Ulrich Hahn

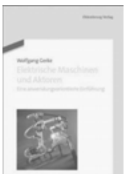
Physik für Ingenieure 1

De Gruyter Studium

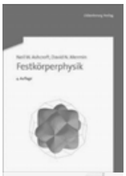
Weitere empfehlenswerte Titel

Festkörperphysik
Rudolf Gross, Achim Marx, 2012
ISBN 978-3-486-71294-0, e-ISBN 978-3-486-71486-9

Das Entropieprinzip, 2. Auflage
André Thess, 2014
ISBN 978-3-486-76045-3, e-ISBN (PDF) 978-3-486-85864-8,
e-ISBN (ePUB) 978-3-486-99078-2



Elektrische Maschinen und Aktoren
Wolfgang Gerke, 2012
ISBN 978-3-486-71265-0, e-ISBN 978-3-486-71984-0



Festkörperphysik, 4. Auflage
Neil W. Ashcroft, David N. Mermin, 2012
ISBN 978-3-486-71301-5

Ulrich Hahn

Physik für Ingenieure

Band 1: Mechanik, Thermodynamik,
Schwingungen und Wellen

2. Auflage

DE GRUYTER
OLDENBOURG

Autor
Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Hahn
Fachhochschule Dortmund
Fachbereich Informations- und Elektrotechnik
Sonnenstr. 96
44139 Dortmund
hahn@fh-dortmund.de

ISBN 978-3-11-035056-2
e-ISBN (PDF) 978-3-11-035057-9
e-ISBN (ePUB) 978-3-11-037678-4

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Einbandabbildung: iStock/Thinkstock
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier
Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort zur zweiten Auflage

Nun sind fast sieben Jahre vergangen seit dem Erscheinen meines Lehrbuches „Physik für Ingenieure“, die Resonanz war überaus positiv. Die neuen, gestuften Studiengänge sind nun flächendeckend eingeführt worden. Bei der Festlegung des zeitlichen Arbeitsaufwandes, der so genannten „workload“, der von den Studierenden erwartet wird, liegen die Präsenzzeiten in den ingenieurwissenschaftlichen BA-Studiengängen an der Fachhochschule Dortmund für das Fach Physik bei 50% (Maschinenbau) bzw. 37,5% (Elektrotechnik), davon sind weniger als 30% Übungen. Somit ist die Notwendigkeit, den Lehrstoff selbstständig nachzubereiten, immens gestiegen.

Die Bedeutung des Internets als „Wissensquelle“ hat in den sieben Jahren erheblich an Bedeutung gewonnen, dank mobiler Computer und Funknetzen ist diese Wissen auch praktisch an jedem Ort und zu jeder Zeit abrufbar. Allerdings werden die Nutzer häufig von der Flut der Treffer einer Suchanfrage „erschlagen“ und die Erfahrung, die ich bei Rechercheversuchen in Physikübungen gemacht habe, zeigen, dass die Quelle Internet oft nur bedingt zur Lösung beitragen kann, zumal Begrifflichkeit und Nomenklatur recht uneinheitlich sind. Vielfach müssen die in den Quellen verwendeten Begriffe und Symbole für Größen erst einmal „übersetzt“ werden, um verständlich zu werden. Mit einem inhaltlich abgestimmten Lehrbuch erschließt sich der Stoff dann in den meisten Fällen wesentlich ökonomischer.

Seitens des Verlages DeGruyter-Oldenbourg kam der Vorschlag, das Lehrbuch in zwei Teile zu gliedern, um spezifischer auf den Lehrstoff eingehen zu können. Der erste Band umfasst die Themen Mechanik, Thermodynamik sowie Schwingungen und Wellen, während im zweiten Band Elektrizität und Magnetismus, Optik und Auswertung von Messungen abgehandelt werden. Diesem Vorschlag bin ich gern gefolgt, denn so wird das Lehrbuch im wahrsten Sinne des Wortes „handlicher“.

Leider hat sich in der ersten Auflage hin und wieder der Druckfehlerteufel eingeschlichen, dank vieler wachsamer Augen meiner Studierenden ist hier Abhilfe geschaffen worden. Auch bei der zweiten Auflage freue ich mich auf Anregungen und Kritik.

Dortmund, im Juli 2014 Ulrich Hahn

Vorwort zur ersten Auflage

Als vor etwa drei Jahren der Oldenbourg-Verlag anfragte, ob ich Interesse hätte, ein Physik-Lehrbuch für Ingenieure zu verfassen, war ich zunächst verwundert, denn es sind bekanntlich schon sehr viele derartige Lehrbücher auf dem Markt. Allerdings war mir aus meiner über zehnjährigen Lehrtätigkeit an der Fachhochschule Dortmund bekannt, dass Studierende häufig Probleme mit den vorhandenen Lehrbüchern haben, insbesondere wenn versucht wird, die gesamte Physik darzustellen, so dass der Stoff auf Kosten der Verständlichkeit nur angerissen werden kann.

Leider hat sich in den letzten Jahren auch der Stellenwert des Faches Physik in den ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen gewandelt. Unter dem Zwang, einerseits den Umfang des Studiums zu verkleinern, anderseits aber auch der Vermittlung nichttechnischer Kenntnisse einen größeren Raum zu gewähren, ist die Physikausbildung zusammengestrichen worden um den Preis, dass in den Fächern des Hauptstudiums nicht mehr auf solides Grundlagenwissen zurückgegriffen werden kann. Allerdings wird in den neuen, gestuften Studiengängen ausdrücklich erwartet, dass Studierende sich selbstständig neue, über den Lehrplan hinausgehende Kenntnisse erarbeiten.

Diese Gründe bewogen mich, das Abenteuer, ein neues Physik-Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge an Fachhochschulen zu schreiben, zu wagen. Darin müssen zum einen die Grundlagen gelegt werden, die für das Verständnis technischer Anwendungen erforderlich sind. Zum anderen sollen aber auch Kenntnisse über Methoden und Strategien vermittelt werden, mit denen neues Wissen insbesondere in Naturwissenschaft und Technik erlangt wird. Da technische Probleme zunehmend interdisziplinär gelöst werden, ist eine solche Methodenkompetenz unerlässlich. Dieses Wissen soll in den Kapiteln

- Mechanik,
- Thermodynamik,
- Schwingungen und Wellen,
- Elektrizität und Magnetismus sowie
- Optik

vermittelt werden. Der dargestellte Stoffumfang ist deutlich größer als der, der in einem derzeit üblichen zweisemestrigen Kurs gelehrt werden kann. So wird den Studierenden Gelegenheit geboten, die Basiskenntnisse zu vertiefen, ohne auf Spezialliteratur zurückgreifen zu müssen. Außerdem werden ausführlich Themen behandelt, die Schnittstellen zu solchen Fächern sind, in denen die technischen Grundlagen des jeweiligen Studiengangs gelehrt werden. In einem separaten Kapitel wird auf Methoden zur Auswertung von Experimenten sowie auf elementare Statistik eingegangen. Dies ist im Studium für die Beurteilung der Aussagekraft von Ergebnissen in Praktikumsversuchen unerlässlich und in der späteren Berufspraxis z. B. in der Qualitätssicherung von Bedeutung.

Großer Wert wird auf die ausführliche Herleitung der physikalischen Zusammenhänge und die dazugehörenden lückenlosen Ketten von Schlussfolgerungen gelegt. Physikalische Gesetzt „fallen nicht vom Himmel“, Physikalische Größen werden nicht durch „von oben verordnete“ Definitionen eingeführt, stattdessen wird anhand exemplarischer Beispiele deren Nutzen bei der Beschreibung physikalischer Sachverhalte demonstriert. Beweise werden nicht dem Leser überlassen! Dies soll die Studierenden ermuntern, auch im späteren Berufsleben z. B. Normen wirklich verstehen zu wollen und ggf. kritisch zu hinterfragen statt sie gläubig und kritiklos anzuwenden.

Für viele Studierende stellt die Mathematik zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte eine nicht zu unterschätzende Hürde dar, zumal Mathematik- und Physikkurse in der Regel zeitlich parallel abgehalten werden. In vielen Fällen kann man somit die erforderlichen Mathematikkenntnisse nicht voraussetzen. Daher wird z. B. die Vektorrechnung in der Mechanik schrittweise eingeführt und zur Darstellung der Zusammenhänge verwendet. Bei Differential- und teilweise Integralrechnung kann häufig auf Schulkenntnisse zurückgegriffen werden, daher wird hier nur auf die „physikspezifischen“ Dinge eingegangen. So werden Volumenintegrale, wie sie für die Berechnung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten erforderlich sind, anhand von Beispielsrechnungen auf gewöhnliche Integrale zurückgeführt. Ähnlich wird bei Differentialgleichungen verfahren: Es werden Lösungsverfahren angegeben, die nur entsprechende Schulkenntnisse voraussetzen.

Simulation physikalischer Vorgänge erleichtert in vielen Fällen das Verständnis und ermöglicht, Probleme zu lösen, deren Bearbeitung „mit Bleistift und Papier“ zu aufwendig oder gar unmöglich wäre. Mittlerweile sind viele Programme wie EXCEL, MATLAB, MAPLE… verfügbar, mit denen solche Simulationen einfach am Rechner ohne aufwendige Programmierung durchgeführt werden können. Für einige Fälle wie schiefer Wurf mit Luftreibung oder Wärmeleitung durch eine Kante eines Bauteils werden Simulationen mit EXCEL angegeben.

Im Buch wird ausschließlich die „klassische“ Physik abgehandelt. Relativistische Physik ist zwar in einzelnen technischen Bereichen von Bedeutung wie z. B. beim Global Positioning System, sie spielt aber bei den meisten technischen Fragestellungen keine Rolle. Auch auf die Darstellung der Quantenphysik habe ich bewusst verzichtet, da sie entweder nur sehr elementar behandelt werden kann, so dass kein nachvollziehbarer Bezug zu technischen Anwendungen herstellbar ist, oder der Umfang eines entsprechenden Kapitels zu groß geworden wäre. Selbstverständlich spielt die Quantenphysik besonders für das Verständnis moderner Werkstoffe eine große Rolle.

Ohne Unterstützung wäre es mir nicht möglich gewesen, dieses Buch zu schreiben. So möchte ich der Fachhochschule für die Gewährung eines Freisemesters danken, in dem ein großer Teil des Buches entstanden ist. Auch meiner Familie, die mir viel Verständnis für den großen Zeitaufwand entgegengebracht hat, gilt mein großer Dank. Frau Dipl. Des. Frauke Habig hat einen großen Teil der Zeichnungen dieses Buches mit großer Sorgfalt angefertigt und ist mit viel Geduld meinen zahlreichen Verbesserungsvorschlägen gefolgt. Herr Gerhard Borowski vom Physiklabor der Fachhochschule Dortmund war mir bei der Aufnahme der zahlreichen Photos sehr behilflich und hat mit manch gutem Rat zur Seite gestanden.

Ohne Begeisterung und ständiges Fragen nach den Zusammenhängen ist eine gute Lehre nicht möglich, denn sie soll in den Studierenden ebenfalls dieses Interesse wecken, es ist ein wichtiger Antrieb für die spätere erfolgreiche Tätigkeit als Ingenieur. Dieses Interesse in mir geweckt haben meine Lehrer in Schule und Universität, die Herren Dr. Otto Heidrich, Prof. Dr. Joachim Kessler und Prof. Dr. Horst Merz.

Kein Werk ist fehlerfrei und auch Gutes kann noch verbessert werden, daher bin ich für Anregungen und Kritik sehr dankbar. Ich wünsche allen Leserinnen und Lesern viel Spaß beim Erlangen und Vertiefen ihrer physikalischen Kenntnisse mit Hilfe dieses Buches.

Dortmund, im Juni 2006 Ulrich Hahn

Inhalt Band 1

Inhalt Band 2

1 Einführung

Umwelt und Natur wirken in vielfältiger Weise auf uns Menschen ein und so wurden schon zu allen Zeiten Fragen nach dem „Warum“ gestellt, sei es um der reinen Erkenntnis willen oder um mit dem Wissen Naturgewalten besser trotzen zu können. Erkennen, Vergleichen Einordnen und Erklären von Tatsachen und Vorgängen in der Natur und quantitative Aussagen darüber sind Ziele der Naturwissenschaften und es werden immer raffiniertere Methoden entwickelt, um die Geheimnisse der Natur zu lüften. Umgekehrt versucht der Mensch, mit Hilfe dieser Kenntnisse sich das Leben angenehmer und auch sicherer zu gestalten, der gewaltige Fortschritt in Technik und Medizin, um nur zwei wichtige Bereiche zu nennen, wäre ohne das Wissen um die Zusammenhänge nicht möglich.

Im Laufe der Zeit haben sich verschiedene Naturwissenschaften voneinander abgegrenzt. Die Biologie befasst sich mit allen Dingen, die mit dem Begriff „Leben“ in der Natur beschrieben werden, während die Chemie den stofflichen Aufbau der Materie erforscht. Die Physik untersucht alle Vorgänge in der unbelebten Natur und versucht, grundsätzliche Zusammenhänge der gegenseitigen Beeinflussung, der Wechselwirkung von Objekten zu klären. Insbesondere die Klärung der mikroskopischen Struktur der Materie ist seit über hundert Jahren Gegenstand intensiver Forschung. Sterne und Himmelskörper haben Menschen schon immer fasziniert und im Laufe der Zeit konnte die Astronomie die Struktur immer größerer Bereiche des Kosmos erklären. Geologie und Geographie setzen sich mit dem Aufbau und der Struktur der Erde auseinander. In neuerer Zeit sind die Grenzen zwischen den einzelnen Naturwissenschaften aufgeweicht, bei Biochemie, Biophysik, physikalische Chemie und Quantenchemie speisen die Erkenntnisse aus verschiedenen Wissenschaften die Grenzgebiete der Forschung. Da physikalische Zusammenhänge in vielfältiger Weise die Untersuchungsgegenstände anderer Disziplinen beeinflussen, ist Physik die Grundlage für die anderen Naturwissenschaften.

Auch in der Technik gelangen durch die Berücksichtigung physikalischer Erkenntnisse wichtige Fortschritte, da nicht mehr ziellos ausprobiert werden musste, sondern Eigenschaften von Apparaten vorhergesagt werden konnten. So ist die Physik auch die Basis für alle Ingenieurwissenschaften, deren Ziel es ist, unter Ausnutzung naturwissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten Maschinen, Geräte und Einrichtungen zu konstruieren, mit denen z. B. Arbeit erleichtert oder automatisiert wird. Umgekehrt können technische Einrichtungen wie Computer oder Elektronenmikroskope dazu dienen, die Kenntnisse über die Natur weiter zu verfeinern. Diese wechselseitige Befruchtung ist ein wesentlicher Motor für den großen Fortschritt in beiden Bereichen.

