

De Gruyter Studium

Reinhardt · Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Hans-Jürgen Reinhardt

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Anfangs- und Randwertprobleme

2. überarbeitete Auflage

De Gruyter

Mathematics Subject Classification 2010: Primary: 65Lxx; Secondary: 65-01, 65L05, 65L10, 65L20.

ISBN: 978-3-11-028045-6
e-ISBN: 978-3-11-028046-3

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.dnb.de>.

© 2012 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Typesetting: Da-TeX Gerd Blumenstein, Leipzig, www.da-tex.de

Printing and binding: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

∞Printed on acid-free paper

Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort zur zweiten Auflage

In der zweiten Auflage wurden Ergänzungen in fast allen Kapiteln und in den Anhängen A, B vorgenommen sowie der Index erweitert und Fehler beseitigt. Ein Schwerpunkt der Ergänzungen lag in dem Abschnitt über steife Differentialgleichungen, wo der Stoff etwas anders präsentiert und weitere geeignete Verfahren aufgenommen und analysiert worden sind. Am Ende von Kapitel 3 wurde der Zusammenhang der Stabilitätsgebiete von Mehrschrittverfahren und Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme hergestellt. Die Literaturliste wurde erweitert und aktualisiert, wodurch an geeigneten Stellen Alternativen für die Beweise und Verallgemeinerungen der Ergebnisse genannt werden konnten. Dem De Gruyter Verlag sei für die konstruktive Zusammenarbeit und für Anregungen für die zweite Auflage gedankt.

Siegen, im August 2012

Hans-Jürgen Reinhardt

Vorwort zur ersten Auflage

Im vorliegenden Buch ist das Material einer einsemestrigen Vorlesung über Näherungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen zusammengestellt, die der Autor wiederholt – zuletzt im WS 2006/07 – an der Universität Siegen gehalten hat. Es werden sowohl Anfangswertprobleme als auch Randwertprobleme betrachtet. Außerdem sind auch immer Systeme von Differentialgleichungen eingeschlossen, auch wenn die Darstellung sich aus Gründen der Übersichtlichkeit gelegentlich auf skalare Gleichungen beschränkt. Die untersuchten Methoden lassen sich auch unter dem Begriff „Differenzenapproximationen“ einordnen. Dies trifft sogar auf die Galerkin-Verfahren für Anfangswertprobleme bzw. Randwertprobleme (in Abschnitt 2.10 bzw. Kapitel 6) zu, die sich im einfachsten Fall stückweise konstanter oder stückweise linearer Ansatzfunktionen auch als Differenzenverfahren schreiben lassen.

Einige der untersuchten Verfahren werden nur in Übersichtsform vorgestellt, ohne alles vollständig auszuführen. Hinsichtlich weitergehender Darstellungen sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Einige Aspekte werden dagegen in diesem Buch vertieft, die man üblicherweise nicht in Lehrbüchern findet – z. B. die Kompaktheitsmethoden in Kapitel 5, die adaptiven Gitterkonstruktionen in Kapitel 2 und 8. In jedem Fall werden die Verfahren immer so weit ausgeführt, dass diese auf einem Computer implementiert werden können. Daher ist das vorliegende Buch auch für Anwender geeignet, die an der praktischen Umsetzung der Verfahren für die jeweiligen Problemstellungen als auch an den wesentlichen Eigenschaften wie Stabilität, Konsistenz und insbesondere Konvergenz mit zugehörigen Fehlerabschätzungen interessiert sind.

Der Stoff des Buches wird ergänzt durch die theoretischen Übungsaufgaben in Anhang B, die alle mit entsprechenden Musterlösungen versehen sind. Außerdem ist in Anhang A eine kompakte Übersicht über die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zusammengestellt – auch hier wieder für Anfangs- und Randwertprobleme. In Anhang C werden praktische Aufgaben für eine Reihe von Anfangs- und Randwertaufgaben gestellt und deren numerische Lösungen mit verschiedenen Verfahren in Tabellenform und mithilfe von Abbildungen gezeigt. Das Buch schließt mit Literatur-, Abbildungs-, Tabellenverzeichnissen und einem ausführlichen Index.

