zusammenhang entsprechender Werte aus Tabelle 2.1:

Gradmaß für α	0	30	45	60	90
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß für α	135	180	225	270	360
Bogenmaß x	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabelle 2.1: *Grad- und Bogenmaße von Winkeln*

Ausgehend von Abbildung 2.16 bezeichnen wir mit den Quotienten

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{b}{r} && && \text{den } \textit{Sinus von } x, \\ \cos x &= \frac{a}{r} && && \text{den } \textit{Kosinus von } x, \\ \tan x &= \frac{b}{a} && (a \neq 0) && \text{den } \textit{Tangens von } x, \\ \cot x &= \frac{a}{b} && (b \neq 0) && \text{den } \textit{Kotangens von } x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Analog bezeichnet man für den Winkel im Gradmaß $\sin\alpha$ als den Sinus von α, entsprechend $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Offenbar variieren die Sinus- und Kosinuswerte im Intervall $[-1,1]$, die Tangens- und Kotangenswerte in $(-\infty,\infty)$. Ferner gelten folgende Beziehungen, wobei jeweils der Winkel im Bogenmaß (x) durch einen Winkel im Gradmaß (α) ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\cos^2 x &= \frac{b^2}{r^2}+\frac{a^2}{r^2}\\ &= \frac{b^2+a^2}{r^2}=1\\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x},\\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Für $0\le\alpha\le 90°$ bzw. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ lassen sich mit Hilfe von Abbildung 2.16 und (2.5) weiter folgende Identitäten ableiten:

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right),\\ \cos x &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\\ \tan x &= \cot\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right),\\ \cot x &= \tan\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\pi-x),\\ \cos x &= \cos(2\pi-x)\\ \tan x &= \tan(\pi+x),\\ \cot x &= \cot(\pi+x)\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}-\sin x &= \sin(\pi+x)=\sin(2\pi-x)\\ -\cos x &= \cos(\pi-x)=\cos(\pi+x)\\ -\tan x &= \tan(\pi-x)=\tan(2\pi-x)\\ -\cot x &= \cot(\pi-x)=\cos(2\pi-x)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Ferner gilt für ganzzahlige Werte $k=\pm1,\pm2,\ldots$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x+2k\pi),\\ \cos x &= \cos(x+2k\pi),\\ \tan x &= \tan(x+k\pi),\\ \cot x &= \cot(x+k\pi)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Wir können uns damit bei der Berechnung von Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangenswerten auf Winkel im Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$ beschränken. Wir fassen einige wesentliche Werte in Tabelle 2.2 zusammen.

Gradmaß α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Tabelle 2.2: *Spezielle Werte von* $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ *mit* $0°\le\alpha\le 90°$ *bzw.* $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

Für alle Winkel zwischen 0° und 90° sind die in (2.5) angegebenen Quotienten positiv. Offenbar wechseln die Vorzeichen der trigonometrischen Ausdrücke zwischen 90° und 360°. Mit Hilfe von Abb. 2.16 bzw. (2.8), (2.9) erhält man hierzu Ergebnisse, die in Tabelle 2.3 zusammengestellt sind. Das entsprechende Feld bleibt in dieser Tabelle für den Fall frei, dass der Nenner eines Quotienten 0 wird, der Quotient also nicht definiert ist. Ferner ergeben sich für Winkel der Form $\alpha'=\alpha+360°$ die selben Winkel wie für α (2.10).

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$0°$	0	1	0	
$(0,90°)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$90°$	1	0		0
$(90°,180°)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$180°$	0	-1	0	
$(180°,270°)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$270°$	-1	0		0
$(270°,360°)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$360°$	0	1	0	
$(360°,450°)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$450°$	1	0		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 2.3: *Vorzeichen und Werte von* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$

Ferner sind folgende Formeln, bekannt als sogenannte *Additionstheoreme* nützlich:

$$\begin{aligned}\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\ \cos(x\pm y) &= \cos x\cos y\mp\sin x\sin y\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2} \qquad (2.12)$$

Abschließend zitieren wir zwei wichtige Sätze. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ gilt

der *Sinussatz*: $$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \qquad (2.13)$$

der *Kosinussatz*: $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Beispiel 2.7

a) $$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) \\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ\cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= -\cos 75^\circ \\ &= -\sin 15^\circ \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\sin 15^\circ - \sin 75^\circ &= 2\cos 45^\circ \sin(-30^\circ) \\ &= -2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

f) Für $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $c = \sqrt{2}$ gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = 1\,,$$

also $a = b$ und

$$c^2 - a^2 - b^2 = c^2 - 2a^2 = -2ab\cos\gamma = 0\,.$$

Damit gilt $a = 1$. Wir erhalten ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten

$$a = b = 1\,,\quad c = \sqrt{2}\,,\quad c^2 = a^2 + b^2.$$

2.4 Analytische Geometrie der Ebene

Ausgangspunkt ist häufig ein *kartesisches Koordinatensystem* mit zwei senkrecht zueinander stehenden Achsen, der *Abszissenachse* x als horizontaler Zahlengeraden und der *Ordinatenachse* y als vertikaler Zahlengeraden. Der Schnittpunkt der Achsen heißt *Nullpunkt* oder *Ursprung*. Für jeden Punkt der Ebene erhält man durch senkrechte Projektion auf die beiden Achsen einen Abzissen- oder x-Wert und einen Ordinaten- oder y-Wert. Man spricht von den *Koordinaten* des Punktes.

Allgemein kann man auf diese Weise jedem Punkt der Ebene ein Zahlenpaar (x, y) und umgekehrt jedem Zahlenpaar einen Punkt der Ebene zuordnen. Die Punkte $(x, 0)$ liegen auf der Abszissenachse, die Punkte $(0, y)$ auf der Ordinatenachse, der Punkt $(0, 0)$ entspricht dem Nullpunkt.

Beispiel 2.8

In Abbildung 2.17 erhält man beispielsweise die Zuordnungen:

$(x, y) = (2, 1.5)$ für Punkt A
$(x, y) = (-2, 1)$ für Punkt B
$(x, y) = (0, -0.5)$ für Punkt C

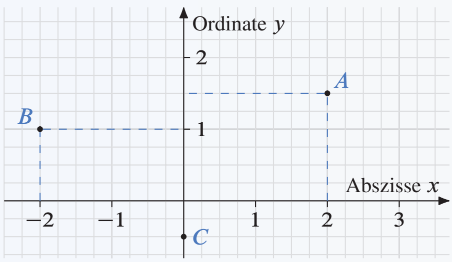


Abbildung 2.17: *Punkte im kartesischen Koordinatensystem*

Eine *Strecke* $\overline{AB}$ ist durch die direkte Verbindung zweier Punkte A, B mit den Koordinaten (a_1, a_2), (b_1, b_2) bestimmt (Abbildung 2.18).