Die Naturwissenschaft Physik gliedert sich wiederum in verschiedene Teildisziplinen, die ebenfalls historisch gewachsen sind, sich aber auch teilweise überschneiden. Die „klassischen" Gebiete der Physik sind:

- Mechanik, sie beschreibt die Gesetzmäßigkeiten der Bewegung von Objekten.
- Thermodynamik, hier werden alle Erscheinungen, die mit Wärme und deren Transport verbunden sind, betrachtet.
- Elektrodynamik, sie beinhaltet alles aus dem Bereich der Elektrizität und dem Magnetismus.
- Akustik, die die Ausbreitung von Schall untersucht.
- Optik, hier setzt man sich mit dem Phänomen „Licht" und allen Erscheinungen, die sich ähnlich wie Licht verhalten, auseinander.

Die Struktur der Materie wird, abhängig von der Größe der „Bausteine", in den Gebieten

- Festkörperphysik,
- Atomphysik
- Kernphysik und
- Elementarteilchenphysik

untersucht, während in

- Astrophysik und Kosmologie

Strukturen und Eigenschaften von Objekten erforscht werden, die wesentlich größer sind als die Objekte in der Alltagserfahrung des Menschen. Die Gesetze aus Mechanik, Thermodynamik und Elektrodynamik beeinflussen, teilweise in modifizierter Form die Eigenschaften der Materie im Mikro- und Makrokosmos. Manche Dinge können nicht bestimmten Gebieten zugeordnet werden: So wird die Funktion eines Lasers von Zusammenhängen aus Optik, Atomphysik und Elektrodynamik bestimmt, während bei der Supraleitung, dem „verlustfreien" Transport elektrischer Energie, Elektrodynamik, Thermodynamik und Festkörperphysik zusammenwirken. Ähnlich ist es in den technisch bedeutsamen Feldern von Sensorik und Aktorik, auch hier spielen sehr häufig die unterschiedlichsten Disziplinen der Physik zusammen.

1.1 Wie wird das Wissen gewonnen?

Um Erscheinung in der Natur sowohl qualitativ als auch quantitativ beschreiben zu können, müssen diese zunächst sehr genau beobachtet werden. Allerdings sind die Zusammenhänge und Einflussgrößen häufig sehr verwickelt, so dass fassbare Gesetze in der Regel nur gewonnen werden können, wenn das Naturereignis unter „klinischen" Bedingungen im Labor nachgestellt wird, wobei in definierter Weise verschiedene Einflussgrößen ein- und ausgeschaltet werden können. Insbesondere muss zwischen relevanten und weniger bedeutsamen Einflussgrößen unterschieden werden. Durch viele Experimente kann dann ein Zusammenhang bzw. eine Abhängigkeit verschiedener Größen voneinander erkannt werden. Diese Abhängigkeiten werden schließlich in einer mathematischen Formulierung als „Naturgesetz" oder „physikalisches Gesetz" verallgemeinert. Eine zentrale Rolle spielen dabei „physikalische Größen", mit denen Eigenschaften und Zustände von Objekten sowie Vorgänge, die diese verändern, beschrieben werden.

Die Mathematik ist dabei die Sprache, in der die physikalischen Gesetze formuliert werden. Häufig waren physikalische Fragestellungen Auslöser für die Entwicklung mathematischer Methoden wie die Infinitesimalrechnung, Vektoren usw. Während bei der Mathematik als Geisteswissenschaft ein widerspruchfreies Gebäude aus logischen Schlussfolgerungen, die auf wenigen Axiomen beruhen, angestrebt wird, ist es bei der Physik eine möglichst perfekte Übereinstimmung von Theorie und Experiment bzw. Natur.

Naturgesetze modellieren die Natur, daher können aus ihnen Naturereignisse wie z. B. eine Sonnenfinsternis, sowie der Verlauf von weiteren Experimenten vorhergesagt werden. Anderseits muss auch die Übereinstimmung des Modells mit den Vorgängen in der Natur überprüft werden, was u. U. zu einer Modifikation der Naturgesetze führt. Aus experimentell gewonnen physikalischen Gesetzen können andere Zusammenhänge abgeleitet werden. Da diese deduktiv gefundenen Naturgesetze zunächst nicht durch entsprechende Experimente „verifiziert" worden sind, muss dieses möglichst nachgeholt werden. So wurden einige Elementarteilchen, die zunächst von der Theorie „postuliert" wurden, erst später experimentell nachgewiesen. Außerdem ermöglichen es mathematisch formulierte Modelle der Natur, diese zu simulieren, d. h. bestimmte Größen zu berechnen und nicht im Experiment zu messen. Durch Vergleich der Simulation mit realen Vorgängen in der Natur kann überprüft werden, ob alle Einflussgrößen berücksichtigt wurden oder ob gewisse Größen keine Rolle spielen.

Abbildung 1.1 verdeutlicht den Regelkreis, der bei der Gewinnung von Naturgesetzen durchlaufen wird. Das Ziel der theoretischen Physik ist es, ein System von Naturgesetzen zu entwickeln, das in sich keine Widersprüche aufweist und alle Naturerscheinungen sowie

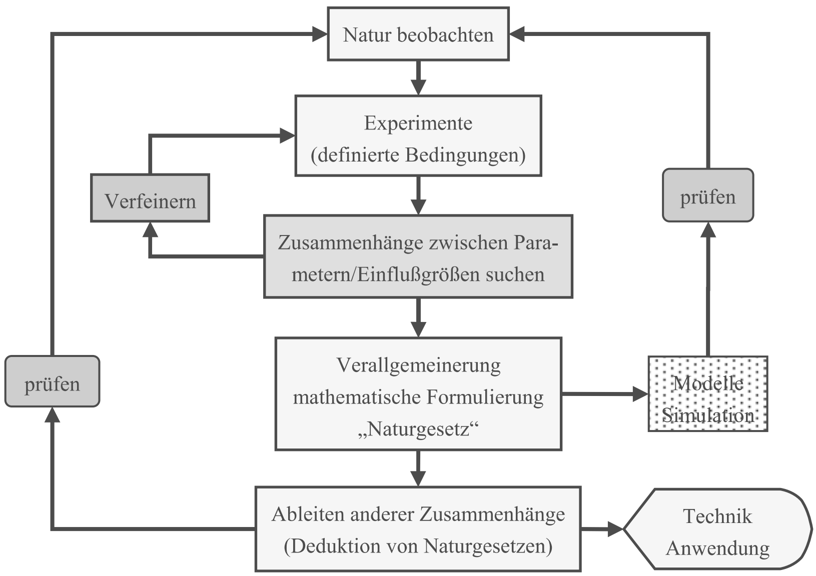


Abb. 1.1 *Zum physikalischen Erkenntnisprozess.*

Experimente genau beschreibt. Auf die „Genauigkeit“ von Messungen und die Verlässlichkeit von Vorhersagen werden wir im Kapitel 7 eingehen.

Ein für Ingenieure wichtiger Schritt ist die Anwendung physikalischer Gesetze zur Lösung technischer Probleme. Dabei müssen (siehe Laser) u. U. verschiedene Zusammenhänge miteinander kombiniert werden. Auch die Simulation von Vorgängen gewinnt in der Technik eine immer größere Bedeutung: Aufwendige Versuche können eingespart werden oder man lässt Vorgänge „virtuell“ ablaufen, die man in der Realität lieber vermeidet wie z. B. Unfälle, Grenzbelastungen von Geräten usw. Selbst sehr komplexe Naturerscheinungen wie das Wetter versuchen Wissenschaftler zu simulieren, um Vorhersagen treffen zu können. Allerdings ist eine Simulation immer nur so gut wie das Modell, das ihr zugrunde liegt. Damit stellt sich die Frage nach dem Gültigkeitsbereich von Naturgesetzen.

1.1.1 Gültigkeitsbereiche physikalischer Gesetze

Grundsätzlich ist dieser Gültigkeitsbereich zunächst auf die Randbedingungen beschränkt, die bei den Experimenten, aus denen die Naturgesetze entwickelt wurden, vorgelegen haben. Eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches ist nur möglich, wenn auch die experimentellen Randbedingungen entsprechend verändert werden. Hinsichtlich der Größe der Objekte, für die die physikalischen Gesetze gelten, unterscheidet man drei große Bereiche:

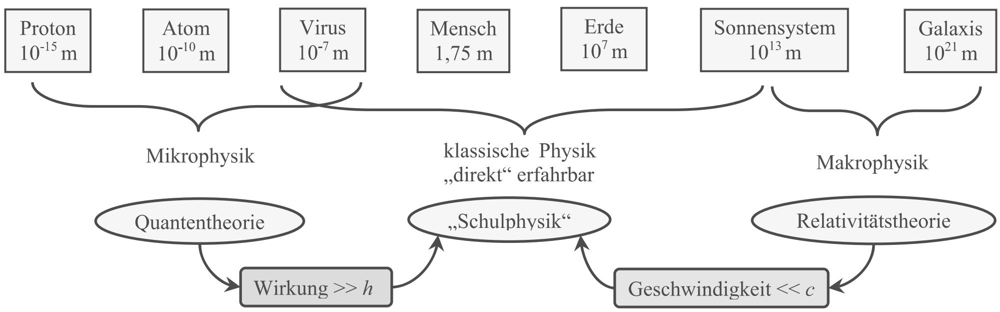


Abb. 1.2 Gültigkeitsbereiche von Naturgesetzen.

„Klassische“ Physik

Die Objekte sind der direkten Beobachtung des Menschen zugänglich, wobei „einfache“ Instrumente wie Lichtmikroskop oder Fernglas zu Hilfe genommen werden können. Aufgrund der beschränkten Entfernungen kann die Laufzeit von Signalen und Informationen vernachlässigt werden, daher ist die Zeit ein Parameter, der für alle Objekte gleich ist. Mit Beginn des 20. Jahrhunderts wurde erkannt, dass die Signallaufzeit mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^8$ m/s eine obere Schranke hat. Mit der Relativitätstheorie Einsteins[1] wurde die klassische Physik erweitert um die

[1] A. Einstein (1879 – 1955).

Relativistische Physik
Sie und die klassische Physik bezeichnet man auch als „Makrophysik“. Die Naturgesetze sind „deterministisch[1]“, aus einem bekannten Zustand eines Objektes können die Zustände, die es später einnimmt, exakt bestimmt werden. Ein weiteres Merkmal der Makrophysik ist die Möglichkeit, alle physikalischen Größen eines Objektes mit beliebiger Genauigkeit (die nur durch die verwendeten Instrumente eingeschränkt wird) zu messen. Dies ist nicht mehr möglich, wenn die Objekte sehr klein sind. Hier handelt es sich um den Bereich der

Mikrophysik oder Quantenphysik
Die endliche, von null verschiedene Größe des „Planckschen[2] Wirkungsquantums“ von $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js bedingt, dass z. B. Ort und Geschwindigkeit eines atomaren oder subatomaren Teilchens nicht mit vorgewählter Genauigkeit gleichzeitig bestimmt werden können. Diese „Unschärfe“ gilt für verschiedene Kombinationen von physikalischen Größen und hat weitreichende Konsequenzen:

- Die Eigenschaften eines einzelnen Objektes sind nicht vorhersehbar, weil der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht vollständig bestimmbar ist. Allerdings variieren die Eigenschaften einer Vielzahl gleichartiger Objekte in einer Bandbreite, die durch statistische Gesetze bestimmt wird.
- Gewisse physikalische Größen sind „quantisiert“, d. h. sie können nur bestimmte Werte annehmen. Objekte, die durch derartige Größen beschrieben werden, bezeichnet man als „Quanten“.

Objekte des Mikrokosmos sind, wenn überhaupt, nur noch mit aufwendigen Geräten, z. B. einem Rastertunnelmikroskop, direkt beobachtbar. Meistens liefern Experimente Ergebnisse, aus denen nur indirekt auf die Eigenschaften oder Zustände der Objekte geschlossen werden kann. Diese sind zudem häufig mit den Alltagserfahrungen der Menschen nicht vereinbar, daher ist die Mikrophysik sehr abstrakt und unanschaulich und nur anhand von Modellen erklärbar.

1.1.2 Prinzipien der klassischen Physik

Auch wenn die Mikrophysik vor allem bei Werkstoffen und in der Elektronik an Einfluss gewinnt und die relativistische Physik z. B. bei der satellitengestützten Navigation zu beachten ist, hat die klassische Physik nach wie vor für die Technik die größte Bedeutung. Daher sollen ihre Prinzipien, die bei der Aufstellung physikalischer Gesetze in diesem Bereich hilfreich sind, aufgelistet werden.

Zerlegung
Viele komplexe Vorgänge oder Systeme können in einfachere Teilvorgänge oder -systeme gegliedert werden, die sich möglichst wenig gegenseitig beeinflussen. Ist die Physik dieser Teile verstanden, so gilt dies auch für das Ganze. Ein Beispiel ist der schiefe Wurf, der aus zwei unabhängigen Teilbewegungen zusammengesetzt ist. Diese Zerlegung von Problemen

[1] Determinare, lat. abgrenzen.
[2] M. Planck (1858 – 1947).

in kleine Teile und deren getrennte Lösung war bislang sehr fruchtbar, denn sie ermöglicht die schrittweise Lösung komplexer Fragestellungen. Bei Quantensystemen ist dies nur sehr eingeschränkt möglich, da vielfach die Wechselwirkung zwischen einzelnen Systemkomponenten die Eigenschaften des Gesamtsystems bestimmt.

Kausalität
Der deterministische Ablauf von Zustandsänderungen bei Objekten und Systemen, die aus mehreren Objekten zusammengesetzt sind, ermöglicht eine eindeutige Zuordnung von Ursache und Wirkung: Zunächst muss eine Ursache vorliegen, bevor eine Wirkung eintritt. Um eine Wirkung zu erzielen, muss eine entsprechende Ursache geschaffen werden, bzw. um eine Wirkung zu vermeiden, muss die Ursache verhindert werden. Auch dieses Prinzip hat große Erfolge in Technik und Medizin bewirkt, auch bei nicht naturwissenschaftlich-technischen Fragestellungen hat es sich bewährt, allerdings ist die die Zuordnung Ursache-Wirkung nicht immer eindeutig und kann nicht in „klinisch reiner“ Laborumgebung ermittelt werden. Daher besteht die Gefahr von Fehlschlüssen bei nicht hinreichend bekannten Einflussgrößen.

Objektivierbarkeit
Wird eine physikalische Größe, welche den Zustand eines Objektes charakterisiert, mit Hilfe eines geeigneten Messinstrumentes gemessen, so soll durch diese Maßnahme der Zustand des Objektes nicht geändert werden. Durch die Bestimmung der Länge eines Tisches mit einem Maßband soll sich die Länge des Tisches nicht ändern. Wird die Messung bei gleichen Randbedingungen wiederholt, so soll sie auch das gleiche Ergebnis liefern.