Das ursprüngliche Skriptum wurde von Frau M. Beier mit \LaTeX erstellt und später von Frau K. Mielke ergänzt, die es schließlich auch in Buchform gebracht hat. Meine Mitarbeiter Dipl.-Math. R. Ansorge, Dr. rer. nat. M. Charton und M. Sc. I. Cherlenyak

haben die theoretischen und praktischen Übungsaufgaben zusammengestellt und betreut. Ihnen und meinen Studenten sei für ihren Einsatz und ihre Mitarbeit herzlich gedankt.

Siegen, im Januar 2008

Hans-Jürgen Reinhardt

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten Auflage	v
Vorwort zur ersten Auflage	vi
1 Einleitung: Beispiele und Anwendungen	1
1.1 Anfangswertprobleme	1
1.2 Randwertprobleme	4
I Ein- und Mehrschrittverfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben	
2 Einschnittverfahren für Anfangswertprobleme	12
2.1 Definition des Verfahrens	12
2.2 Konsistenz	17
2.2.1 Konsistenzbedingungen	17
2.2.2 Konsistenz spezieller Verfahren	19
2.3 Die Methode der Taylor-Entwicklung	24
2.4 Runge–Kutta-Formeln	27
2.5 Implizite Runge–Kutta-Formeln	34
2.6 Konvergenz	41
2.7 Stabilität	45
2.8 Adaptive Schrittweitenkontrolle	48
2.9 Steife Differentialgleichungen	50
2.9.1 Stabilität und Steifheit von Differentialgleichungen	51
2.9.2 Einseitige Lipschitz-Bedingung und steife Differentialgleichungssysteme	58
2.9.3 Stabilitätsbedingungen für Einschnittverfahren	62
2.10 Unstetige Galerkin-Verfahren	70
2.10.1 Variationelle Formulierung	71
2.10.2 Galerkin-Approximation und Galerkin-Orthogonalität	72
2.10.3 Fehlerabschätzungen und Schrittweitenkontrolle	75

3	Mehrschrittverfahren für Anfangswertaufgaben	79
3.1	Definition des Verfahrens	79
3.2	Konsistenz von Mehrschrittverfahren	91
3.3	Stabilität und Konvergenz	104
3.4	Charakterisierung der Lipschitz-Stabilität. Die Wurzelbedingung	108
II	Näherungsverfahren für Randwertprobleme	
4	Schießverfahren für Randwertprobleme	122
4.1	Das einfache Schießverfahren für lineare Randwertprobleme	122
4.2	Das einfache Schießverfahren für nichtlineare Randwertprobleme	128
4.3	Die Mehrzielmethode	130
5	Differenzenverfahren für Randwertprobleme	134
5.1	Singulär gestörte (gewöhnliche) Differentialgleichungen	134
5.2	Differenzenapproximationen für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	137
5.3	Stabilität und Konvergenz mit Maximumprinzipien	140
5.4	Stabilität und Konvergenz mithilfe von Kompaktheitsmethoden	145
5.5	Differenzenapproximationen für nichtlineare Randwertprobleme	151
6	Differenzenapproximationen für Randwertprobleme durch Variationsmethoden	159
6.1	Variationelle Formulierung eines eindimensionalen Modellproblems	159
6.2	Die einfachste Finite-Elemente-Methode für das Modellproblem	163
6.3	Erste Fehlerabschätzungen	166
6.4	Galerkin-Verfahren für nichtlineare Probleme	176
7	Kollokationsverfahren	179
7.1	Lineare Randwertprobleme m -ter Ordnung	179
7.2	Praktische Aspekte des Kollokationsverfahrens	183
8	Adaptive Gitter für Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen	186
8.1	Differenzenapproximationen auf nichtäquidistanten Gittern	186
8.2	Interpolationsfehlerindikatoren	187
8.3	Residuen-Schätzer	189
8.4	Gitterverteilungsfunktionen	190