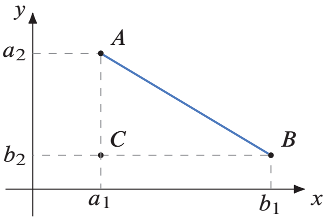


Abbildung 2.18: *Strecke als Verbindung zweier Punkte*

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (2.1) erhält man für die *Länge* d der Strecke $\overline{AB}$

$$d = \sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (a_1 - b_1)^2}\,. \qquad (2.15)$$

Ferner ist die *Steigung* s der Strecke $\overline{AB}$ erklärt durch den Quotienten

$$s = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\,. \qquad (2.16)$$

Jede Strecke ist Teil einer *Geraden*, diese erhält man durch Verlängerung der Strecke nach beiden Seiten. Betrachtet man die Gleichung $ax + by + c = 0$, in der a und b nicht gleichzeitig 0 sind, so charakterisieren alle Lösungen (x, y) der Gleichung eine Gerade im x-y-Koordinatensystem, und jeder Geraden der Ebene kann umgekehrt eine lineare Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ zugeordnet werden.

Beispiel 2.9

Den linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rccccccc} \text{I)} & x & - & y & + & 1 & = & 0 \\ \text{II)} & x & - & & & 2 & = & 0 \\ \text{III)} & x & + & 2y & - & 4 & = & 0 \end{array}$$

entsprechen die Geraden I, II, III in Abbildung 2.19.

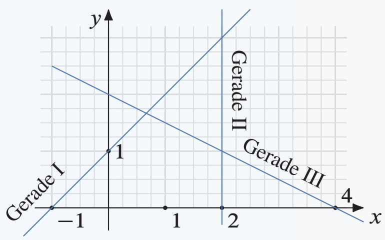


Abbildung 2.19: *Geraden zu I), II), III)*

Eine Gerade der Ebene ist durch zwei verschiedene Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ eindeutig bestimmt. Man erhält die *Zweipunkteform* der Geraden durch

$$\begin{aligned} \frac{y - a_2}{x - a_1} &= \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = s \qquad && \text{falls } a_1 \neq b_1\,, \\ x &= a_1 && \text{falls } a_1 = b_1, \\ & && \quad a_2 \neq b_2\,. \qquad (2.17) \end{aligned}$$

Daraus folgt für $a_1 \neq b_1$

$$\begin{aligned} &(y - a_2) - s(x - a_1) \\ &= -sx + y + sa_1 - a_2 = 0\,, \end{aligned}$$

also die ursprüngliche Form $ax + by + c = 0$ mit

$$a = -s, \quad b = 1, \quad c = sa_1 - a_2\,.$$

Für $a_1 = b_1$ und $a_2 \neq b_2$ hat man mit $x = a_1$ bereits die Form $ax + by + c = 0$ mit $a = 1$, $b = 0$, $c = -a_1$.

Löst man die Gleichung $ax + by + c = 0$ nach y auf, also

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad (b \neq 0)\,, \qquad (2.18)$$

so spricht man von der *kartesischen Normalform*. Der Wert $-a/b$ charakterisiert die *Steigung der Geraden* und der Wert $-c/b$ gibt den Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse an und heißt *Ordinatenabschnitt*.

Für den Fall, dass a und b nicht beide gleich 0 werden, erhalten wir einige Spezialfälle der Geraden $ax + by + c = 0$ in Tabelle 2.4.

Konstanten	Gleichung	Verlauf
$a = 0, b \neq 0$	$by + c = 0$	parallel zur x-Achse
$a \neq 0, b = 0$	$ax + c = 0$	parallel zur y-Achse
$c = 0$	$ax + by = 0$	enthält (0,0)

Tabelle 2.4: *Spezielle Geraden in der Ebene*

Wir betrachten nun zwei Geraden der Ebene mit den Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

und fragen nach möglichen Schnittpunkten. Dabei unterscheiden wir drei Fälle:

a) Es existiert genau ein Schnittpunkt, wenn die Steigungen s_1, s_2 der Geraden verschieden sind, z. B. für $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

$$s_1 \neq s_2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$$
$$\text{bzw.} \quad a_1b_2 \neq a_2b_1\,.$$

Für den Schnittpunkt berechnet man

$$(x, y) = \left(\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}\right).$$

b) Die Geraden sind identisch und besitzen damit unendlich viele Schnittpunkte, wenn die Steigungen s_1, s_2 und die Ordinatenabschnitte t_1, t_2 übereinstimmen, z. B. für $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

$$s_1 = s_2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$
$$\text{bzw.} \quad a_1b_2 = a_2b_1\,,$$
$$t_1 = t_2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$$
$$\text{bzw.} \quad c_1b_2 = c_2b_1\,.$$

c) Die Geraden sind parallel und besitzen keinen Schnittpunkt, wenn die Steigungen s_1, s_2 übereinstimmen, die Ordinatenabschnitte t_1, t_2 jedoch verschieden sind, z. B. für $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$

$$s_1 = s_2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$
$$\text{bzw.} \quad a_1b_2 = a_2b_1\,,$$
$$t_1 \neq t_2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2}$$
$$\text{bzw.} \quad c_1b_2 \neq c_2b_1\,.$$

Für $b_1 \neq 0, b_2 = 0$ bzw. $b_1 = 0, b_2 \neq 0$ trifft Fall a) zu. Für $b_1 = b_2 = 0$ trifft entweder Fall b) oder Fall c) zu (Tabelle 2.4).

Beispiel 2.10

Gegeben sind drei Geraden durch

I) $-4x + 5y - 12 = 0$,
II) die Punkte $A = (-1, 1)$, $B = (0, 3)$,
III) die Steigung 2 und den Ordinatenabschnitt 0.

Dann gilt für Gerade II) die Zweipunkteform

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{1-3}{-1-0} = 2 \text{ bzw. } y = 2x + 3$$

und für III) die kartesische Normalform

$$y = 2x\,.$$

Ferner sind die Geraden II) und III) parallel, während I) und II) den Schnittpunkt $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 2)$ bzw. I) und III) den Schnittpunkt $(x, y) = (2, 4)$ besitzen (Abbildung 2.20).

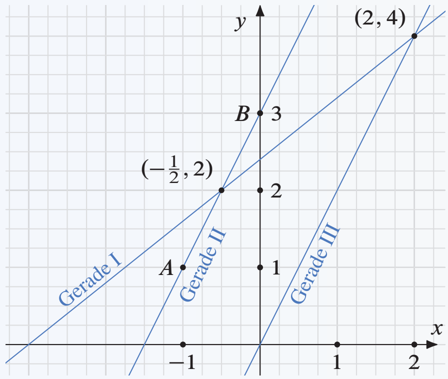


Abbildung 2.20: *Geradenschnittpunkte*

Um zur geometrischen Interpretation linearer Ungleichungen mit zwei Variablen zu kommen, überlegt man sich, dass eine Gerade die Ebene stets in zwei sogenannte *Halbebenen* aufteilt. Die Punkte einer der beiden Halbebenen lassen sich durch die Ungleichung

$ax + by + c \leq 0$, falls die Punkte auf der Geraden eingeschlossen sind,

$ax + by + c < 0$, falls die Punkte auf der Geraden ausgeschlossen sind,

charakterisieren, die Punkte der anderen Halbebene durch

$$ax + by + c \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad ax + by + c > 0\,.$$

Umgekehrt kann jeder Ungleichung der angegebenen Form eine entsprechende Halbebene zugeordnet werden.