Objektivierbarkeit ist auch eine Konsequenz der Zerlegung des Systems Messobjekt-Messgerät in zwei getrennte Teilsysteme, die praktisch nicht miteinander wechselwirken. Im Mikrokosmos ist diese Trennung meist nicht möglich, daher beeinflusst die Messung die Eigenschaften des Messobjekts, eine Wiederholungsmessung reproduziert nicht die Werte der alten Messung.

Stetigkeit
Ändern sich die Eigenschaften oder der Zustand eines Objekts, so erfolgt diese Änderung stetig, d. h. die entsprechende physikalische Größe nimmt bei dem Vorgang alle Werte aus dem Intervall zwischen den Werten des Anfangs- und des Endzustandes an. Jedem Zwischenzustand kann ein bestimmter Wert, der im Prinzip beliebig genau angegeben werden kann, zugeordnet werden. Mikrophysikalische Objekte verhalten sich dagegen unstetig: Elektronen in den Hüllen von Atomen können beispielsweise nur bestimmte Energiewerte annehmen.

1.2 Physikalische Größen

Wie schon aus den vorigen Betrachtungen hervorgegangen ist, dienen physikalische Größen dazu, um Eigenschaften und Zustände von Objekten oder Systemen, die aus verschiedenen Objekten zusammengesetzt sind, sowie deren Änderungen zu beschreiben. Eine wichtige Aufgabe der Physik ist, eindeutige Größen zu definieren, mit denen die Sachverhalte in der

Natur und bei Experimenten klar beschrieben und Missverständnisse vermieden werden können. Zwei wesentliche Angaben muss eine physikalische Größe beinhalten:

1. Was wurde gemessen? Diese qualitative Aussage wird durch die Einheit der physikalischen Größe angegeben.
2. Wie viel wurde gemessen? Durch einen Zahlenwert wird eine quantitative Aussage gemacht, in welchem Verhältnis die gemessene Größe zur Einheit, der Vergleichsgröße, steht.

Daher wird eine physikalische Größe immer folgendermaßen angegeben:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert (wie viel)} \cdot \text{Einheit (was)} \quad G = \{G\} \cdot [G] \tag{1.1}$$

Zu beachten ist die Notation in (1.1): Die Bezeichnung bzw. das Symbol der physikalischen Größe, nicht aber deren Einheit steht in der eckigen Klammer. Wird z. B. eine Zeit, die in Sekunden gemessen wird, mit dem Symbol t bezeichnet, so lautet die Angabe für die Einheit von t: $[t] = \mathrm{s}$. Dies wird häufig, besonders in Diagrammen oder Tabellen falsch gemacht.

Da letztlich alle physikalischen Gesetze aus Messungen herrühren, ergibt sich eine zentrale, von Einstein herrührende Forderung an physikalische Größen:

Jede physikalische Größe muss messbar sein.

Daher muss für jede physikalische Größe zumindest ein Messverfahren festgelegt werden, mit dem die Einheit dieser Größe bestimmt werden kann. Diese Messverfahren sollen möglichst genau sein, unabhängig vom Ort und vom Zeitpunkt der Messung die Einheit reproduzierbar darstellen, und vor allem die jeweiligen Einsatzgebiete abdecken. Da die Zahlenwerte mancher Größen in einem sehr weiten Bereich variieren, sind in diesen Fällen verschiedene Messverfahren für die betreffenden Teilbereiche anzugeben. Eine Forderung aus der Praxis ist die leichte Verfügbarkeit des Messverfahrens.

Manchmal gibt es, historisch bedingt, für den gleichen Einsatzbereich unterschiedliche Messverfahren für die Einheit einer physikalischen Größe, was zu unterschiedlichen Skalen und damit zu unterschiedlichen Zahlenwerten führt. Ein Beispiel ist die Messung der Temperatur: Die sehr verbreitete Celsius-Skala definiert 1 °C als den hundertsten Teil der Temperaturdifferenz zwischen dem Siede- und dem Schmelzpunkt von Wasser, Letzterer definiert auch den Nullpunkt der Skala. Bei der in den USA gebräuchlichen Fahrenheit-Skala wurde als Nullpunkt die tiefste, zum Zeitpunkt ihrer Einführung 1714 herstellbare Temperatur festgelegt, während die (mittlere) Temperatur des menschlichen Blutes 100 °F definiert. Die Eigenschaft eines Objektes, wie z. B. seine Temperatur, ist selbst unabhängig von der konkreten Wahl der Einheit, allerdings ergeben sich unterschiedliche Zahlenwerte. So entsprechen 100 °F etwa 37 °C.

Physikalische Gesetze verallgemeinern Sachverhalte in der Natur, sie sind mathematische Verknüpfungen physikalischer Größen. Auch die physikalischen Gesetze werden unabhängig von den Einheiten der in ihnen vorkommenden physikalischen Größen formuliert. So ist die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Objekts die Strecke, die es in einem bestimmten

Zeitraum zurücklegt, die Geschwindigkeit kann etwa in Meter/Sekunde oder in Meilen/Stunde angegeben werden.

1.2.1 Basisgrößen und Maßsysteme

In der Physik werden sehr viele unterschiedliche Systeme untersucht, entsprechend viele physikalische Größen sind für ihre Charakterisierung erforderlich. Hieraus erwächst eine unübersichtlich große Zahl von Festlegungen für Messverfahren zur Bestimmung der jeweiligen Einheiten. Um trotzdem den Überblick nicht zu verlieren, sind die Physiker bestrebt, die Zahl der verwendeten Größen möglichst klein zu halten. Ermöglicht wird dies durch die mathematischen Verknüpfungen der verschiedenen Größen in den zahlreichen physikalischen Gesetzen.

Einen minimalistischen Ansatz stellt das zum Ende des 19. Jahrhunderts eingeführte „c g s“-System (Centimeter als Einheit für die Länge, Gramm für die Masse und Sekunde für die Zeit) dar. Alle physikalischen Gesetze können durch diese drei Basisgrößen aus der Mechanik ausgedrückt werden. Die Einheiten anderer Größen können aus ihnen abgeleitet werden und müssen nicht durch ein eigenes Messverfahren dargestellt werden. Aus historischen Gründen haben die Einheiten von manchen abgeleiteten Größen eigene Namen wie z. B. „Newton“ für die Kraft oder „Coulomb“ für elektrische Ladung.

Für die Praxis erwies sich das cgs-System als etwas unhandlich, insbesondere die elektrischen Größen ergeben wenig einprägsame Ausdrücke aus den mechanischen Basisgrößen und in vielen Fällen ergeben sich unanschaulich große (oder kleine) Zahlenwerte. Daher wurde in der Mitte des 20. Jahrhunderts das „M K S A“-System (Meter für Länge, Kilogramm für Masse, Sekunde für Zeit sowie Ampère für die elektrische Stromstärke) festgelegt. Das heute gebräuchliche SI-System (Système International d’Unités) wurde 1978 in Deutschland als gesetzlich vorgeschriebenes Einheitensystem eingeführt. Es umfasst folgende sieben Basisgrößen:

- Meter (Länge)
- Kilogramm (Masse)
- Sekunde (Zeit)
- Ampère (elektrische Stromstärke)
- Kelvin (Temperatur)
- mol (Stoffmenge)
- Candela (Lichtstärke)

Die Definitionen der Einheiten dieser Basisgrößen werden wir in den folgenden Kapiteln kennen lernen, sie haben sich im Laufe der Zeit mehrfach geändert, um ein Höchstmaß an Genauigkeit und Reproduzierbarkeit zu gewährleisten. Diese Kriterien waren u. A. ausschlaggebend für die Auswahl der Basisgrößen, die zunächst etwas willkürlich erscheint. Auch die erreichten relativen Genauigkeiten, d. h. Messunsicherheit/Messergebnis, von bis zu 10^{-14} erscheinen für den „Normalfall“ stark übertrieben, man muss sich aber vor Augen halten, dass alle denkbaren Einsatzfälle abgedeckt werden müssen. So wäre eine auf wenige cm genaue Positionsangabe mit Hilfe des satellitengestützten „Global Positioning System“ GPS ohne sehr genau festgelegte Basisgrößen nicht möglich.

1.2.2 Rechnen mit physikalischen Größen

Größenvorsätze

Zahlenwerte physikalischer Größen nehmen in vielen Fällen keine „alltäglichen“ Größenordnungen zwischen 0,1 und 100 ein, daher enthalten sie entweder unübersichtlich viele Ziffern, oder „unanschauliche“ Zehnerpotenzen, mit denen eine leicht fassliche Zahl multipliziert wird. Diese Schwierigkeit wird umgangen, wenn man die Einheit mit einem „Größenvorsatz“, der die entsprechende Zehnerpotenz im Zahlenwert repräsentiert, versieht.

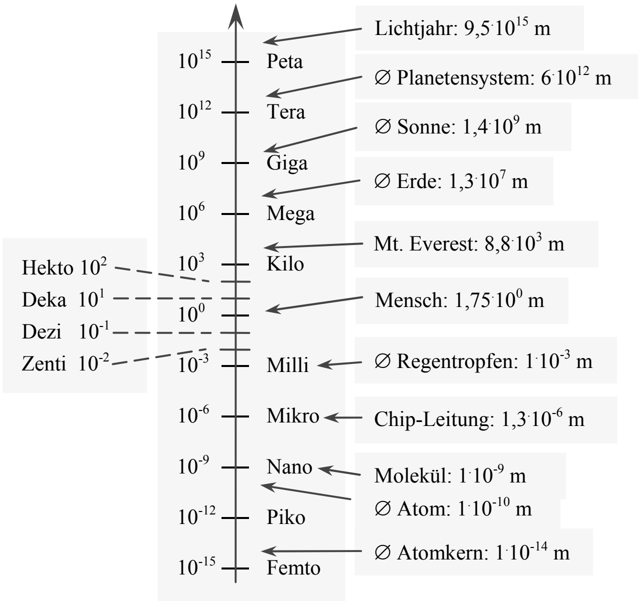


Abb. 1.3 *Größenvorsätze, die die Zehnerpotenz im Zahlenwert einer physikalischen Größe repräsentieren. Zu den Zehnerpotenzen sind typische Beispiele für die Länge dargestellt.*

Zu beachten ist, dass nur jeweils ein Größenvorsatz pro physikalische Größe verwendet wird, die Bezeichnung „Mikromillimeter“ ist unzulässig und muss durch „Nanometer“ ersetzt werden.

Verknüpfung verschiedener physikalischer Größen

Über physikalische Gesetze, die den Zusammenhang zwischen physikalischen Größen beschreiben, werden physikalische Größen mathematisch miteinander verknüpft. Daraus können sich u. U. andere Größen als die aus Basisgrößen abgeleitet Größen ergeben. Zu beachten ist dabei:

> Physikalische Größen unterschiedlicher Art können nur durch Punktrechnung zu einer neuen Größe verknüpft werden.

Diese wichtige Tatsache soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden: Eine Größe E sei definiert als Quotient zweier verschiedener Größen G und H.

$$E := \frac{G}{H} \;\Rightarrow\; E = \{E\} \cdot [E] = \frac{\{G\} \cdot [G]}{\{H\} \cdot [H]} = \frac{\{G\}}{\{H\}} \frac{[G]}{[H]} \;\Rightarrow\; \{E\} = \frac{\{G\}}{\{H\}},\ [E] = \frac{[G]}{[H]} \tag{1.2}$$

Der Zahlenwert von E ergibt sich aus dem Quotienten der Zahlenwerte von G und H, die Einheit von E aus dem Quotienten der Einheiten von G und H. Dies ist für alle Verknüpfungen durch Punktrechnung möglich, im Gegensatz zur Verknüpfung durch Strichrechnung:

$$E := G + H \;\Rightarrow\; E = \{E\} \cdot [E] \neq \{G\} \cdot [G] + \{H\} \cdot [H] \tag{1.3}$$

Durch Strichrechnung dürfen nur gleichartige physikalische Größen verknüpft werden.

$$E := G_1 + G_2 \;\Rightarrow\; E = \{E\} \cdot [E] = \{G_1\} \cdot [G] + \{G_2\} \cdot [G] = (G_1 + G_2\} \cdot [G] \;\Rightarrow$$
$$\{E\} = \{G_1 + G_2\},\ [E] = [G] \tag{1.4}$$

Hieraus ergibt sich eine nützliche Technik, um die Richtigkeit von Berechnungen und der Herleitung von physikalischen Zusammenhängen zu überprüfen: die Dimensionsprobe:

Ergibt sich für eine aus gegebenen Größen zu berechnende Größe die richtige Einheit?
Haben alle Summanden in einem mathematischen Ausdruck die gleiche Einheit?

Können beide Fragen mit „ja“ beantwortet werden, bedeutet dies jedoch noch nicht, dass die Rechnung wirklich richtig ist, bei einem „nein“ kann man aber davon ausgehen, dass ein Fehler unterlaufen ist. Daher sollte man Dimensionsproben möglichst bei jedem Zwischenschritt einer Rechnung durchführen, um Fehler frühzeitig entdecken und korrigieren zu können.

Gültige Stellen

Die Zahlenwerte physikalischer Größen werden durch Messungen gewonnen, die mit entsprechenden Geräten durchgeführt werden. Diese Geräte weisen Skalen auf, die vom menschlichen Beobachter nur mit einer beschränkten „Genauigkeit“ abgelesen werden können oder numerische Anzeigen, die den Messwert als Dezimalzahl mit einer gewissen Anzahl von Ziffern ausgeben. Abgesehen von wenigen Ausnahmen[1] ist, mathematisch gesehen, der Zahlenwert einer physikalischen Größe eine reelle Zahl, die als Dezimalzahl mit beliebig vielen Ziffern angegeben werden kann. Von diesen Ziffern können in der Praxis jedoch nur endlich viele bestimmt werden, diese Ziffern nennt man „gültige Stellen“ des Zahlenwertes einer physikalischen Größe.

[1] Ausnahmen kommen z. B. bei radioaktiven Zerfällen von Atomkernen vor.

> Gültige Stellen sind, abgesehen von den Nullen, welche die Größenordnung festlegen, die Ziffern einer physikalischen Größe, die mit Sicherheit[1] angegeben werden können.

Diese Konvention soll nun anhand einiger Beispiele erläutert werden:

- 45,28: vier gültige Stellen
- 1,48300: sechs gültige Stellen
- 0,0021: zwei gültige Stellen, die Nullen nach dem Komma legen die Größenord nung fest
- 145 000 000: drei gültige Stellen, die Nullen bestimmen die Größenordnung[2]
- 0,00032000: fünf gültige Stellen, die ersten drei Nullen nach dem Komma legen die Größenordnung fest, die letzten drei Nullen sind gültige Stellen.