III Anhang

A Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	197
A.1 Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen	198
A.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen	200
A.3 Lineare Differentialgleichungen	202
A.4 Systeme mit konstanten Koeffizienten	206
A.5 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	207
A.6 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	211
A.7 Lineare Randwertaufgaben zweiter Ordnung	214
B Theoretische Übungsaufgaben mit Musterlösungen	220
C Praktische Übungsaufgaben mit Musterlösungen	255
Literaturverzeichnis	283
Abbildungsverzeichnis	287
Tabellenverzeichnis	289
Index	291

Kapitel 1

Einleitung: Beispiele und Anwendungen

In diesem einleitenden Kapitel werden einige typische Beispiele aus der Mechanik, Biologie und Thermodynamik vorgestellt, bei denen die Modellierung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen führt. Letztere haben die Form von Anfangswertproblemen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen oder liegen als Randwertprobleme vor. Bei Randwertproblemen unterscheidet man verschiedene Typen, Dirichlet-, Neumann- oder Robin-Randbedingungen – auch Randbedingungen erster, zweiter bzw. dritter Art –, je nachdem ob die Lösung selbst, deren Ableitung oder eine Beziehung zwischen beiden (in gemischter Form) am Rand vorgegeben sind. Die Definition und Klassifizierung von Differentialgleichungen sowie die Theorie zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist in Kurzform in Anhang A zusammengestellt.

1.1 Anfangswertprobleme

Beispiel 1.1 (Populationsmodell). Ein *einfaches Modell* zur Beschreibung des Wachstums einer Population $p(t)$ bei bekannter Anfangspopulation $p_0 = p(t_0)$ ist gegeben durch

$$\frac{dp}{dt}(t) = ap(t), \quad t > t_0; \quad p(t_0) = p_0.$$

($a > 0$ beschreibt die *Wachstumsrate*). Die Lösung ist bekanntlich

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (1.1)$$

Das Zeitintervall $\widetilde{\Delta t}$, in dem sich die Population verdoppelt, erhält man durch die Beziehung

$$p(t + \widetilde{\Delta t}) = 2p(t), \quad \text{also} \quad \widetilde{\Delta t} = \frac{1}{a} \ln 2.$$

Die Lösung (1.1) beschreibt das wirkliche Wachstum im Allgemeinen für die fernere Zukunft nur schlecht. Ein *erweitertes Modell* führt einen Rivalitätsterm (nach Verhulst, 1837) ein,

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \quad t > t_0; \quad p(t_0) = p_0.$$

Für diese nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung kann man (ausnahmsweise) die Lösung explizit angeben:

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0) \exp(-a(t - t_0))}. \quad \square$$

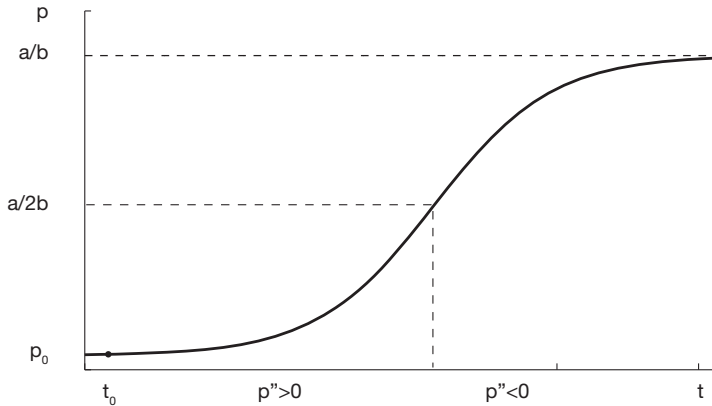


Abbildung 1.1. Erweitertes Wachstumsmodell.