Um zu erklären, welche Ungleichung welcher Halbebene entspricht, genügt es, für einen beliebigen Punkt (u, v) außerhalb der Geraden

$$ax + by + c = 0$$

den Term $au + bv + c$ zu berechnen. Ist der Term positiv, so entspricht die Halbebene, die (u, v) enthält, der Ungleichung

$$ax + by + c > 0\,.$$

Ist der Term negativ, so entspricht die entsprechende Halbebene der Ungleichung

$$ax + by + c < 0\,.$$

Ausgehend von der Gleichung

$$x + 3y - 3 = 0$$

wird in Abbildung 2.21 der Punkt $(-1, -1)$ mit

$$-1 + 3 \cdot (-1) - 3 = -7 < 0$$

gewählt, also entspricht die Halbebene, die $(-1, -1)$ enthält, der Ungleichung

$$x + 3y - 3 < 0\,.$$

Liegt beispielsweise der Nullpunkt $(0, 0)$ wie in Abbildung 2.21 nicht auf der Geraden, setzt man am besten diesen Punkt ein, die Berechnung ist in diesem Fall sehr einfach. Wegen $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$ gehört der Nullpunkt für $c > 0$ zur Halbebene

$$ax + by + c > 0$$

und für $c < 0$ zu

$$ax + by + c < 0\,.$$

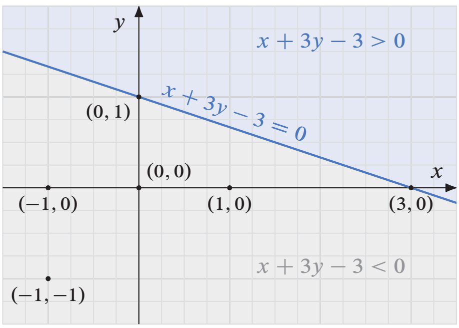


Abbildung 2.21: *Beispiele linearer Ungleichungen und Halbebenen*

Auch zwei oder mehrere lineare Ungleichungen lassen sich geometrisch veranschaulichen.

Beispiel 2.11

Wir stellen die Ungleichungen

I) $4x + 3y - 12 \le 0$
II) $x - y + 2 > 0$
III) $y \ge 0$

in Abbildung 2.22 geometrisch dar.

Dabei wird durch jede der drei Ungleichungen die gesamte Ebene in zwei Halbebenen zerlegt.

Alle Punkte, die I) erfüllen, liegen links-unterhalb $4x + 3y - 12 = 0$, einschließlich der Geraden.

Alle Punkte, die II) erfüllen, liegen rechts-unterhalb $x - y + 2 = 0$, ausschließlich der Geraden.

Alle Punkte, die III) erfüllen, liegen oberhalb $y = 0$, einschließlich der Geraden.

Alle Punkte, die I) und II) erfüllen, liegen unterhalb der Geraden

$$x - y + 2 = 0 \quad \text{und} \quad 4x + 3y - 12 = 0\,,$$

einschließlich $4x + 3y - 12 = 0$ und ausschließlich $x - y + 2 = 0$.

Alle Punkte, die I), II), III) erfüllen, liegen im Dreieck ABC, wobei die Seite AB ausgeschlossen wird (Abbildung 2.22).

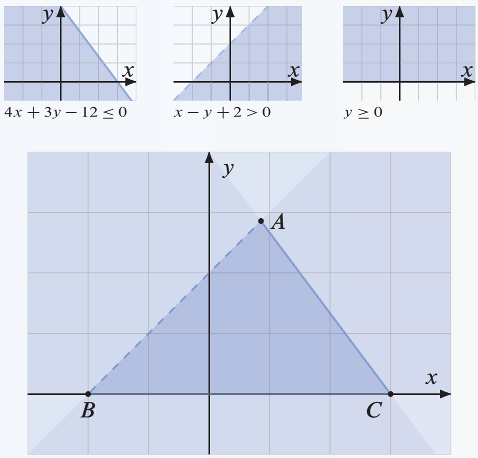


Abbildung 2.22: *Gemeinsamer Bereich dreier Halbebenen*

Abschließend erwähnen wir einige wichtige Spezialfälle der *quadratischen Gleichung* mit *zwei Variablen*:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (2.19)$$

Fall a: $a = b = 1, \quad c = 0,$
$d = -2u, \quad e = -2v,$
$f = u^2 + v^2 - r^2$

Wir erhalten mit

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2$$
$$= (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung eines *Kreises* mit dem Mittelpunkt (u, v) und dem Radius r (Abbildung 2.23). Für alle Punkte innerhalb des Kreises gilt

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2,$$

außerhalb des Kreises (Abbildung 2.23)

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 > r^2.$$

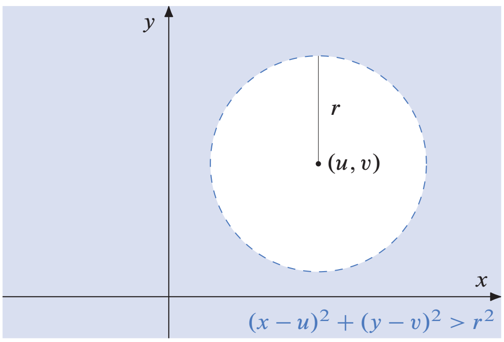


Abbildung 2.23: *Fläche außerhalb des Kreises mit der Gleichung* $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

Fall b: $a = 1, \quad b = c = 0,$
$d = -2u, \quad e = -r,$
$f = u^2 + rv$

Wir erhalten mit

$$x^2 - 2ux - ry + u^2 + rv$$
$$= (x-u)^2 - r(y-v) = 0$$

die in Abbildung 2.24 dargestellte *Parabel* mit dem Scheitelpunkt (u, v), falls $r > 0$. Für alle Punkte unterhalb der Parabellinie gilt $(x-u)^2 > r(y-v)$.