Diese Schreibweise wird insbesondere bei sehr großen oder sehr kleinen Zahlenwerten unübersichtlich, in diesen Fällen ist die „wissenschaftliche" Notation praktischer:

$$\{G\} = A \cdot 10^b \text{, mit } 1 \leq A < 10 \tag{1.5}$$

Die Größe A nennt man auch die „Mantisse" und b den Exponenten des Zahlenwertes. Die Ziffern der Mantisse sind auch die gültigen Stellen, mit denen der Zahlenwert angegeben wird. Alternativ kann man auch statt des Terms 10^b die Einheit der physikalischen Größe mit einem Größenvorsatz aus **Abb. 1.3** versehen.

Werden physikalische Größen miteinander verknüpft, so kann der Zahlenwert des Resultats auch nur mit einer gewissen Anzahl gültiger Stellen angegeben werden. Diese ist von den gültigen Stellen der Eingangsgrößen und der Art der Verknüpfung abhängig. Gehen wir davon aus, dass die letzte gültige Stelle aus der Rundung der weiteren, nicht bekannten Stellen des Zahlenwertes entstanden ist, so wirken sich Verknüpfungen folgendermaßen auf das Ergebnis aus:

Strichrechnung
Die gültigen Stellen des Ergebnisses werden durch die gemeinsamen gültigen Dezimalstellen (in wissenschaftlicher Notation gleicher Exponent!) der Summanden bestimmt. So ist 12,54 m + 1,3 m = 13,8 m und 14 cm + 3 mm = 14 cm, 14,0 cm + 3 mm ergeben dagegen 14,3 cm. Besonders bei Subtraktionen ist Vorsicht geboten: 2,13 m – 2,1 m = 0 m.

Punktrechnung
Die kleinste Zahl der gültigen Stellen in den Faktoren bestimmt die Zahl der gültigen Stellen des Ergebnisses. 2,51 m · 0,2 m = 0,5 m^2; 13 km/0,5 h = $3 \cdot 10^1$ km/h (nicht zu verwechseln mit 30 km/h, es sind natürlich 26 km/h, die auf 30 km/h gerundet werden. In der wissenschaftlichen Notation wird dieser Unterschied deutlich, in der normalen dagegen nicht.)

---

1 Auf den Begriff „Sicherheit" werden wir im Abschnitt 7.1.2 eingehen.

2 Im täglichen Leben wird von dieser Sichtweise oft abgewichen: so wird 100 in der Regel als eine Zahl mit drei gültigen Stellen betrachtet, die beiden Nullen werden nicht als die Größenordnung bestimmend angesehen. Eindeutig wird die Zahl der gültigen Stellen in der wissenschaftlichen Notation angegeben.

Um die Zahl der gültigen Stellen einer physikalischen Größe, die sich aus komplexeren Verknüpfungen mehrerer Eingangsgrößen ergibt, zu bestimmen, ist einiger Aufwand erforderlich. Insbesondere sollte bei den Zwischenschritten eine Stelle mehr berücksichtigt werden, die dann im Endergebnis wieder durch Runden weggelassen wird, um Rundungsfehler klein zu halten. Insbesondere bei der Auswertung von Experimenten ist es üblich, die Genauigkeit des Ergebnisses durch eine Fehlerrechnung statt durch konsequentes Anwenden obiger Regeln zu ermitteln. Wie dabei vorzugehen ist, werden wir im Kapitel 7 kennen lernen.

2 Mechanik

Die Mechanik stellt seit der wissenschaftlichen Erforschung physikalischer Zusammenhänge und Naturgesetze (etwa ab dem 16. Jahrhundert) das Fundament der Physik dar. Hier werden die meisten, auch für die anderen Teilgebiete der Physik relevanten Begriffe festgelegt. Bis zum Beginn des 20. Jahrhundert glaubten die Physiker sogar, alle Vorgänge in der Natur auf die Mechanik zurückführen zu können, allerdings zeigte es sich, dass dies für die Elektrodynamik nicht möglich war, so dass diese neben der Mechanik die zweite Säule der klassischen Physik darstellt.

Grob gesprochen beschäftigt sich die Mechanik mit der Frage, wie und warum sich Objekte bewegen (Kinematik und Dynamik) oder warum sich Objekte nicht bewegen (Statik). Objekte können sehr klein (Elementarteilchen, wie z. B. Elektronen), sehr groß (Galaxien), einfach strukturiert („punktförmig"), aber auch recht komplex sein. Aufgabe der Mechanik ist es unter anderem, nur die für die jeweilige Problemstellung relevante Komplexität des Objektes zu berücksichtigen und gegebenenfalls weitere vorhandene Strukturen zu vernachlässigen. So spielt es für die Bewegung der Erde um die Sonne keine Rolle, ob an einer Straßenkreuzung in Rom zwei Autos zusammenstoßen.

Zur quantitativen Beschreibung der Bewegungsvorgänge wurden mathematische Methoden entwickelt, wie z. B. das Lösen von Differential- und Integralgleichungen, Vektorrechnung und -analysis, diese Methoden haben auch für andere Gebiete der Physik eine große Bedeutung.

Die Gesetzmäßigkeiten für „alltägliche" Bewegungsvorgänge, d. h. Vorgänge, die ein Mensch ohne oder mit einfachen Hilfsmitteln beobachten kann, wurden im Wesentlichen von Newton formuliert und werden als „klassische" Mechanik oder Newtonsche Mechanik bezeichnet. Ihre Aussagen verlieren die Gültigkeit für sehr schnelle Objekte (deren Geschwindigkeit mit der des Lichtes vergleichbar ist) oder für sehr kleine Objekte, die nicht mehr rückwirkungsfrei beobachtet werden können. In diesen Fällen geht die klassische Mechanik in die relativistische Mechanik bzw. in die Quantenmechanik über.

In diesem Kapitel werden wir die Begriffe, die physikalischen Größen und die Gesetze der klassischen Mechanik kennen lernen. Zunächst müssen wir aber klären, was eigentlich unter „Bewegung" zu verstehen ist:

2.1 Bewegung

Objekte, die wir beobachten, befinden sich an ganz bestimmten Stellen oder Positionen des (dreidimensionalen) Raumes. Bewegt sich ein Objekt, so ändern sich die Stelle oder bei ausgedehnten Objekten die Stellen, an der oder denen sich das Objekt befindet. Weiterhin stellen wir fest, dass für diesen Bewegungsvorgang „Zeit“ benötigt wird, die „Endposition“ nimmt das Objekt später ein als die „Anfangsposition“. Neben einer eindeutigen Festlegung der Position eines Objektes können wir auch noch eine geordnete Reihenfolge von Ereignissen (früher – später) festlegen, z. B. wann sich das Objekt an welcher Stelle befindet.

Besonders bei ausgedehnten Objekten kann eine Bewegung recht unübersichtlich sein, denken wir z. B. an einen Eiskunstläufer, der einen doppelten Rittberger springt: Neben der Bewegung des „gesamten“ Eiskunstläufers bewegen sich einzelne Körperteile gegeneinander, er ändert seine Form, wird also „deformiert“.

Betrachten wir die Bewegung von ausgedehnten Objekten, die sich (nahezu) nicht deformieren, so können wir jede Bewegung in zwei sich überlagernde Teilbewegungen zerlegen, die Rotation und die Translation.

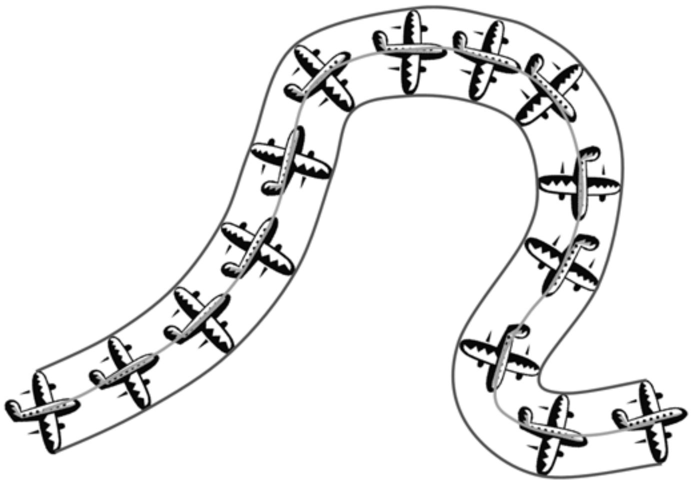


Abb. 2.1 *Beliebige Bewegung.*

2.1.1 Rotation

Bei einer Rotations- oder Drehbewegung bewegen sich alle Punkte des ausgedehnten Objektes auf konzentrischen Kreisen. Dabei kann der Mittelpunkt der Kreise entweder in dem Objekt oder auch außerhalb lokalisiert sein.

Abb. 2.2 *Rotationsbewegung.*

2.1.2 Translation

Bei einer Translations- oder fortschreitenden Bewegung bewegen sich alle Punkte des ausgedehnten Objektes auf kongruenten oder deckungsgleichen Bahnen. Da sich alle Punkte gleichartig bewegen, ist für die Beschreibung einer Translation nur die Betrachtung eines ausgewählten Punktes des Objektes erforderlich.

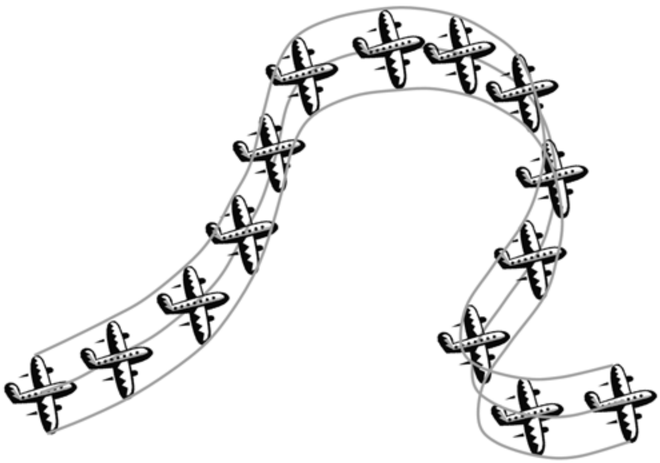


Abb. 2.3 *Translationsbewegung.*

2.2 Kinematik

In der Kinematik werden die Gesetze von Bewegungsvorgängen hergeleitet, wobei es für die Betrachtung nicht darauf ankommt, welche Eigenschaften das Objekt selbst aufweist, d. h. es ist gleichgültig, ob sich eine Mücke oder ein Elefant bewegt. Daher reicht für die Beschreibung von Bewegungen ein repräsentativer Punkt des Objektes aus, die Bewegung ist somit vom Typ „Translation".

Für die Beschreibung von Bewegungen müssen die Positionen, die ein Objekt zu bestimmten Zeitpunkten einnimmt, erfasst werden. Die Angabe der Position geschieht im Allgemeinen bezüglich eines sich nicht bewegenden, d. h. ruhenden Referenzpunktes. Dieser kann beliebig gewählt werden, mit Hilfe einer „geschickten" Wahl des Referenzpunktes können häufig die Rechnungen sehr vereinfacht werden. Zu bemerken ist, dass „Ruhe" des Referenzpunktes durchaus eine willkürliche Festlegung ist: Für die Betrachtung der Bewegung einer Kaffeetasse im Bordrestaurant des ICE, der mit 200 km/h durch die Lande fährt, kann der Mittelpunkt des Tisches, auf dem sie steht, gewählt werden. Später werden wir Methoden kennen lernen, mit denen man Bewegungen bezüglich unterschiedlicher, auch gegeneinander bewegter Referenzpunkte umrechnen kann.

Im Allgemeinen können sich Objekte beliebig im dreidimensionalen Raum bewegen: zur Angabe der Position bezüglich eines Referenzpunktes sind daher drei Größen erforderlich, z. B. wie weit nach rechts oder links, wie weit nach oben oder unten, wie weit nach vorn oder nach hinten. Zur Angabe der Position ist es außerdem erforderlich, drei „Basisrichtungen" anzugeben. Referenzpunkt und Basisrichtungen bilden das „Bezugssystem", in dem die Bewegung beschrieben wird.

Zur Festlegung wesentlicher Begriffe der Kinematik wollen wir zunächst nur Bewegungen betrachten, die nicht wie im allgemeinen Fall drei Freiheitsgrade haben, sondern nur noch einen: entweder gradlinige Bewegungen oder Bewegungen längs festgelegter Bahnen, wie sie z. B. Schienenfahrzeuge ausführen.

2.2.1 Eindimensionale Bewegungen

Hier ist nur noch eine Größe zur Festlegung einer Position bezüglich des Referenzpunktes nötig, diese wird durch die Länge des Weges vom Referenzpunkt und seine Richtung beschrieben, wobei die beiden möglichen Richtungen durch das Vorzeichen festgelegt werden. Üblicherweise definiert man:

- „+": rechts/oben vom Referenzpunkt,
- „–": links/unten vom Referenzpunkt,

wobei der Referenzpunkt selber die Position „null" hat.

Verschiebung und Weg
Zunächst müssen noch zwei Begriffe definiert werden, mit denen die Änderung der Position eines Objektes beschrieben wird: Unter Verschiebung wollen wir die Differenz von Endposition und Anfangsposition des Objektes verstehen (vorzeichenbehaftet!), unter dem zurückgelegten Weg den Betrag der Verschiebung. Verschiebungen können zusammengesetzt werden aus mehreren Teilverschiebungen, deren Summe die gesamte Verschiebung ist. Somit kann eine Verschiebung aus beliebigen Teilverschiebungen zusammengesetzt werden, es müssen nur die Anfangs- und die Endpositionen übereinstimmen. Dagegen kann der zurückgelegte Weg unterschiedlich sein.

Ein Beispiel ist der Wurf eines Objektes senkrecht nach oben: Das Objekt kehrt an seine Ausgangsposition zurück, die Verschiebung ist null, der zurückgelegte Weg jedoch die doppelte Wurfhöhe.

Die Länge des Weges bzw. die Größe der Verschiebung wird angegeben in Einheiten der Basisgröße für Längen:

Basisgröße Länge
Die Einheit für diese Basisgröße ist das Meter. Die Messvorschriften für das Meter haben sich im Laufe der Zeit geändert, wobei die Genauigkeit immer weiter gesteigert wurde:

Zunächst wurde es zu 1/40.000.000 des Erdumfanges festgelegt, aber leider ist die Erde keine ideale Kugel… Dann schuf man ein „Urmeter" aus Pt/Ir in besonders verwindungssteifer

Geometrie, später definierte das Meter die Strecke, die Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Aktuell ist das Meter ein Vielfaches der Wellenlänge des Lichtes eines bestimmten atomaren Überganges.

Basisgröße Zeit
Die Einheit für die Zeit ist die Sekunde. Für die Festlegung von Einheiten für die Zeit eignen sich besonders periodische Vorgänge, deren Ereignisse einen gleichmäßigen zeitlichen Abstand haben.