Beispiel 1.2 (Räuber-Beute-Modell).¹ (Haderer [29]) Sucht man zwei Populationen, die Beutetiere $x(t)$ und die Raubtiere $y(t)$, so lässt sich ein entsprechendes Modell in Form eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen formulieren,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \alpha \left(x(t) - x(t)y(t) \right) \quad , \quad t > t_0; \quad x(t_0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt}(t) &= x(t)y(t) - y(t) \quad , \quad t > t_0; \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Anfangswertproblem für ein System von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Deren Lösungsvektor $(x(t), y(t))^T$ lässt sich entweder in der x/y -Ebene (siehe Abbildung 1.2) oder komponentenweise über der t -Achse darstellen (siehe Abbildung 1.3).

Weitere Beispiele in diesem Bereich beschreiben die Ausbreitung von Seuchen, die Entwicklung von Industrien oder Innovationen, den Zerfall von Radioaktivität und vieles mehr. □

Beispiel 1.3 (Schwingungsprobleme). Nach dem *Newton'schen Gesetz* setzt sich die an der Masse m angreifende Gesamtkraft aus vier Anteilen zusammen,

mg	Gewicht ($g =$ Erdbeschleunigung)
$-k(\Delta\ell + y)$	Rückstellkraft ($k =$ Federkonstante)
$-c \frac{dy}{dt}$	Dämpfung
F	äußere Kraft;

¹ □ kennzeichnet im Folgenden immer das Ende eines Beispiels oder eines Beweises.

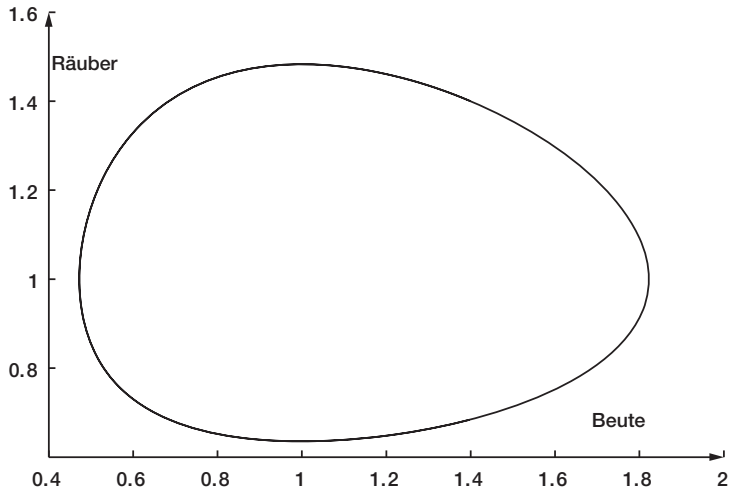


Abbildung 1.2. Räuber-Beute-Modell.

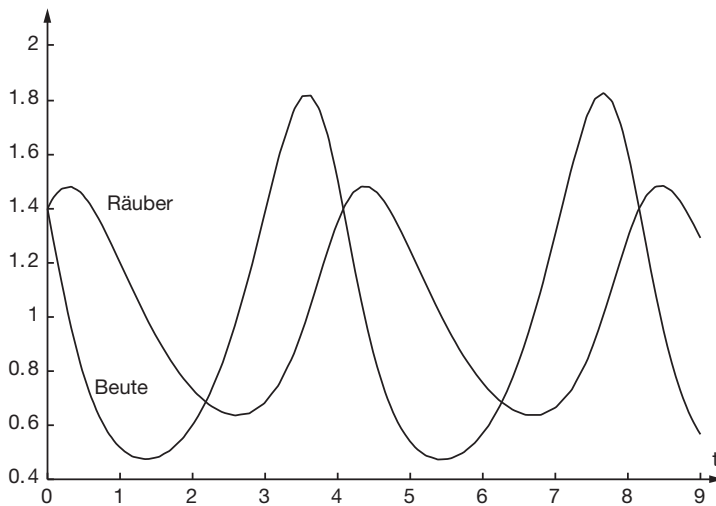


Abbildung 1.3. Beute- und Raubtiere.