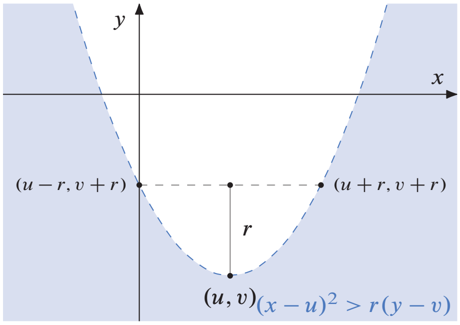


Abbildung 2.24: *Fläche unterhalb der Parabel mit der Gleichung* $(x-u)^2 = r(y-v)$, $r > 0$

Für $r < 0$ erhält man eine entsprechende, nach unten geöffnete Parabel. Vertauscht man die Rollen von x und y und von u und v, erhält man eine nach der x-Achse geöffnete Parabel mit der Gleichung

$$(y-v)^2 = r(x-u)\,.$$

Fall c: $a = b = 0, \quad c = 1,$
$d = -v, \quad e = -u,$
$f = uv - r^2$

In diesem Fall erhalten wir mit

$$xy - vx - uy + uv - r^2$$
$$= (x-u)(y-v) - r^2 = 0$$

die in Abbildung 2.25 dargestellte Hyperbel mit dem Mittelpunkt (u, v). Für alle Punkte rechts oberhalb bzw. links unterhalb der Hyperbeläste gilt

$$(x-u)(y-v) > r^2.$$

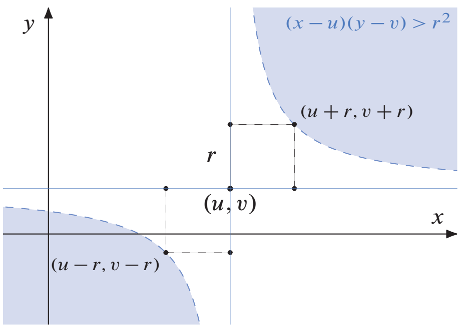


Abbildung 2.25: *Fläche ober- bzw. unterhalb der Äste der Hyperbel mit* $(x-u)(y-v) = r^2$

Beispiel 2.12

Für die Gleichung bzw. Ungleichungen

I) $2x^2 + 8x + 2y = 0$
II) $x^2 - y^2 + 2x + 1 \geq 0$
III) $xy - 2x - 1 \leq 0$
IV) $x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0$
V) $x^2 + y(y-2) = 0$

erhält man durch Umformung:

I) $x^2 + 4x + y = (x+2)^2 + y - 4 = 0$, eine nach unten geöffnete Parabel (Abbildung 2.26)

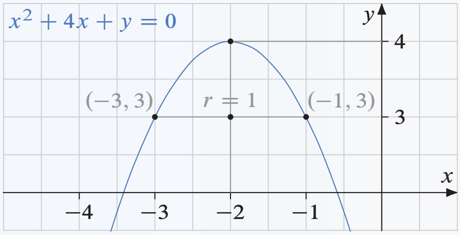


Abbildung 2.26: *Parabel zur Gleichung I)*

II) $(x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y) \geq 0$, einen durch zwei Geraden begrenzten Bereich (Abbildung 2.27)

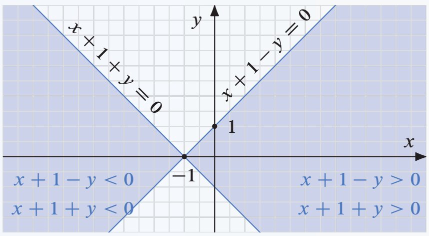


Abbildung 2.27: *Bereich der Ungleichung II)*

III) $x(y-2) - 1 \leq 0$, einen durch eine Hyperbel begrenzten Bereich (Abbildung 2.28)

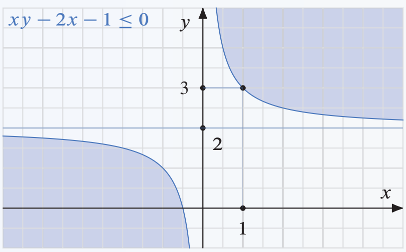


Abbildung 2.28: *Bereich der Ungleichung III)*

IV) $x^2 + 2(y+1)^2 + 1 = 0$, wegen $x^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ ohne reelle Lösung.

V)
$$
\begin{aligned}
x^2 + y(y-2) &= x^2 + y^2 - 2y \\
&= x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 \\
&= x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0\,,
\end{aligned}
$$

einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 1)$ und dem Radius $r = 1$ (Abbildung 2.29)

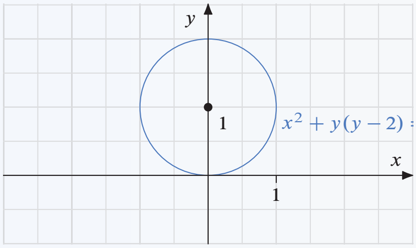


Abbildung 2.29: *Bereich der Ungleichung V)*

Relevante Literatur

Bosch, Karl (2010). *Brückenkurs Mathematik: Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben*. 14. Aufl. De Gruyter Oldenbourg, Kap. 19–21

Kemnitz, Arnfried (2014). *Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge*. 11. Aufl. Springer Spektrum, Kap. 3, 4, 6, 7

Opitz, Otto u. a. (2014). *Mathematik: Übungsbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften*. 8. Aufl. De Gruyter Oldenbourg, Kap. 1

Schwarze, Jochen (2011a). *Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. 8. Aufl. NWB, Kap. 11–13

Wellstein, Hartmut und Kirsche, Peter (2009). *Elementargeometrie: Eine aufgabenorientierte Einführung*. Vieweg+Teubner, Kap. 1-9

3 Komplexe Zahlen

In diesem Kapitel behandeln wir komplexe Zahlen und deren *Arithmetik*. Dabei lernen wir zunächst verschiedene *Darstellungsformen* kennen. Anschließend übertragen wir die für reelle Zahlen eingeführten Grundrechenarten einschließlich des *Potenzierens, Radizierens und Logarithmierens*. Schließlich folgt ein kurzer Exkurs zur Lösung von *Gleichungen höheren Grades*.

3.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$x^2 + 1 = 0,$$

deren Lösung wir formal mit

$$x_1 = \sqrt{-1}\,,$$
$$x_2 = -\sqrt{-1}$$

angeben können. Da die Wurzel $\sqrt{-1}$ im reellen Zahlenbereich nicht existiert, muss man diesen Bereich nochmals erweitern.

Wir führen dazu ein weiteres Symbol i ein mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{3.1}$$

bzw.

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}\,,$$
$$-\mathrm{i} = -\sqrt{-1}\,.$$

Sind a, b zwei reelle Zahlen, dann heißt

$$z = a + \mathrm{i}b \tag{3.2}$$

eine *komplexe Zahl*.

Dabei bezeichnet man die reellen Zahlen

$a = \mathrm{Re}(z)$ als den *Realteil* von z,
$b = \mathrm{Im}(z)$ als den *Imaginärteil* von z.

Eine komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ mit $b = 0$ ist reell. Die reellen Zahlen sind damit im Bereich der komplexen Zahlen enthalten, der durch das Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.

Entsprechend der Charakterisierung der reellen Zahlen durch die Zahlengerade kann man die komplexen Zahlen als Punkte der *komplexen Zahlenebene* mit einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Jeder komplexen Zahl $a + \mathrm{i}b$ entspricht dann der Punkt (a, b) der Zahlenebene.

Der Realteil a wird auf der Abszisse abgetragen, der Imaginärteil b auf der Ordinate. Man spricht hier von einer *kartesischen Darstellung* komplexer Zahlen mit einer *reellen* und einer *imaginären Achse* (Abbildung 3.1).