- astronomisch: Tag/Nacht-Rhythmus, Jahreszeiten
- mechanisch: Pendelschwingungen
- elektrisch: Umladeprozesse in Schwingkreisen
- atomar: Schwingungsdauer des Lichtes eines bestimmten atomaren Übergangs

Auch hier wird die Genauigkeit, mit der man die Einheit angeben kann, gesteigert.

Geschwindigkeit
Bewegungen können schnell oder langsam erfolgen: in der gleichen Zeit wird ein längerer oder ein kürzerer Weg zurückgelegt oder für einen bestimmten Weg wird eine längere oder kürzere Zeit benötigt. Als Maß für die Schnelligkeit einer Bewegung wird die Geschwindigkeit v[1] definiert:

$$\bar{v} := \frac{Verschiebung\ des\ Objekts}{daf\ddot{u}r\ ben\ddot{o}tigte\ Zeit} = \frac{Endposition - Anfangsposition}{Zeitpkt.(E) - Zeitpkt.(A)}$$

$$\bar{v} := \frac{s_E - s_A}{t_E - t_A} := \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

Aus den Basisgrößen für die Länge (Verschiebung) und die Zeit ergibt sich die Einheit für die Geschwindigkeit: $[v]$ = m/s.

Zu beachten ist, dass t_A und t_E das Zeitintervall festlegen, in dem wir die Bewegung untersuchen. Natürlich kann sich das Objekt vorher und auch nachher bewegen. Das Vorzeichen der Geschwindigkeit beschreibt die Bewegungsrichtung, $v > 0$ bedeutet: Bewegung in positive Richtung (von links nach rechts), $v < 0$ die umgekehrte Richtung.

Betrachtet man eine Bewegung etwas genauer, so kann es durchaus vorkommen, dass sich während eines Zeitraumes $\Delta t = t_E - t_A$ die Schnelligkeit ändert. Somit ist die in (2.1) definierte Geschwindigkeit nur als Durchschnitts- oder mittlere Geschwindigkeit anzusehen. Um mehr Informationen über die unterschiedlichen Geschwindigkeiten im Verlauf der Bewegung zu erhalten, werden z. B. im Sport bei Rennen Zwischenzeiten für feste Teilstrecken genommen, aus denen wiederum die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen Teil des Weges ermittelt werden kann. Alternativ können auch feste Zeitintervalle betrachtet werden, aus denen mit dem dabei zurückgelegten Weg die betreffende Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt wird. Je kürzer die Zeitintervalle für die Geschwindigkeitsbestimmung sind, umso genauer kann der Verlauf der Geschwindigkeit während des Bewegungsvorgangs ermittelt werden.

[1] v für velocitas, lat. Geschwindigkeit.

Lässt man im Grenzfall $t_2 - t_1 := \Delta t \to 0$ streben (in dem dann auch $\Delta s \to 0$ strebt), so erhält man die Momentangeschwindigkeit für den Zeitpunkt t_1 (bzw. t_2, da ja t_1 und t_2 im Grenzfall zusammenfallen).

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\bigg|_{t_1} := \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} := \dot{s}(t_1) \tag{2.2}$$

Mathematisch bedeutet die Bildung des Grenzwertes die Ableitung der Ortsfunktion[1] $s(t)$ nach der Zeit.

Besonders anschaulich kann man Bewegungen graphisch beschreiben:

- Im Orts-Zeit-Diagramm[2] werden die Positionen des Objektes über den Zeitpunkten aufgetragen, zu denen sie eingenommen werden. In diesen Diagrammen stellt die Momentangeschwindigkeit die Steigung der Ortsfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt dar.
- Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm werden die Momentangeschwindigkeiten über den dazugehörigen Zeitpunkten aufgetragen.

Auf ein Problem bei der Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit sei noch hingewiesen: bewegt sich ein Objekt von einer Anfangsposition über eine Zwischenposition wieder zur Anfangsposition, so ist die in (2.1) definierte Durchschnittsgeschwindigkeit wegen $s_E = s_A$ null oder $\overline{v}_{\rightarrow} = -\overline{v}_{\leftarrow}$. Im täglichen Leben würde man dagegen die Durchschnittsgeschwindigkeit als $\overline{v}^* = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{v}_{\rightarrow}| + |\overline{v}_{\leftarrow}|)$ definieren[3]. Bei der Definition von Durchschnittswerten physikalischer Größen ist daher immer ihre Definition zu beachten.

Beschleunigung

Ändert sich während eines Bewegungsvorgangs die Momentangeschwindigkeit, so kann dies wiederum unterschiedlich schnell erfolgen. Für viele Autofahrer ist es wichtig zu wissen, wie schnell ihr Fahrzeug z. B. aus dem Stand eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreicht. Als Maß hierfür wird die Beschleunigung a[4] definiert:

$$\overline{a} := \frac{\mathit{Endgeschwindigkeit} - \mathit{Anfangsgeschwindigkeit}}{\mathit{Zeitpunkt}(E) - \mathit{Zeitpunkt}(A)} = \frac{v_E - v_A}{t_E - t_A} := \frac{\Delta v}{\Delta t} .+- \tag{2.3}$$

Die Einheit ergibt sich aus der Einheit für die Geschwindigkeit und der Zeit: $[a] = \mathrm{m/s^2}$. Aus den gleichen Gründen wie bei der Definition der Geschwindigkeit stellt (2.3) wiederum nur die Durchschnitts- oder mittlere Beschleunigung dar. Die Momentanbeschleunigung erhalten wir ähnlich wie die Momentangeschwindigkeit, indem wir $\Delta t \to 0$ gehen lassen:

$$a(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\bigg|_{t_1} := \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} := \dot{v}(t_1) = \ddot{s}(t_1)\,. \tag{2.4}$$

Die Momentanbeschleunigung ist die Ableitung der Momentangeschwindigkeit nach der Zeit und die 2. Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit.

---

1 D. h. die Menge aller Positionen s, die zu den entsprechenden Zeitpunkten t eingenommen werden.
2 Häufig auch Weg-Zeit-Diagramm genannt.
3 Ähnlich wird bei Wechselströmen der Effektivwert berechnet.
4 a für acceleratio, lat. Beschleunigung.

Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm stellt die Beschleunigung die Steigung der Funktion $v(t)$ dar, im Orts-Zeit-Diagramm die Krümmung der Ortsfunktion. Ist $a > 0$, so spricht man von eigentlicher Beschleunigung, bei $a < 0$ dagegen von Bremsen oder Verzögerung.

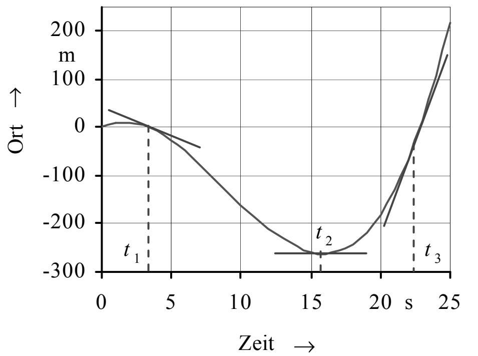


Abb. 2.4 *Weg-Zeit-Diagramm: zum Zeitpunkt t_1 bewegt sich das Objekt zurück ($v < 0$), zum Zeitpunkt t_2 steht es ($v = 0$), und in t_3 ($v > 0$) bewegt es sich vorwärts.*

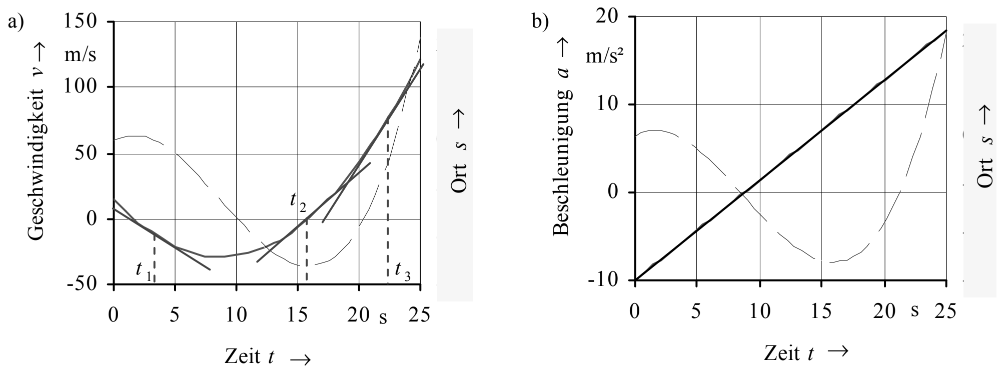


Abb. 2.5 *(a) Die gleiche Bewegung im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm: Abbremsen in t_1, beschleunigen in t_2 und t_3. (b) Beschleunigungs-Zeit-Diagramm Zum Vergleich ist $s(t)$ ebenfalls dargestellt (gestrichelte Linie).*

2.2.2 Spezielle eindimensionale Bewegungen

Gleichförmige Bewegung

Charakteristisch für die gleichförmige Bewegung ist die konstante Geschwindigkeit, somit entspricht die Momentangeschwindigkeit der Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$v = const = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_E - s_A}{t_E - t_A} \quad \Rightarrow \quad s_E = s_A + v(t_E - t_A) \tag{2.5}$$

Bei fester Startposition und festem Startzeitpunkt verändert sich die Endposition linear mit dem Endzeitpunkt der gleichförmigen Bewegung, im Orts-Zeit-Diagramm erhalten wir eine

Gerade, deren Steigung die Geschwindigkeit darstellt. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dokumentiert eine horizontale Gerade mit dem Abstand v zur t-Achse die konstante Geschwindigkeit. Die Verschiebung $\Delta s = s_E - s_A = v(t_E - t_A)$ erscheint in diesem Diagramm als Rechteck mit den Kantenlängen v und $t_E - t_A$. Da die Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit ist, ist somit die Beschleunigung null.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Diese Art von Bewegung zeichnet eine konstante Beschleunigung aus, somit entspricht die Momentanbeschleunigung der Durchschnittsbeschleunigung.

$$a = const = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_E - v_A}{t_E - t_A} \quad \Rightarrow \quad v_E = v_A + a(t_E - t_A) \tag{2.6}$$

Sind die Anfangsgrößen der Bewegung fest, so ändert sich die Endgeschwindigkeit linear mit dem Zeitpunkt des Endes der Bewegung, im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm erhalten wir eine Gerade, ihre Steigung entspricht der Beschleunigung. Stellen wir die gleichmäßig beschleunigte Bewegung im Beschleunigungs-Zeit-Diagramm dar, so erhalten wir eine horizontale Gerade im Abstand a zur t-Achse. Der Geschwindigkeitszuwachs $\Delta v = v_E - v_A = a(t_E - t_A)$ ist in dem Diagramm als Rechteck mit den Kantenlängen a und $t_E - t_A$ zu erkennen.

Zu klären ist noch, wie weit das Objekt in dem Zeitintervall $t_E - t_A$ verschoben wurde bzw. welche Endposition das Objekt erreicht. Verwenden wir die Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit (2.1) und beachten, dass bei einem linearen Verlauf (2.6) der Endgeschwindigkeit die Durchschnittsgeschwindigkeit aus dem arithmetischen Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit berechnet wird, so erhalten wir mit (2.6) für die Verschiebung

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_E - s_A}{t_E - t_A} = \frac{v_E + v_A}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_A \Delta t \tag{2.7}$$

und für die Endposition

$$s_E = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_a \Delta t + s_A \,. \tag{2.8}$$

Wir erhalten also einen quadratischen Zusammenhang zwischen Verschiebung und dem Zeitintervall, in dem wir die Bewegung betrachten. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm entspricht die Verschiebung Δs der Fläche unter der Geraden zwischen t_E und t_A, die gebildet wird aus der Summe der Flächen des Rechtecks mit den Kantenlängen v_A und $t_E - t_A$ und dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $v_E - v_A$ und $t_E - t_A$.

Ein Beispiel für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen ist der freie Fall (konstante Erdbeschleunigung unter Vernachlässigung der Luftreibung), wenn $v_A = 0$ ist. Ist $v_A \neq 0$, so spricht man von einem senkrechten Wurf.

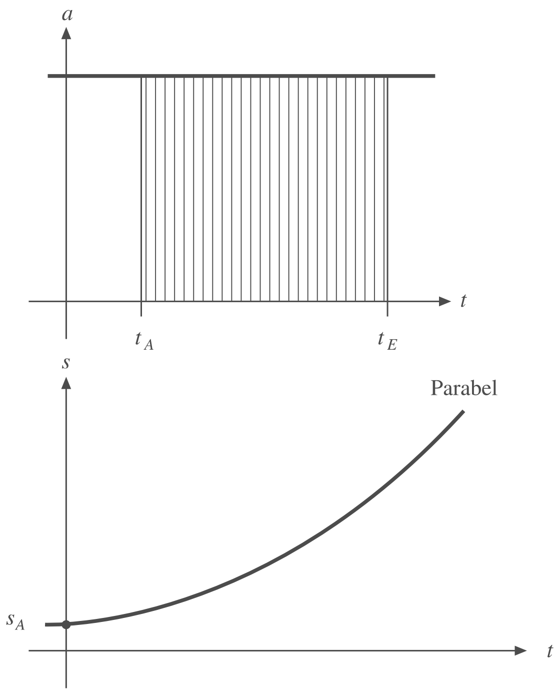


Abb. 2.6 *Gleichmäßig beschleunigte Bewegung im a(t), v(t) und s(t)-Diagramm*

2.2.3 Allgemeiner Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen

Ausgehend von den Zusammenhängen, die wir für die gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Bewegung hergeleitet haben, wollen wir diese für beliebige eindimensionale Bewegungen verallgemeinern.

Durch den Zusammenhang $s(t)$, die Ortsfunktion, ist die Bewegung vollständig beschrieben (wann ist das Objekt wo). Leitet man $s(t)$ nach t ab, so erhält man die (Momentan-) Geschwindigkeit des Objektes in Abhängigkeit von t, leitet man diese wiederum nach t ab, so ergibt sich seine (Momentan-)Beschleunigung.

Ist anderseits der Verlauf der Geschwindigkeit bekannt, so erhält man die in einem Zeitintervall $\Delta t = t_E - t_A$ erfolgte Verschiebung durch Berechnung der Fläche unter der $v(t)$-Kurve im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, begrenzt durch t_A und t_E. Mathematisch bedeutet dies, dass wir $v(t)$ in den Grenzen t_E und t_A integrieren müssen.

$$\Delta s = \int_{t_A}^{t_E} v(t)\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

Zur Berechnung der Endposition s_E muss zusätzlich noch die Anfangsposition s_A bekannt sein.