hierbei beschreibt $y = y(t)$ die gesuchte Auslenkung, und $\Delta\ell$ ist die Federlänge in der *Gleichgewichtsposition*, $k\Delta\ell = mg$. Man erhält also die Beziehung

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} &= mg - k(\Delta\ell + y) - c \frac{dy}{dt} + F \\ &= -ky - c \frac{dy}{dt} + F(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

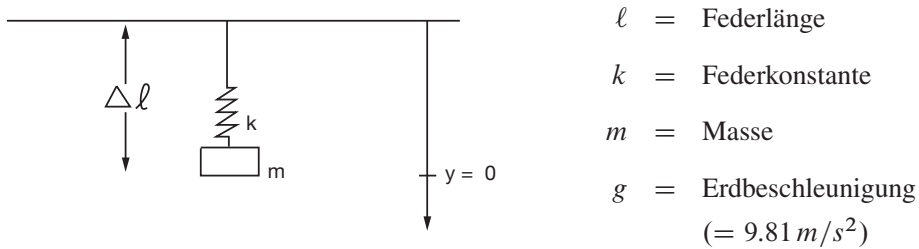


Abbildung 1.4. Schwingungsproblem.

Bei der „Dämpfung“ bzw. Kraft unterscheidet man noch verschiedene Fälle,

- freie ungedämpfte Schwingung: $c = 0$, $F = 0$;
- freie gedämpfte Schwingung: $c \neq 0$, $F = 0$;
- erzwungene gedämpfte Schwingung: $c \neq 0$, $F \neq 0$;
- erzwungene ungedämpfte Schwingung: $c = 0$, $F \neq 0$.

Auch nichtlineare Rückstellkräfte der Form $-ky^2$ sind möglich. Das Schwingungsproblem erfordert noch zwei Anfangsbedingungen, für die Anfangsauslenkung $y(t_0) = y_0$ und für die Anfangsgeschwindigkeit $y'(t_0) = y'_0$.

Wie in Anhang A.5 ausgeführt, lässt sich jede Differentialgleichung n -ter Ordnung als System von n Gleichungen erster Ordnung umschreiben. Deren Lösungen – im Fall konstanter Koeffizienten – ergeben sich dann mithilfe der Wurzeln des zugehörigen charakteristischen Polynoms. Für verschiedene Dämpfungsfälle sind die Lösungen des obigen Schwingungsproblems in Beispiel A.21 des Anhangs A angegeben bzw. ausgeführt. □

1.2 Randwertprobleme

Beispiel 1.4 (Temperaturverteilung in einem Stab).

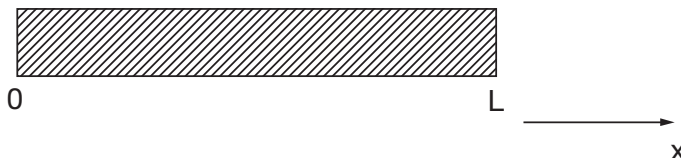


Abbildung 1.5. Stab (1-dim. Modell).

Bezeichnet man mit

- ρ Dichte,
- c spezifische Wärmekapazität,
- λ Wärmeleitfähigkeit,
- F Quellterm (Wärmequelle),

dann erfüllt die Temperaturverteilung $u = u(x, t)$, $x =$ Ortsvariable, $t =$ Zeitvariable, in einem Stab oder Draht folgende Differentialgleichung:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0.$$

Die Größen ρ, c, λ können im Allgemeinen von x, t und auch von der Temperatur selbst abhängen. Im einfachsten Fall konstanter Koeffizienten erhält die (zeitabhängige) Wärmeleitungsgleichung die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

mit $\alpha^2 = \lambda/\rho c$ (= Temperaturleitfähigkeit), $f = F/\rho c$. Die vorliegende Gleichung ist eine *partielle Differentialgleichung*; zur Angabe einer Lösung werden noch eine *Anfangstemperatur* bei $t = 0$ und *Randbedingungen* bei $x = 0$ und $x = L$ benötigt. Für den durch (1.3) beschriebenen einfachen Fall lässt sich die Lösung explizit angeben (vergleiche zum Beispiel [9, Abschnitt 5.6] und [67]).