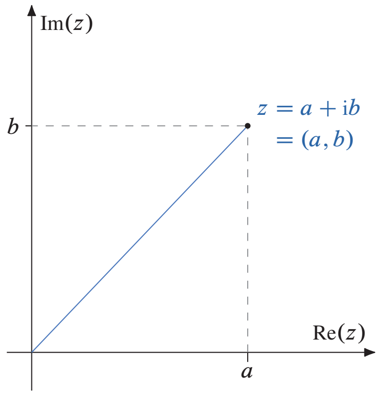


Abbildung 3.1: *Kartesische Darstellung komplexer Zahlen*

DOI: 10.1515/9783110475333-003

Alternativ zu der in Abbildung 3.1 gegebenen geometrischen Interpretation lassen sich komplexe Zahlen auch durch *Polarkoordinaten* wie in Abbildung 3.2 darstellen.

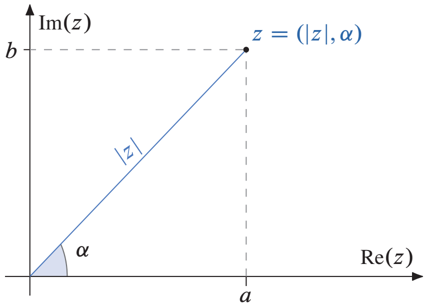


Abbildung 3.2: *Polarkoordinaten für komplexe Zahlen*

Man charakterisiert dabei die Zahl z durch das Paar $(|z|, \alpha)$, wobei $|z|$ der Absolutbetrag von z bzw. der Abstand des Punktes z vom Nullpunkt ist, und α den Winkel beschreibt, der von der reellen Achse $\mathrm{Re}(z)$ und der Strecke zwischen dem Nullpunkt und z eingeschlossen wird.

Nach dem Satz von Pythagoras (2.1) und (2.5) gilt

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \; \sin\alpha = \frac{b}{|z|}, \; \cos\alpha = \frac{a}{|z|} \qquad (3.3)$$

und damit ergibt sich bei Verwendung des Gradmaßes für $0° \leq \alpha \leq 360°$

$$\begin{aligned} a + \mathrm{i}b &= |z| \cdot \cos\alpha + \mathrm{i}|z| \cdot \sin\alpha \\ &= |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \end{aligned}$$

beziehungsweise bei Verwendung des Bogenmaßes für $0 \leq x \leq 2\pi$

$$a + ib = |z| \cdot (\cos x + \mathrm{i}\sin x)\,.$$

Wir erhalten eine *trigonometrische Darstellungsform* komplexer Zahlen.

Schließlich basiert die sogenannte *exponentielle Darstellungsform* komplexer Zahlen auf der *Eulerschen Formel*

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x} = \cos x \pm \mathrm{i}\sin x,$$

die wir allerdings erst später in Kapitel 12 beweisen können. Insgesamt gilt für die drei Darstellungsformen die Identität

$$a + \mathrm{i}\,b = |z|\,(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad (3.4)$$

Beispiel 3.1

a) Für $z_1 = 2 + \mathrm{i}2\sqrt{3}$ erhält man nach (3.3) für den Betrag

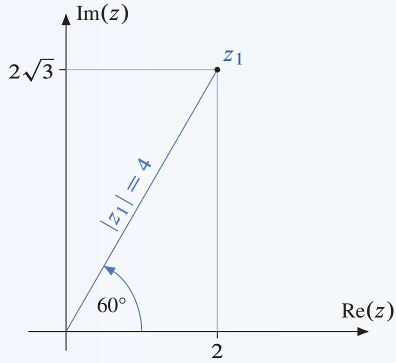
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 3} = 4\,.$$

Für die Winkel erhält man die Beziehung

$$\cos x = \frac{2}{4} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{4}\,.$$

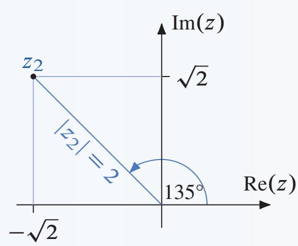
Nach Tabelle 2.2 gilt $x = \frac{\pi}{3}$ (beziehungsweise $\alpha = 60°$) sowie nach (3.4)

$$z_1 = 4\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,.$$



b) Für $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, also für einen Winkel von $x = \frac{3\pi}{4}$ bzw. $\alpha = 135°$ ergibt sich mit (3.4) sowie (2.8), (2.9) und Tabelle 2.2

$$\begin{aligned} z_2 &= 2\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(-\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \end{aligned}$$



Offenbar sind alle drei Darstellungsformen gleichwertig. Für die Durchführung und Veranschaulichung der vier Grundrechenarten sind sie allerdings unterschiedlich gut geeignet.

3.2 Grundrechenarten

Zunächst sind zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1 = |z_1|\,(\cos x_1 + \mathrm{i}\, \sin x_1) = |z_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1}$$
$$z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2 = |z_2|\,(\cos x_2 + \mathrm{i}\, \sin x_2) = |z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2}$$

gleich oder *identisch* für $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bzw. $|z_1| = |z_2|$, $x_1 = x_2$. Ferner bezeichnet man zwei komplexe Zahlen

$$z = a + \mathrm{i}\, b = |z|\,(\cos x + \mathrm{i}\, \sin x) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$
$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b = |z|\,(\cos x - \mathrm{i}\, \sin x) = |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \quad (3.5)$$

als *konjugiert komplex* und es gilt $|z| = |\overline{z}|$ (Abbildung 3.3).

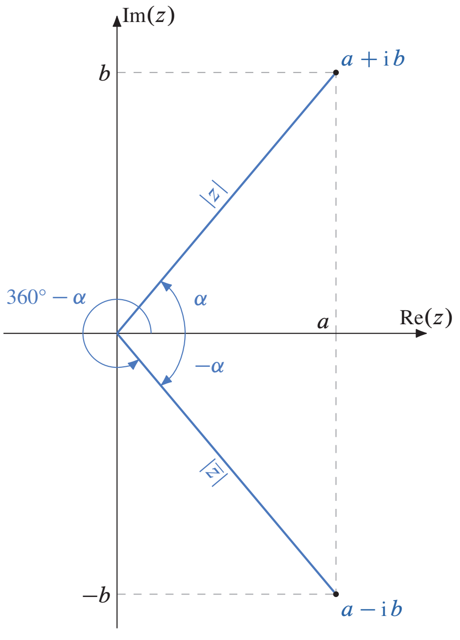


Abbildung 3.3: *Darstellung konjugiert komplexer Zahlen*

Ersetzt man α durch x, $360° - \alpha$ durch $y = 2\pi - x$, so gilt

$$\begin{aligned} &|z|\,(\cos y + \mathrm{i}\, \sin y) \\ &= |z|\,(\cos(2\pi - x) + \mathrm{i}\, \sin(2\pi - x)) \\ &= |z|\,(\cos x - \mathrm{i}\, \sin x) \\ &= |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} = a - \mathrm{i}\, b\,. \end{aligned}$$

Zwei konjugiert komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{i}\, b$ und $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$ liegen also stets symmetrisch zur reellen Achse. Damit gilt für reelle z auch $z = \overline{z}$.