Analog erhalten wir den Geschwindigkeitszuwachs Δv in einem Zeitintervall Δt, wenn wir die Beschleunigung $a(t)$ integrieren.

$$\Delta v = \int_{\mathrm{t_A}}^{\mathrm{t_E}} a(t)\mathrm{d}t \tag{2.10}$$

Um die Endgeschwindigkeit v_E zu berechnen, muss wiederum zu Δv die Anfangsgeschwindigkeit v_A addiert werden.

Ist der Verlauf der Beschleunigung $a(t)$ bekannt und soll die Verschiebung berechnet werden, so muss $a(t)$ zweimal integriert werden. Zunächst werden die in $\Delta t = t_E - t_A$ möglichen Momentangeschwindigkeiten $v(t)$ mit (2.10) berechnet:

$$\Delta v^* = v(t) - v(t_A) = \int_{\mathrm{t_A}}^{\mathrm{t}} a(t')\mathrm{d}t' = A(t) - A(t_A) \tag{2.11}$$

mit $t_A < t < t_E$, wobei $A(t)$ die „Stammfunktion" von $a(t)$ ist, d. h. $A(t)$ nach t abgeleitet ergibt $a(t)$. Im nächsten Schritt wird dann $v(t)$ integriert.

$$\Delta s = \int_{\mathrm{t_A}}^{\mathrm{t_E}} v(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{t_A}}^{\mathrm{t_E}} (v_A + A(t) - A(t_A))\mathrm{d}t = (v_A + A(t_A))\Delta \mathrm{t} + \int_{\mathrm{t_A}}^{\mathrm{t_E}} A(t)\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

2.2.4 Bewegungszustände und ihre Änderung

Bei der Betrachtung von eindimensionalen Bewegungen wurden verschiedene physikalische Größen eingeführt, die sich aus Änderungen anderer Größen berechnen. Eine physikalische Größe eines Objektes weist zu einem bestimmten Zeitpunkt einen definierten Wert auf: Man sagt dann auch, das Objekt nimmt einen bestimmten Zustand ein. Eine Änderung des Wertes bedeutet somit eine Zustandsänderung oder einen Prozess. Die Größe der Änderung einer physikalischen Größe X wird üblicherweise mit ΔX bezeichnet und berechnet sich immer aus der Differenz zwischen dem Wert der Größe X am Ende des Prozesses und dem Wert am Anfang des Prozesses.

$$\Delta X := X_E - X_A \tag{2.13}$$

Beachtet man diese Festlegung konsequent, so wird es bei künftigen Berechnungen keine Vorzeichenprobleme geben! Der Bewegungszustand eines Objektes wird durch seine aktuelle Position und seine Momentangeschwindigkeit beschrieben.

2.2.5 Bewegungen in zwei und drei Dimensionen

Wie schon erwähnt, sind für die Angabe der Position eines Objektes bezüglich eines Referenzpunktes im dreidimensionalen Raum drei Größen erforderlich. Diese drei Größen fasst man zu einem Ortsvektor zusammen. Häufig nimmt man Verschiebungen vom Referenzpunkt in drei zueinander senkrecht stehende Raumrichtungen, denen man auch die Bezeichnungen x, y und z („rechts-links, vorne-hinten, oben-unten") gibt. Diese Darstellung bezeichnet man auch als kartesische[1] Darstellung und die drei Zahlenwerte kartesische Koordinaten oder Komponenten des Ortsvektors. Das dazugehörige Koordinatensystem, das durch die drei senkrecht aufeinander stehenden Raumrichtungen (Basisrichtungen) aufgespannt wird und seinen Ursprung im Referenzpunkt hat, heißt kartesisches Koordinatensystem.

Anschaulich stellt man einen Ortsvektor als Pfeil vom Referenzpunkt zur Position, die das Objekt einnimmt, dar. Der Pfeil beinhaltet zwei Informationen: die Länge oder den Betrag, beim Ortsvektor die Länge der Strecke oder der Abstand Position-Referenzpunkt und die Richtung des Pfeils. Auch andere physikalische Größen können Informationen über die Richtung aufweisen, wie z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Da die Eigenschaften von Vektoren von großer Wichtigkeit sind, sollen hier deren wesentlichen Eigenschaften vorgestellt werden:

Eigenschaften von Vektoren und vektoriellen physikalischen Größen
Im Gegensatz zu skalaren physikalischen Größen wie z. B. Zeit, Temperatur und Masse, die als Produkt ihres Zahlenwertes, multipliziert mit der Einheit, angegeben werden, weisen vektorielle Größen als zusätzliche Information noch die Richtung auf. Graphisch stellt man eine solche Größe als Pfeil, der in die betreffende Richtung weist, dar, wobei die Länge des Pfeils, der Betrag des Vektors, das Produkt aus Zahlenwert und Einheit der vektoriellen Größe angibt.

Zwei Vektoren können addiert werden, wobei natürlich darauf zu achten ist, dass ihre Einheiten gleich sind.

Graphische Addition und Subtraktion von Vektoren
Wie dies zu geschehen hat, können wir uns am besten anhand einer aus zwei Teilverschiebungen zusammengesetzten Verschiebung verdeutlichen: $\vec{a}$ stelle den Vektor der Verschiebung eines Objektes von der Position P_1 zur Position P_2 dar, d. h. der Anfangspunkt des Vektors ist in P_1, die Pfeilspitze in P_2, $\vec{b}$ die Verschiebung von P_2 nach P_3, dann ist die Verschiebung von P_1 nach P_3 darzustellen als Vektor $\vec{c}$ von P_1 nach P_3, weiterhin ist $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Dies können wir verallgemeinern für die Addition beliebiger vektorieller Größen:

Vektoren werden addiert, indem man den Anfang des zweiten Summanden an die Pfeilspitze des ersten Summanden heftet. Der Summenvektor oder die Resultierende ist dann der Vektor vom Anfangspunkt des ersten Summanden zur Pfeilspitze des zweiten. Die Resultierende bildet die Diagonale des von beiden Summanden aufgespannten Parallelogramms. Wie bei einer Addition skalarer Größen ist auch die Vektoraddition kommutativ, d. h. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

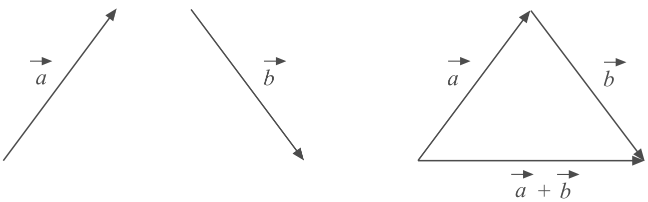


Abb. 2.7 *Addition von Vektoren.*

[1] Nach René Descartes (1596–1650), der diese Darstellung erstmalig eingeführt hat.

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Vektor $-\vec{a}$, den inversen Vektor, der den gleichen Betrag, aber die umgekehrte Richtung hat. Somit können wir auch Vektoren voneinander subtrahieren, indem wir den inversen Vektor addieren: $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$. Der Anfang von $\vec{d}$ liegt in der Pfeilspitze von $\vec{b}$, seine Pfeilspitze weist zur Pfeilspitze von $\vec{a}$.

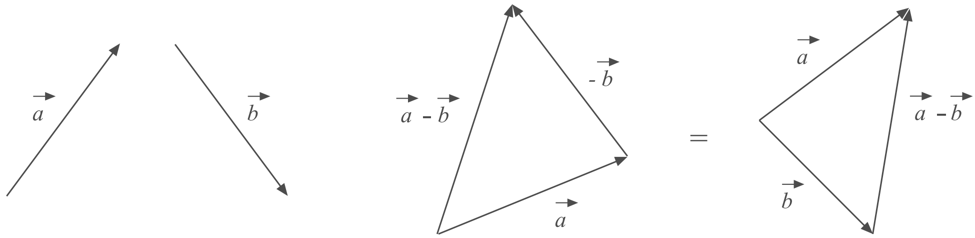


Abb. 2.8 *Subtraktion von Vektoren.*

Rechnerische Addition und Subtraktion von Vektoren, Skalarmultiplikation
Wie im Kapitel 2.2.5 schon gesagt, kann man einen Ortsvektor durch drei Größen oder Komponenten beschreiben, im kartesischen Koordinatensystem sind das die Projektionen des Ortsvektors auf die drei senkrecht aufeinander stehenden Basisrichtungen. Der Ortsvektor kann anderseits auch als Summe der drei Projektionen $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ und $\vec{a}_z$ auf die Basisrichtungen *x*, *y*, und *z* aufgefasst werden. Auch andere vektorielle Größen können in entsprechende Komponenten zerlegt werden. Besonders übersichtlich ist die Spaltenschreibweise von Vektoren[1]

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

wobei a_x, a_y und a_z die Beträge der Projektionen, multipliziert mit dem Vorzeichen für ihre Richtungen längs der *x*-, *y*- und *z*-Achse, sind. (Siehe Konvention für die Richtungen im Kapitel 2.2.1) Da es bei der Addition nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, kann komponentenweise addiert werden:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z + \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z = \vec{a}_x + \vec{b}_x + \vec{a}_y + \vec{b}_y + \vec{a}_z + \vec{b}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Bei der Bildung des inversen Vektors werden alle Komponenten mit –1 multipliziert. Somit wird ein Vektor von einem anderen subtrahiert, indem man die Komponenten voneinander subtrahiert.

[1] Eine Gleichung zwischen Vektoren stellt immer drei Gleichungen für die Komponenten dar.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z-\vec{b}_x-\vec{b}_y-\vec{b}_z=\vec{a}_x-\vec{b}_x+\vec{a}_y-\vec{b}_y+\vec{a}_z-\vec{b}_z$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x-b_x\\a_y-b_y\\a_z-b_z\end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Der Betrag eines Vektors ergibt sich durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras:

$$|\vec{a}|:=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \quad (2.17)$$

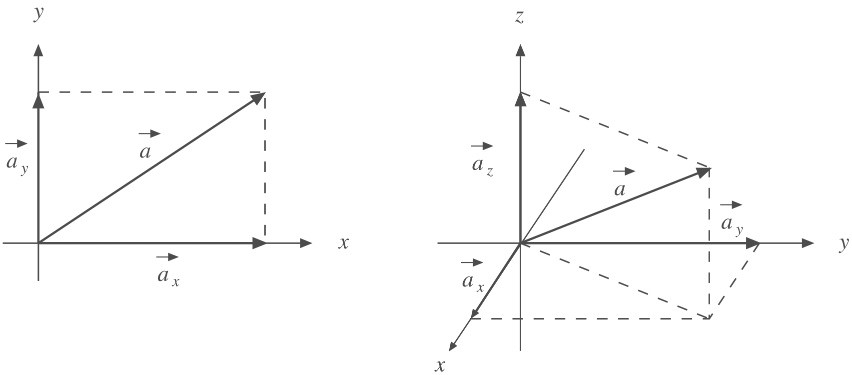


Abb. 2.9 *Komponenten von Vektoren in zwei und drei Dimensionen.*

Addiert man mehrfach den gleichen Vektor, so zeigt die Resultierende in die gleiche Richtung wie der Vektor, ist aber das Vielfache länger. Entsprechend werden die Komponenten vervielfacht. Allgemein darf ein Vektor mit einem Skalar multipliziert werden, die Richtung bleibt erhalten, der Betrag wird mit dem Skalar multipliziert.

$$\alpha\vec{a}=\alpha(\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z)=\alpha\vec{a}_x+\alpha\vec{a}_y+\alpha\vec{a}_z=\alpha\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_x\\\alpha a_y\\\alpha a_z\end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Entsprechend kann aus den Komponenten ein gemeinsamer Faktor „ausgeklammert“ werden. Wird ein Vektor mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert, so erhalten wir einen Vektor vom Betrag 1 (dimensionslos) mit der gleichen Richtung, den Einheitsvektor.

$$\vec{e}_a:=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},|\vec{e}_a|=1 \quad (2.19)$$

Somit können wir eine vektorielle Größe in zwei Faktoren zerlegen: in den Betrag, der den Zahlenwert und die Einheit beinhaltet und den Einheitsvektor für die Richtung.

$$\vec{a}=\{a\}[a]\vec{e}_a \quad (2.20)$$

Spezielle Einheitsvektoren sind die der drei Basisrichtungen. Jeden Vektor kann man somit schreiben:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \tag{2.21}$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung als vektorielle Größen
Analog zu (2.1) wird die Durchschnittsgeschwindigkeit einer Bewegung in drei Dimensionen definiert als

$$\bar{\vec{v}} := \frac{\textit{Verschiebung des Objekts}}{\textit{dafür benötige Zeit}} = \frac{\textit{Endposition} - \textit{Anfangsposition}}{\textit{Zeitpkt.}(E) - \textit{Zeitpkt.}(A)}$$

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{s}_E - \vec{s}_A}{t_E - t_A} := \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}, \tag{2.22}$$

wobei die Positionen durch Ortsvektoren dargestellt werden. Die auf Seite 18 eingeführte Ortsfunktion $\vec{s}(t)$ ist nun eine vektorielle Größe mit den Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$, welche die Menge aller Ortsvektoren darstellt, die die Positionen, die das Objekt im Verlauf seiner Bewegung einnimmt, beschreibt. Die Menge der Pfeilspitzen zeigt auf die Bahnkurve, längs der sich das Objekt bewegt, die Zeit t ist ihr Parameter. Geometrisch stellt die Verschiebung in (2.22) die Sekante der Bahnkurve zwischen End- und Anfangsposition dar, sozusagen die gradlinige „Abkürzung" vom wirklichen Weg. Bilden wir nun wie in (2.2) den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$, um die Momentangeschwindigkeit zu erhalten, so wird aus der Sekanten eine Tangente an die Bahnkurve, die in die Richtung der Momentangeschwindigkeit weist.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}\bigg|_{t_1} := \frac{\mathrm{d}\vec{s}(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} := \dot{\vec{s}}(t_1) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \\ \dot{z}(t_1) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Entsprechend wird die Momentanbeschleunigung als Ableitung der Funktion der Momentangeschwindigkeiten nach der Zeit berechnet:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\bigg|_{t_1} := \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} := \dot{\vec{v}}(t_1) = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{s}}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} = \ddot{\vec{s}}(t_1) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_1) \\ \ddot{y}(t_1) \\ \ddot{z}(t_1) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Zu beachten ist, dass eine Beschleunigung vorliegt, wenn sich entweder der Betrag der Geschwindigkeit und/oder ihre Richtung ändern.