Für die folgende Anwendung der vier Grundrechenarten sind jeweils die Terme der Realteile und Imaginärteile gesondert zusammenzufassen. Für die kartesische Form gilt im Einzelnen mit (3.1)

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}\, b) + (c + \mathrm{i}\, d) &= (a + c) + \mathrm{i}\,(b + d) \\ (a + \mathrm{i}\, b) - (c + \mathrm{i}\, d) &= (a - c) + \mathrm{i}\,(b - d) \\ (a + \mathrm{i}\, b) \cdot (c + \mathrm{i}\, d) &= ac + \mathrm{i}\, bc + \mathrm{i}\, ad + \mathrm{i}^2 bd \\ &= (ac - bd) + \mathrm{i}\,(bc + ad) \\ \frac{a + \mathrm{i}\, b}{c + \mathrm{i}\, d} &= \frac{(a + \mathrm{i}\, b)(c - \mathrm{i}\, d)}{(c + \mathrm{i}\, d)(c - \mathrm{i}\, d)} \\ &= \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}\,(bc - ad)}{(c^2 - \mathrm{i}^2 d^2)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{i}\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \\ &\text{für } c^2 + d^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zwischen komplexen Zahlen und ihren konjugiert komplexen Zahlen existieren dann folgende wichtige Zusammenhänge. Für

$$z = a + \mathrm{i}\, b, \qquad y = c + \mathrm{i}\, d,$$
$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b\,, \qquad \overline{y} = c - \mathrm{i}\, d$$

gilt:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= a + \mathrm{i}\, b + a - \mathrm{i}b = 2a \\ z \cdot \overline{z} &= (a + \mathrm{i}\, b) \cdot (a - \mathrm{i}\, b) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \\ \overline{z} + \overline{y} &= (a - \mathrm{i}\, b) + (c - \mathrm{i}\, d) \\ &= a + c - i\,(b + d) = \overline{z + y} \\ \overline{z} - \overline{y} &= (a - \mathrm{i}\, b) - (c - \mathrm{i}\, d) \\ &= a - c - i\,(b - d) = \overline{z - y} \\ \overline{z} \cdot \overline{y} &= (a - \mathrm{i}\, b) \cdot (c - \mathrm{i}\, d) \\ &= (ac - bd) - \mathrm{i}\,(bc + ad) = \overline{zy} \\ \frac{\overline{z}}{\overline{y}} &= \frac{(a - \mathrm{i}\, b)}{(c - \mathrm{i}\, d)} \\ &= \frac{(a - \mathrm{i}\, b)(c + \mathrm{i}\, d)}{(c - \mathrm{i}\, d)(c + \mathrm{i}\, d)} \\ &= \frac{(ac + bd) - \mathrm{i}\,(bc - ad)}{(c^2 - \mathrm{i}^2 d^2)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \mathrm{i}\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{z}{y}\right)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die trigonometrische bzw. exponentielle Form erhält man zu (3.6) und (3.7) entsprechende Ergebnisse. Es ergibt sich mit

$$\begin{aligned} z_k &= a_k + \mathrm{i}\, b_k \\ &= |z_k|\,(\cos x_k + \mathrm{i}\,\sin x_k) \\ &= |z_k|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_k} \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

und mit Hilfe von (3.1) und (2.11)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = \; & |z_1|(\cos x_1 + \mathrm{i}\,\sin x_1) \\ & \cdot |z_2|(\cos x_2 + \mathrm{i}\,\sin x_2) \\ = \; & |z_1|\,|z_2| \\ & \cdot (\cos x_1\,\cos x_2 - \sin x_1\,\sin x_2 \\ & \quad + \mathrm{i}\,(\sin x_1\,\cos x_2 + \sin x_2\,\cos x_1)) \\ = \; & |z_1|\,|z_2|\,(\cos(x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,\sin(x_1 + x_2)) \\ = \; & |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x_1 + x_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,\sin(x_1 - x_2)) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x_1 - x_2)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beispiel 3.2

Gegeben ist

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i} \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}} = \left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

mit $x_1 = \frac{\pi}{6}$ bzw. $\alpha_1 = 30°$ und $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ bzw. $\alpha_2 = 120°$.

a) $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \sqrt{3} - \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\approx 1.232 + 1.866\,\mathrm{i} \\ z_1 - z_2 &= \sqrt{3} + \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\approx 2.232 + 0.134\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Die Summe $z_1 + z_2$ entspricht graphisch der Diagonalen des von z_1 und z_2 aufgespannten Parallelogramms. Die Differenz $z_1 - z_2$ kann man als Summe von z_1 und $-z_2$ auffassen.

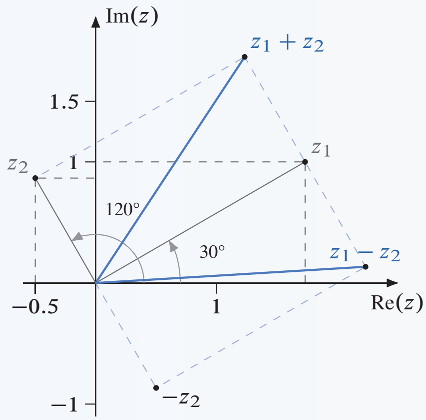


Abbildung 3.4: *Graphische Darstellung von $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$*

b) $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}} \\ &= 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\sqrt{3} + \mathrm{i} \\ \frac{z_1}{z_2} &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Für $z_1 \cdot z_2$ werden die Strecken $|z_1| = 2$ und $|z_2| = 1$ multipliziert, die Winkel $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ addiert.

Für $\frac{z_1}{z_2}$ erfolgt eine Division der Strecken $|z_1|$ und $|z_2|$ sowie eine Subtraktion der Winkel x_1 und x_2.

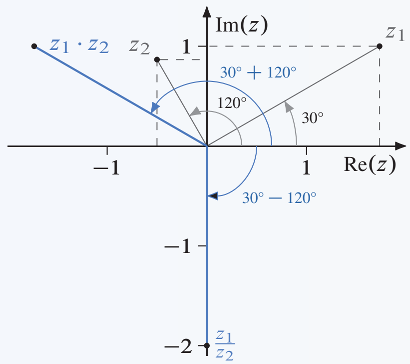


Abbildung 3.5: *Graphische Darstellung von $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2*

3.3 Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

Für eine komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}\,b$ gilt analog zu Kapitel 1.2 mit Hilfe von (3.8)

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{(a + \mathrm{i}\,b)(a + \mathrm{i}\,b)\cdots(a + \mathrm{i}\,b)}_{n\text{-mal}} = (a + \mathrm{i}\,b)^n \\ &= |z|^n\,(\cos nx + \mathrm{i}\,\sin nx) = |z|^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Auch hier bezeichnet man $z = a + \mathrm{i}\,b$ als *Basis*, n als *Exponenten* und $z^n = (a + \mathrm{i}\,b)^n$ als die *n-te Potenz* von z oder kurz „z hoch n“.

Mit der Vereinbarung $z \neq 0$ können wir das Potenzieren auf negative ganzzahlige Exponenten erweitern:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= (a + \mathrm{i}\,b)^{-n} = \left(\frac{1}{a + \mathrm{i}\,b}\right)^n \\ &= |z|^{-n}\,(\cos(-nx) + \mathrm{i}\,\sin(-nx)) \\ &= |z|^{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx} \qquad (3.10) \end{aligned}$$

Die in Abschnitt 1.2 angegebenen Rechenregeln für reelle Zahlen sind übertragbar.

Beispiel 3.3

Für $z = 1 + \mathrm{i}$ mit $|z| = \sqrt{2}$ gilt

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Daraus folgt beispielsweise

$$\begin{aligned} z^3 &= (1 + \mathrm{i})^3 = -2 + 2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

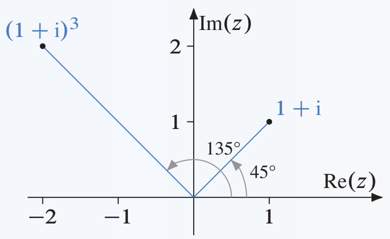


Abbildung 3.6: *Graphische Darstellung von* $z^3 = (1+i)^3 = -2 + 2i$

Beispiel 3.4

Für

$$\begin{aligned} z &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}(-1 - \mathrm{i}) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} z^{-2} &= \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\cos\left(-\tfrac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\tfrac{3\pi}{2}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\,(0 + \mathrm{i}\cdot 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\mathrm{i} \end{aligned}$$

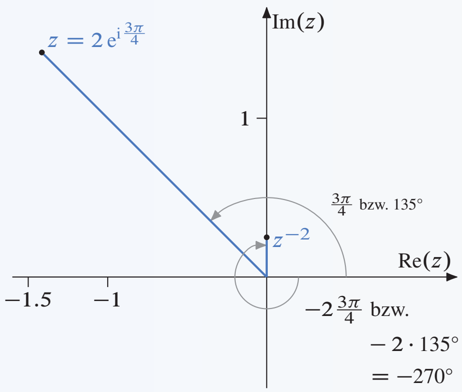


Abbildung 3.7: *Graphische Darstellung von* $z^{-2} = \left(\sqrt{2}(-1+i)\right)^{-2} = \frac{1}{4}i$

Für das *Radizieren* betrachten wir die Gleichung

$$z^n = (a + \mathrm{i}\, b)^n = c \tag{3.11}$$

mit z, c als komplexen Zahlen. Die Lösung dieser *Potenz-* oder *Wurzelgleichung* heißt die *n-te Wurzel* von c.

Mit den Gleichungen (3.4) und (3.9) gilt

$$z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}, \quad z^n = |z|^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx}\,.$$

Aus der Periodizität der Sinus- und Cosinuswerte erhalten wir mit Tabelle 2.1 und der Eulerschen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, 2k\pi} = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\, \sin 2k\pi = 1 \tag{3.12}$$

für alle ganzzahligen Werte $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} c &= |c|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \\ &= |c|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} \\ &= |c|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(y+2k\pi)} \\ &= z^n = |z|^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} \end{aligned}$$

und damit

$$|z| = \sqrt[n]{|c|} \quad \text{und} \quad nx = y + 2k\pi\,.$$

Die Potenzgleichung $z^n = c$ besitzt damit genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\, \mathrm{e}^{i\, x_k} = \sqrt[n]{|c|}\, (\cos x_k + \mathrm{i}\, \sin x_k)$$
$$\text{mit } x_k = \tfrac{y+2k\pi}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.13}$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf dem Mittelpunktskreis mit dem Radius $r = \sqrt[n]{|c|}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks (Kapitel 2.1).

Beispiel 3.5

Die Gleichung $z^4 = 1$ hat genau 4 verschiedene Lösungen. Aus dem Koeffizientenvergleich der Gleichungen

$$\begin{aligned} z^4 &= |z|^4\, (\cos 4x + \mathrm{i}\, \sin 4x) \\ &= |z|^4\, \mathrm{e}^{i\, 4x} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= |c|\, (\cos y + \mathrm{i}\, \sin y) \\ &= |c|\, \mathrm{e}^{iy} = 1 \end{aligned}$$

folgt $|z|^4 = |c| = 1$, also $|z| = \sqrt[4]{1} = 1$ sowie $\cos y = 1, \sin y = 0$, also $y = 0$ und mit $4x = y + 2k\pi$

$$x_k = \frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Wir erhalten also die Lösungen ($k = 0, 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} z_k &= 1\, (\cos x_k + \mathrm{i}\, \sin x_k) \\ &= \mathrm{e}^{i\, x_k} \end{aligned}$$

beziehungsweise im Einzelnen

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos 0 + \mathrm{i}\, \sin 0 \\ &= \mathrm{e}^0 = 1 \\ z_1 &= \cos \tfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\, \sin \tfrac{\pi}{2} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \frac{\pi}{2}} = i \\ z_2 &= \cos \pi + \mathrm{i}\, \sin \pi \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \pi} = -1 \\ z_3 &= \cos \tfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\, \sin \tfrac{3\pi}{2} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \frac{3\pi}{2}} = -i\,. \end{aligned}$$

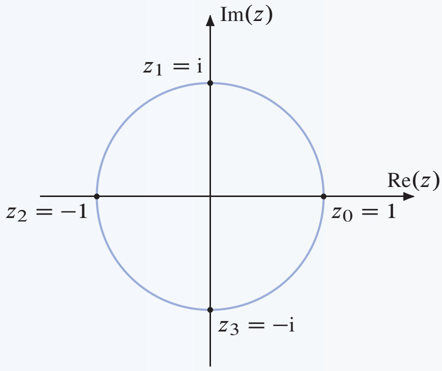


Abbildung 3.8: *Graphische Darstellung der Lösungen von $z^4 = 1$*

Die Lösungen z_0 und z_2 sind reell, die Lösungen z_1 und z_3 konjugiert komplex. Zur Kontrolle berechnet man:

$$\begin{aligned} z^4 &= 1^4 = \mathrm{i}^4 \\ &= (-1)^4 = (-i)^4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Beispiel 3.6

Die Gleichung $z^3 = 8\mathrm{i}$ hat genau drei verschiedene Lösungen. Mit

$$8\mathrm{i} = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2$$

ergibt sich

$$z_k = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_k} \text{ mit } x_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} = \frac{1+4k}{6}\pi\,.$$

Für $k = 0, 1, 2$ erhalten wir also die Lösungen:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} + \mathrm{i} \\ z_1 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\sqrt{3} + \mathrm{i} \\ z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{9\pi}{6}} = 2\left(\cos\tfrac{9\pi}{6} + \mathrm{i}\,\sin\tfrac{9\pi}{6}\right) \\ &= -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