Dies kann man anhand der Eigenschaft (2.20) beliebiger vektorieller Größen $\vec{q}$ durch Anwenden der Produktregel beim Ableiten verallgemeinern:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\vec{q}|\,\vec{e}_q) = \frac{\mathrm{d}\,|\vec{q}|}{\mathrm{d}t}\vec{e}_q + |\vec{q}|\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_q}{\mathrm{d}t} \tag{2.25}$$

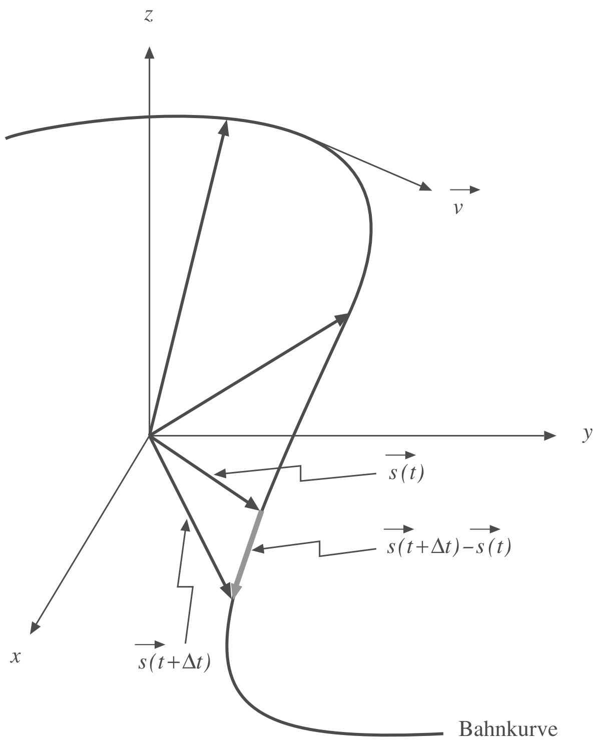


Abb. 2.10 *Geschwindigkeitsvektor bei einer Bewegung in drei Dimensionen.*

Der erste Summand beschreibt die Änderung des Betrages von $\vec{q}$ und weist in Richtung von $\vec{q}$ (Tangentialkomponente von $\dot{\vec{q}}$), der zweite dagegen beschreibt die Änderung der Richtung von $\vec{q}$, er ist senkrecht zu $\vec{q}$ gerichtet (Normalkomponente von $\dot{\vec{q}}$). Diese Tatsache kann folgendermaßen begründet werden: Der bei der Ableitung $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_q}{\mathrm{d}t}$ zu bildende Differenzvektor $\mathrm{d}\vec{e}_q = \vec{e}_q(t + \mathrm{d}t) - \vec{e}_q(t)$ verbindet die Pfeilspitzen beider Summanden. Das von diesen drei Vektoren gebildete gleichschenklige Dreieck (die Beträge der Summanden sind 1) ist extrem spitzwinklig, d. h. der eingeschlossene Winkel ist ≈ 0, da sich die Richtung von $\vec{e}_q$ in der Zeitspanne dt nur sehr wenig ändert. Aufgrund der Winkelsumme von 180° im Dreieck betragen die beiden anderen Winkel jeweils 90°, $\mathrm{d}\vec{e}_q \perp \vec{e}_q$ und damit auch $|\vec{q}|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_q}{\mathrm{d}t}$.

Überlagerung von gradlinigen Bewegungen

Die Zerlegung des Ortsvektors in drei senkrecht zueinander gerichtete Komponenten legt nahe, komplexe Bewegungen in einfachere Teilbewegungen in die drei Raumrichtungen zu zerlegen oder umgekehrt einfache gradlinige Bewegungen zu komplizierteren räumlichen Bewegungen zusammenzusetzen.

Als Beispiel betrachten wir ein Boot, das einen Fluss, welcher mit einer überall konstanten Geschwindigkeit fließt, überqueren soll, wobei die Bootsgeschwindigkeit relativ zum Wasser auch als konstant angenommen wird. Welche Bewegung bezüglich eines Referenzpunktes am Flussufer führt das Boot aus?

Bezeichnen wir die Flussrichtung mit x, die Bewegungsrichtung des Bootes mit y, so bewegt sich das Boot gleichförmig bezüglich eines Referenzpunktes im Wasser, dieser bewegt sich wiederum bezüglich des Referenzpunkts am Ufer:

$$\vec{v}_{Boot,Ufer} = \vec{v}_{Boot,Fluß} + \vec{v}_{Fluß,Ufer} = \begin{pmatrix} v_F \\ v_B \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

In diesem Fall liegt eine Bewegung in zwei Dimensionen vor, daher können wir die dritte Komponente der Vektoren zu null setzen oder auch weglassen. Zum Zeitpunkt t_E hat das Boot die Position

$$\vec{s}_E = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_F(t_E - t_A) \\ v_B(t_E - t_A) \end{pmatrix} = \vec{s}_A + \begin{pmatrix} v_F \\ v_B \end{pmatrix}(t_E - t_A) \quad \vec{s}_E = \vec{s}_A + \vec{v}(t_E - t_A) \tag{2.27}$$

bezüglich des Uferpunktes erreicht. $\vec{s}_A$ mit den Komponenten x_A und y_A ist die Position des Bootes zum Anfang der Bewegung bezüglich der Referenzpunkte des Bootes zum Wasser und des Wassers zum Ufer.

Die Bahnkurve $y(x)$, längs der die Pfeilspitzen der Ortsvektoren während der Bewegung verlaufen, erhalten wir durch Elimination von $\Delta t = t_E - t_A$ aus den beiden Komponentengleichungen von (2.27)

$$y(x) = y_A + \frac{v_B}{v_F}(x - x_A) = \frac{v_B}{v_F}x - \frac{v_B}{v_F}x_A + y_A := \alpha x + \beta\,. \tag{2.28}$$

Die Bahnkurve stellt eine Gerade dar mit der Steigung $\alpha = v_B / v_F$, wobei allgemein die Steigung einer Geraden definiert ist als Tangens des Winkels der Geraden zur x-Achse.

Vergleichen wir die Gleichungen (2.5) und (2.27), so sind sie formal gleich, nur sind einige Größen Vektoren. Wir können somit alle Zusammenhänge eindimensionaler Bewegungen für Bewegungen in zwei oder drei Dimensionen verwenden, wenn wir entsprechende Größen durch vektorielle Größen ersetzen. Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen erhalten wir somit

$$\vec{v}(t_E) = \vec{v}(t_A) + \vec{a}(t_E - t_A)\,, \tag{2.29}$$

$$\vec{s}(t_E) = \frac{1}{2}\vec{a}(t_E - t_A)^2 + \vec{v}(t_A)(t_E - t_A) + \vec{s}(t_A)\,. \tag{2.30}$$

Einen Sonderfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegungen stellen Würfe dar, d. h. Bewegungen unter Einfluss der konstanten Erdbeschleunigung, wobei die Wirkung der Luftreibung vernachlässigt wird.

Da die Bewegung auf eine Ebene, die aufgespannt wird durch die Richtungen der Anfangsgeschwindigkeit und der Beschleunigung, beschränkt ist, benötigen wir nur Vektoren mit zwei Komponenten. Die Basisrichtungen sind in der Horizontalen in Richtung der Bewegung (x) und in der Vertikalen nach oben (y). Die Beschleunigung wirkt nur in der y-Richtung nach unten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = -g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Damit ergeben sich Momentangeschwindigkeiten und die während der Bewegung eingenommenen Positionen zu

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_A) - g(t - t_A)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

$$\vec{s}(t) = \vec{s}(t_A) + \vec{v}(t_A)(t - t_A) - \frac{1}{2}g(t - t_A)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Wir sehen, dass die Bewegung in der Horizontalen eine gleichförmige Bewegung, in der Vertikalen eine Wurfbewegung ist. Die Bahnkurve $y(x)$ erhalten wir, indem wir aus den beiden Gleichungen in (2.33) $\Delta t = t_E - t_A$ eliminieren.

$$y(x) = y_A + \frac{v_{A,y}}{v_{A,x}}(x - x_A) - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_A}{v_{A,x}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = -\frac{g}{v_{A,x}^2}x^2 + \frac{v_{A,y} + gx_A}{v_{A,x}}x + y_A - \frac{v_{A,x}}{v_{A,y}}x_A - \frac{gx_A^2}{2v_{A,x}^2} := \alpha x^2 + \beta x + \gamma\,, \tag{2.34}$$

hierbei ist $v_x(t_A) = v_{A,x}$. Die Bahnkurve ist somit eine nach unten geöffnete Parabel, die „Wurfparabel“ des „schiefen“ Wurfes. Häufig wird die Anfangsgeschwindigkeit auch durch den Abwurfwinkel ϑ_A zur x-Achse und den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit v_A beschrieben.

$$\vec{v}(t_A) := \vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_A\cos\vartheta_A \\ v_A\sin\vartheta_A \end{pmatrix} = v_A\begin{pmatrix} \cos\vartheta_A \\ \sin\vartheta_A \end{pmatrix} = v_A\vec{e}_{v_A} \tag{2.35}$$

Die Darstellung eines Vektors über seinen Betrag und den Winkel zur x-Achse nennt man auch Polardarstellung. Der Winkel φ der Momentangeschwindigkeit zur x-Achse beträgt

$$\tan\varphi = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{v_{A,y} - gt}{v_{A,x}} = \tan\vartheta_A - \frac{gt}{v_{A,x}}\,. \tag{2.36}$$

Als Wurfweite w definiert man den Abstand von Anfangsposition und Endposition in der Horizontalen. Wir können sie aus (2.33) berechnen.

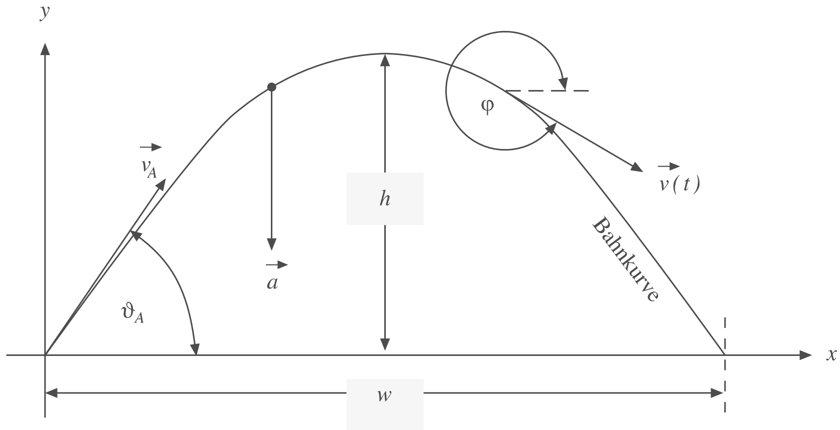


Abb. 2.11 *Schiefer Wurf.*

Sind Starthöhe und Auftreffhöhe gleich (null), so berechnen wir die Wurfweite w über die Flugzeit $\Delta t = t_E - t_A$, die wir aus der Bedingung, dass das Objekt am Ende der Bewegung wieder die Starthöhe erreicht hat, erhalten.

$$y_E = y_A = 0 = v_{A,y} t_E - \frac{g}{2} t_E^2 \Rightarrow t_E = \frac{2v_{A,y}}{g}$$

$$\Rightarrow w := x_E - x_A = \frac{2v_{A,x} v_{A,y}}{g} = \frac{v_A \sin 2\vartheta_A}{g} \qquad (2.37)$$

Wird bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit ϑ_A variiert, so wird die Wurfweite maximal bei $\vartheta_A = 45°$. Die maximale Höhe h ergibt sich aus der Bedingung, dass die vertikale Geschwindigkeit im Umkehrpunkt null wird. Aus (2.33) folgt für den Zeitpunkt $t(h)$, bei dem die maximale Höhe erreicht wird

$$v_y(t(h)) = 0 = v_{A,y} - gt(h) \Rightarrow t(h) = \frac{v_{A,y}}{g} \Rightarrow$$

$$h = \frac{2v_{A,x} v_{A,y}}{g} = \frac{v_{A,y}^2}{2g} = \frac{v_A^2 \sin^2 \vartheta_A}{2g}. \qquad (2.38)$$

Offensichtlich wird die Höhe maximal bei einem Wurf senkrecht nach oben.

Dass man die Wurfbewegung als Überlagerung von gleichförmiger und gleichmäßig beschleunigter Bewegung auffassen kann, demonstriert ein einfaches Experiment: zwei Kugeln, von denen eine einen freien Fall, die andere einen waagerechten Wurf mit $\vartheta_A = 0°$ aus gleicher Höhen vollführen, benötigen die gleiche Flugzeit, bei gleichzeitigem Start kommen sie auch gleichzeitig auf dem Boden auf.

Werden gradlinige beschleunigte Bewegungen überlagert, so entstehen in der Regel Bewegungen mit krummlinigen Bahnkurven.

Kreisbewegungen
Ein anderer Typ von Bewegungen in einer Ebene sind Kreisbewegungen, d. h. die Bahnkurve des Objektes ist ein Kreis.

Zunächst wollen wir eine Kreisbewegung betrachten, bei der die Umlaufgeschwindigkeit oder Bahngeschwindigkeit, genauer gesagt ihr Betrag konstant ist. Für einen Kreisumlauf wird immer die gleiche Zeit benötigt, daher ist die Bewegung periodisch, d. h. befindet sich das kreisende Objekt zu einem Zeitpunkt t an einer Position $\vec{s}\,(t)$, so befindet es sich eine Umlaufzeit T oder Periodendauer später wieder an der gleichen Position und hat dort auch wieder die gleiche Geschwindigkeit: $\vec{s}(t+T)=\vec{s}(t)$. Der Vektor der Geschwindigkeit, tangential zum Kreis gerichtet, ändert ständig seine Richtung, die Kreisbewegung ist somit eine beschleunigte Bewegung, die Richtung der Beschleunigung ist senkrecht zur Tangente an den Kreis und somit radial. Daher heißt die Beschleunigung auch Radial- oder Zentripetalbeschleunigung, da die Richtungsänderungen der Geschwindigkeit zum Kreismittelpunkt weisen. Da die Beschleunigung permanent ihre Richtung ändert, ist sie nicht konstant, daher ist eine Kreisbewegung immer eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Zur quantitativen Beschreibung platzieren wir den Referenzpunkt in den Kreismittelpunkt, für die Bewegung ist dann der Abstand des Objektes vom Referenzpunkt gleich dem Kreisradius r und damit immer konstant. Zur Bestimmung der Position benötigen wir nur noch den Winkel φ [1], den der Ortsvektor mit z. B. der x-Achse des Koordinatensystems bildet. Allgemein nennt man Koordinaten, bei denen die Position durch den Abstand zu einem Referenzpunkt und einen Winkel zu einer Referenzrichtung beschrieben wird, Polarkoordinaten.