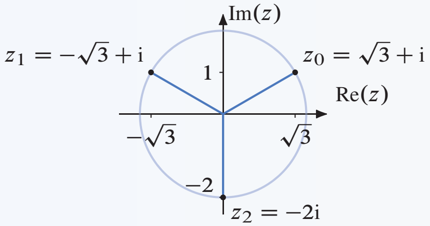


Abbildung 3.9: *Graphische Darstellung der Lösungen von $z^3 = 8i$*

Zur Kontrolle berechnet man

$$z_k^3 = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = (-\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = (-2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}\,.$$

Für das *Logarithmieren* gehen wir von der Exponentialgleichung $\mathrm{e}^z = c$ bzw. $z = \ln c$ mit den komplexen Zahlen $z, c \neq 0$ aus. Mit der Darstellung

$$\begin{aligned} c &= |c|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+2k\pi)} \\ &= |c|\,(\cos(x+2k\pi) + \mathrm{i}\,\sin(x+2k\pi)) \end{aligned}$$

erhalten wir nach den Rechenregeln für natürliche Logarithmen (Kapitel 1.2) für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\begin{aligned} z &= \ln\left(|c|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+2k\pi)}\right) \\ &= \ln|c| + \ln\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+2k\pi)} \\ &= \ln|c| + \mathrm{i}\,(x+2k\pi) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für $k = 0$ bezeichnet man die Form

$$z = \ln|c| + \mathrm{i}\,x \tag{3.15}$$

als den *Hauptwert* des natürlichen Logarithmus von c, für $k \neq 0$ ergeben sich unendlich viele *Nebenwerte*.

Beispiel 3.7

Für $c = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$
$= |c|\,(\cos(x+2k\pi) + \mathrm{i}\,\sin(x+2k\pi))$
gilt $|c| = \sqrt{12+4} = 4$ und damit für $k = 0$

$$c = 4(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}\,.$$

Aus $4\cos x = 2\sqrt{3}$ und $4\mathrm{i}\sin x = -2\mathrm{i}$ folgt

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{bzw. } x = \frac{11\pi}{6}\,.$$

Man erhält beispielsweise den Hauptwert

$$z = \ln c = \ln 4 + \mathrm{i}\,\frac{11\pi}{6}\,.$$

Nachrechnen bestätigt dieses Ergebnis:

$$\begin{aligned} c &= \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\ln 4 + \mathrm{i}\,\frac{11\pi}{6}} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{6}} \\ &= 4\left(\cos\tfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{11\pi}{6}\right) \\ &= 4\cdot\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Beispiel 3.8

Für $c = -3$
$= |c|\,(\cos(x+2k\pi) + \mathrm{i}\,\sin(x+2k\pi))$
gilt $|c| = 3$ und damit für $k = 0$

$$c = 3(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = -3$$

Mit $\cos x = -1$ und $\sin x = 0$ ergibt sich $x = \pi$ und der Hauptwert

$$z = \ln c = \ln 3 + \mathrm{i}\pi\,.$$

Zur Kontrolle berechnet man

$$\begin{aligned} c &= \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\ln 3 + \mathrm{i}\pi} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &= 3(\cos\pi + \mathrm{i}\,\sin\pi) = -3 \end{aligned}$$

Offenbar ist der natürliche Logarithmus für alle komplexen Zahlen $c \neq 0$ erklärt, also auch für negative reelle Zahlen.

3.4 Gleichungen höheren Grades

Wir betrachten nun allgemein *Gleichungen n-ten Grades* der Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (3.16)$$

mit *komplexen Koeffizienten* a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$ und der *komplexen Variablen* z.

Für jedes natürliche n lässt sich zeigen, dass die Gleichung (3.16) genau n komplexe Lösungen $z_1, \ldots, z_n$ besitzt, die nicht alle verschieden sein müssen. Es gilt die Darstellung

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1) \ldots (z - z_n). \quad (3.17)$$

Diese sogenannte *Produktdarstellung des Terms*

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

ist das Ergebnis des *Fundamentalsatzes der Algebra*. Durch schrittweises Dividieren des Ausdruckes $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ durch $z - z_1$ usw. erhält man als Ergebnis Terme $(n-1)$-ter, $(n-2)$-ter Ordnung usw. Derartige Überlegungen sind hilfreich, wenn es gelingt, einzelne Lösungen $z_1, z_2, \ldots$ zu finden.

Aus der Algebra wissen wir jedoch, dass bereits die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades bei reellen Koeffizienten schwierig ist, für $n \geq 5$ sind nur noch Spezialfälle lösbar. Daher ist man allgemein auf Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Lösungen angewiesen. In der Analysis (Kapitel 9) begegnet man häufig dem Fall, dass bei reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Lösungen der Gleichung

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

sogenannte Nullstellen, gesucht sind.

Nachfolgend bezeichnen wir den Term

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \quad (3.18)$$

als *Polynom n-ten Grades* (siehe auch Kapitel 9.3.1). Findet man reelle Werte x_0, x_1 mit

$$p(x_0) > 0, \; p(x_1) < 0, \quad (3.19)$$

so existiert mindestens eine Nullstelle x^* der Gleichung $p(x) = 0$ zwischen x_0 und x_1. Durch Anwendung eines *Zwischenwertverfahrens* berechnet man für spezielle x_k zwischen x_0 und x_1 den Ausdruck $p(x_k)$, um damit der Nullstelle näher zu kommen.

Eine konkrete Variante eines solchen Verfahrens ist die *Regula falsi*. Nach der Bestimmung der Startwerte x_0 und x_1 mit $p(x_0) \cdot p(x_1) < 0$ liegt der Wert

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{p(x_1) - p(x_0)} p(x_1) \quad (3.20)$$

zwischen x_0 und x_1. Mit Hilfe der Formel

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{p(x_k) - p(x_{k-1})} p(x_k) \quad (3.21)$$

erhält man mit $x_3, x_4, \ldots$ immer weiter verbesserte Werte für eine Nullstelle im untersuchten Bereich.

Beispiel 3.9

Für die quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

berechnet man mit der quadratischen Lösungsformel (1.29) die Nullstellen

$$x^* = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} 0.618 \\ -1.618 \end{cases}.$$

Mit den Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $p(x_0) \cdot p(x_1) = (-1) \cdot 1 < 0$ erhalten wir nach der Regula falsi:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1 - \frac{1-0}{1+1} \cdot 1 \\
&= 0.5 \\
p(x_2) &= 0.25 + 0.5 - 1 \\
&= -0.25 \\
x_3 &= 0.5 - \frac{0.5 - 1}{-0.25 - 1} \cdot (-0.25) \\
&= 0.6 \\
p(x_3) &= 0.36 + 0.6 - 1 \\
&= -0.04 \\
x_4 &= 0.6 - \frac{0.6 - 0.5}{-0.04 + 0.25} (-0.04) \\
&= 0.619 \\
p(x_4) &= 0.002
\end{aligned}$$

Damit erhält man näherungsweise die Nullstelle

$$x^* \approx 0.619.$$