Während der Bewegung ändert sich der Winkel um $\Delta\varphi = \varphi\,(t_E) - \varphi\,(t_A)$, das Objekt passiert das dazugehörige Bogenstück. Ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant, so gilt

$$|\,\vec{v}\,| = const \quad \Rightarrow \quad \frac{Bogen}{\Delta t} = \frac{Umfang}{T} = \frac{|\,\Delta\varphi\,|}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{2.39}$$

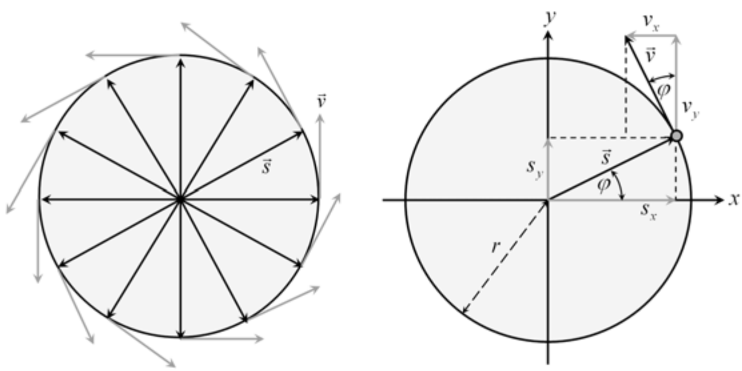


Abb. 2.12 *Kreisbewegung.*

[1] Gemäß der mathematischen Konvention werden Winkel gegen den Uhrzeigersinn abgetragen.

Die Änderung des Winkels $\Delta\varphi$ entspricht der Verschiebung Δs bei eindimensionalen Bewegungen. Daher definieren wir die Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$
$$\text{gleichförmige Kreisbewegung: } |\omega| = \frac{2\pi}{T} = const\,, \quad [\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.40}$$

Bei einer Kreisbewegung gegen den Uhrzeigersinn ist ω positiv, wird im Uhrzeigersinn gedreht, ist ω negativ. In der Technik wird statt der Winkelgeschwindigkeit oft die Drehzahl n oder die Frequenz ν verwendet. Sie sind folgendermaßen definiert:

$$n := \frac{\textit{Zahl der Umdrehungen}}{\textit{benötigte Zeit}} = \frac{N}{NT} = \frac{1}{T} = \nu\,, \quad [n] = [\nu] = \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2.41}$$

Beschreiben wir den Ortsvektor $\vec{s}$ durch die Größen Kreisradius r und den Winkel φ, so erhalten wir mit (2.40)

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi(t) \\ r\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = r\vec{e}_s = r\vec{e}_r\,, \tag{2.42}$$

wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ $\varphi = 0$ ist, d. h. der Ortsvektor verläuft längs der x-Achse. Die Richtung des Ortsvektors ist immer radial. Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten wir durch Ableiten von $\vec{s}(t)$ unter Beachtung der Kettenregel:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t) = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} = |\vec{v}|\,\vec{e}_v \tag{2.43}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = r\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega\begin{pmatrix} -\omega\cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \end{pmatrix} = -r\omega^2\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = |\vec{a}|\,\vec{e}_a = -|\vec{a}|\,\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r \tag{2.44}$$

Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht auf dem Ortsvektor, der Beschleunigungsvektor verläuft antiparallel zum Ortsvektor. Sein Betrag ist konstant.

Im Fall der ungleichförmigen Kreisbewegung ändern sich der Betrag der Bahngeschwindigkeit und damit auch die Winkelgeschwindigkeit. Analog (2.4) definieren wir die Bahn- oder Tangentialbeschleunigung:

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{v}(t+\Delta t)| - |\vec{v}(t)|}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = r\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.45}$$

Die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ bezeichnet man als Winkelbeschleunigung α.

$$\alpha := \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}, \quad [\alpha] = \frac{1}{\mathrm{s}^2} \tag{2.46}$$

Die gesamte Beschleunigung des Objektes berechnet sich aus (2.44):

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\vec{e}_v) = r(\dot{\omega}\vec{e}_v + \omega\dot{\vec{e}}_v) = r\dot{\omega}\vec{e}_v - r\omega^2\vec{e}_r = \vec{a}_t + \vec{a}_r \tag{2.47}$$

Wir erkennen eine tangentiale Komponente in Richtung der Geschwindigkeit und eine radiale Komponente senkrecht dazu. Die tangentiale Beschleunigung ändert den Betrag der Geschwindigkeit, die radiale dagegen ihre Richtung. Dies gilt nicht nur für Kreisbewegungen, sondern für beliebige Bewegungen, da man immer die Beschleunigung in eine tangentiale und eine dazu senkrechte radiale Komponente zerlegen kann.

Ein Sonderfall der ungleichförmigen Kreisbewegung ist die gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung mit konstanter Winkelbeschleunigung. Analog zur eindimensionalen gleichmäßig beschleunigten Bewegung (2.44) ändert sich die Winkelgeschwindigkeit linear mit der Zeit:

$$\alpha = const = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_E - \omega_A}{t_E - t_A} \Rightarrow \omega_E = \omega_A + \alpha(t_E - t_A) \tag{2.48}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 + \omega_A\Delta t \tag{2.49}$$

Vergleichen wir die Ausdrücke von Bahn- und Winkelgeschwindigkeit, von Tangential- und Winkelbeschleunigung, von Bogen und Winkel, so fällt auf, dass sich die Bahn-Größe durch Multiplikation der korrespondierenden Winkel-Größe mit dem Kreisradius berechnen lässt:

Tab. 2.1 *Zusammenhang zwischen Winkel- und Bahngrößen bei der Kreisbewegung.*

Winkel-Größe		**Bahn-Größe**	
Winkel	φ	Bogen	$r\varphi$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$	Bahngeschwindigkeit	$r\omega$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \ddot{\varphi}$	Tangentialbeschleunigung	$r\alpha$

Abschnittsweise kann man auch Wurfbewegungen mit parabolischen Bahnen als Kreisbewegungen auffassen, wenn wir die konstante Beschleunigung in ihre (nicht konstanten) Tangential- und Normalkomponenten zerlegen. Aus dem Betrag der Normalkomponente kann man mit (2.44) den Radius des Kreises, der sich an die Parabel anschmiegt, berechnen. Da sich der Betrag der Normalkomponenten ändert, ändert sich auch der Radius des Schmiegekreises. Er ist minimal im Scheitelpunkt der Parabel.

Überlagerung nicht gradliniger Bewegungen
Beispiele hierfür sind Bewegungen auf Schraubenlinien oder auf Zykloiden, wie sie z. B. Reifenventile während der Fahrt ausführen.

Schraubenlinien sind „echte“ dreidimensionale Bewegungen, in der *x*/*y*-Ebene erfolgt eine Kreisbewegung, in der *z*-Richtung eine gradlinige Bewegung. Ist diese gleichförmig, so lautet die Ortsfunktion $\vec{s}(t)$ bei entsprechend gewähltem Koordinatensystem (Ursprung im Kreismittelpunkt bei $z = 0$):

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ v_z t \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

2.3 Dynamik von Massenpunkten

Im vorigen Abschnitt haben wir bei der Betrachtung von Bewegungen Art und Eigenschaften des sich bewegenden Objektes außer Acht gelassen. Der Bewegungszustand wurde beschrieben durch die Geschwindigkeit, Beschleunigungen bewirkten seine Änderung.

Erstmalig hat Newton[1] 1687 in der auch heute noch gültigen Form die Zusammenhänge aufgezeigt, wie die Eigenschaften der Objekte ihre Bewegungen beeinflussen. Diese Zusammenhänge sind als Axiome formuliert, d. h. sie sind nicht aus noch allgemeineren Gesetzmäßigkeiten herleitbar, sie erlauben jedoch die korrekte, mit experimentellen Erfahrungen übereinstimmende Beschreibung der Sachverhalte in der klassischen Mechanik.

2.3.1 Erstes Newtonsches Axiom

Dieses Axiom, auch Trägheitsaxiom genannt, besagt, dass ohne äußere Beeinflussung jedes Objekt seinen Bewegungszustand beibehält, es bleibt entweder in Ruhe oder bewegt sich gradlinig gleichförmig, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Diese Erkenntnis war zu Zeiten Newtons revolutionär, den damaligen Alltagserfahrungen zufolge, war es z. B. immer erforderlich, einen Wagen in ebenen Gelände zu schieben oder zu ziehen, um eine konstante Geschwindigkeit beizubehalten. Ohne äußere Beeinflussung hätte er seinen Bewegungszustand in den Ruhezustand verändert. Newton hatte erkannt, dass in diesem Beispiel schon die Reibungseffekte eine äußere Beeinflussung des Wagens darstellten, die dann durch eine weitere Beeinflussung kompensiert werden musste.

Dem Trägheitsaxiom zufolge kann nicht zwischen ruhenden und gleichförmig bewegten Referenz- oder Bezugssystemen unterschieden werden. Durch diesen Effekt kann man z. B. getäuscht werden, wenn man in einen ganz langsam anfahrenden Zug sitzt und meint, der Bahnsteig bewege sich nach hinten weg. Bezugssysteme, die sich gleichförmig zueinander bewegen, nennt man Inertialsysteme, da in ihnen unabhängig von der Relativgeschwindig-

[1] I. Newton (1643–1727).

keit der Bezugssysteme untereinander das Trägheitsaxiom gilt, d. h. Objekte behalten in allen Inertialsystemen ihre jeweiligen Bewegungszustände bzw. Geschwindigkeiten bei. Da alle Inertialsysteme gleichwertig sind, gibt es auch keines mit „absoluter" Ruhe.

Andere Bezugssysteme bewegen sich beschleunigt, in solchen Bezugssystemen beobachtet man auch ohne äußere Beeinflussung eine Änderung des Bewegungszustandes. Insbesondere stellt die Erde aufgrund ihrer Rotationsbewegung um sich selbst und um die Sonne kein Inertialsystem dar. Man kann sie nur näherungsweise als solches betrachten, wenn die betrachteten Zeiträume klein gegen die Umdrehungszeiten sind.

Die Änderung des Bewegungszustandes kann bei verschiedenen Objekten einen unterschiedlichen „Aufwand" erfordern oder unterschiedliche Effekte nach sich ziehen: Kommt ein LKW nach einem Zusammenprall mit einer Mauer zur Ruhe, so hat dies ganz andere „Auswirkungen" als ein Zusammenprall mit einem Fahrrad gleicher Geschwindigkeit. Newtons Idee besteht unter anderem darin, in die Beschreibung des Bewegungszustandes auch noch Eigenschaften des sich bewegenden Objektes einfließen zu lassen, daher wird in der Newtonschen Dynamik der Bewegungszustand durch den „Schwung" oder den Impuls des Objektes beschrieben, in dem neben der Geschwindigkeit auch noch die (träge) Masse des Objektes berücksichtigt wird. Ein derartiges Objekt, dessen konkrete Gestalt keine Rolle spielt, nennt man auch eine „Punktmasse" oder einen „Massenpunkt". Dessen Impuls ist folgendermaßen definiert:

$$\vec{p} := m\vec{v}\,, \quad [p] = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.51}$$

Da wir im Folgenden weitere Eigenschaften der Objekte wie z. B. Form oder Gestalt nicht berücksichtigen wollen, können wir uns die Masse des Objektes auf einen Punkt konzentriert denken und die Bewegung von Massenpunkten betrachten.

Basisgröße Masse

Anschaulich stellt die Masse eines Objektes die Menge an Materie dar, die das Objekt beinhaltet. Die Einheit für diese Basisgröße ist das Kilogramm. Es wird dargestellt durch einen Zylinder aus Platin-Iridium, der sich im Internationalen Büro für Maß und Gewicht in Sèvres befindet.

2.3.2 Mengenartige physikalische Größen

Teilt sich während einer Bewegung ein Objekt in zwei Teilobjekte, die die gleiche Geschwindigkeit haben wie das Ausgangsobjekt, so teilt sich der Impuls in zwei Teilimpulse auf. Man schreibt dem Impuls die „Mengeneigenschaft" zu, d. h. der Impuls „wächst" mit der „Größe" des Objektes. In diesem Fall wird die Größe durch die Masse des Objektes, die Menge an Materie, repräsentiert. Impuls und Masse fallen in die Kategorie „extensive" Größen, Größen, die mit der Masse des Objektes wachsen. Dagegen sind Geschwindigkeit, Beschleunigung… „intensive" Größen, sie ändern sich nicht, wenn sich die Masse des Objektes ändert (siehe Teilung des Objektes).

Der Impuls als mengenartige Größe setzt sich aus zwei Faktoren zusammen: einer intensiven Größe (Geschwindigkeit) und einer extensiven „Impulskapazität" (Masse). Ähnlich einem elektrischen Kondensator, der Ladung speichern kann bei einer bestimmten Spannung, bestimmt die Masse als Impulskapazität die Fähigkeit eines Objektes, bei einer bestimmten Geschwindigkeit Impuls aufzunehmen.

Mengenartige Größen werden auch in anderen Gebieten der Physik[1] verwendet, sie sind immer definiert als

$$G_{extensiv} = Kapazität_G \cdot H_{intensiv} \tag{2.52}$$

Mengenartige Größen werden für bestimmte Objekte oder eine Ansammlung von Objekten (Systeme) festgelegt. Diese sind abgegrenzt von anderen Objekten oder Systemen oder vom „Rest der Welt“, der „Umgebung“[2]. Eine besondere Kategorie von mengenartigen Größen eines Systems sind solche, die ihren Wert nicht ändern, obwohl sich der Zustand des Systems ändert. Diese nennt man auch „Erhaltungsgrößen“. Eine Erhaltungsgröße G kann sich nur ändern, wenn über die Grenze des Systems ein entsprechender Strom I_G fließt:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = I_G \tag{2.53}$$

Der Impuls ist oft eine solche Erhaltungsgröße, daher kann z. B. das Objekt in beliebige Teilobjekte zergliedert werden, ohne dass sich der Impuls für das Gesamtobjekt ändert.

2.3.3 Zweites Newtonsches Axiom

Um den Bewegungszustand eines Objektes, d. h. seinen Impuls zu ändern, muss ein Impulsstrom fließen. Diesen Impulsstrom nennt man Kraft. Der Impuls $\vec{p}$ eines Objektes wird also durch Kräfte $\vec{F}$ geändert.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = I_p := \vec{F}\,, \quad [F] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} := \mathrm{N} \tag{2.54}$$

Die Einheit der Kraft wurde zu Ehren von Newton nach ihm benannt. Weil die Änderung eines Zustandes immer eine „Aktion“ ist, nennt man das 2. Newtonsche Axiom auch „Aktionsprinzip“. (2.54) zufolge kann eine Impulsänderung auf zweierlei Weise geschehen:

- durch Zu- oder Abfuhr von Masse (Massenströme), die die gleiche Geschwindigkeit wie das Objekt aufweist,
- durch Änderung der Geschwindigkeit des Objektes bei konstanter Masse.

Den zweiten Fall, der in der Praxis weitaus häufiger vorkommt, beschreibt man im „Grundgesetz der Mechanik“:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.55}$$

---

[1] Beispiele: Ladung = Kapazität · Spannung; Wärmemenge = Wärmekapazität · Temperatur.
[2] Diese Begriffe werden in der Thermodynamik besonders wichtig.