Im *stationären Fall*, das heißt, wenn sich die Temperatur zeitlich nicht mehr ändert, führt (1.3) auf die folgende gewöhnliche Differentialgleichung (mit $\gamma = 1/\alpha^2$):

$$-y''(x) = \gamma f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Randbedingungen können zum Beispiel in folgender Form vorliegen:

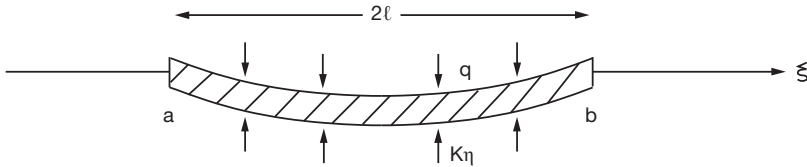
- Temperatur bei $x = 0$ und $x = L$ gegeben, $y(0) = y_0$, $y(L) = y_L$;
- Temperatur bei $x = 0$ gegeben, Isolierung bei $x = L$,

$$y(0) = y_0, \quad y'(L) = 0;$$

- Temperatur bei $x = 0$ gegeben, Wärmetübergang bei $x = L$,

$$y(0) = y_0, \quad y'(L) = \lambda_L(y(L) - y_\infty).$$

Der Quellterm f kann entweder konstant sein, linear von y abhängen ($f = f_0 + \beta y$), auch einem „Exponentialgesetz“ $f = f_0 + \exp(y)$ genügen und vieles mehr. \square

Beispiel 1.5 (Balkenbiegung).**Abbildung 1.6.** Balkenbiegung.

Die Auslenkung/Verbiegung $\eta = \eta(\xi)$ eines Balkens der Länge $2\ell (= b - a)$, verursacht durch eine Kraft- bzw. Gewichtsverteilung q , wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(S(\xi) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) + K \eta = q(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (1.4)$$

Hierbei beschreibt S die Steifigkeit des Balkens, und K ist eine Elastizitätskonstante des umgebenden Materials. Diese gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung erfordert insgesamt vier Randbedingungen bei $\xi = a$ und $\xi = b$, die zum Beispiel wie folgt vorliegen können:

- Position der Balkenauflage bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ bekannt, $\eta(a) = \eta_a$ oder $\eta(b) = \eta_b$;
- Balken bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ fest eingespannt, $\eta'(a) = 0$ oder $\eta'(b) = 0$;
- Biegemoment $d^2 \eta / d\xi^2$ verschwindet bei $\xi = a$ oder $\xi = b$, $\eta''(a) = 0$ oder $\eta''(b) = 0$;
- Scherkräfte $d^3 \eta / d\xi^3$ sind bei $\xi = a$ oder $\xi = b$ null, $\eta'''(a) = 0$ oder $\eta'''(b) = 0$.

Schreibt man die Gleichung (1.4) in *dimensionslose Form* um durch

$$x = \frac{\xi - \frac{a+b}{2}}{\ell}, \quad y = \frac{S_0}{q_0 \ell^4} \eta, \quad k = \frac{\ell^4}{S_0} K,$$

und wählt speziell eine „parabolische Verteilung“ für S und q ,

$$S = S_0(2 - x^2), \quad q = q_0(2 - x^2),$$

dann erhalten wir die folgende spezielle Form von (1.4), zum Beispiel für $k = 40$,

$$((2 - x^2)y'')'' + 40y = 2 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1.5)$$

Mögliche Randbedingungen sind

$$y''(\pm 1) = y'''(\pm 1) = 0.$$

Setzt man $v = (2 - x^2)y''$, so kann man (1.5) als System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung umschreiben. Ist das Biegemoment $m = y''$ – und damit auch v – bekannt, so lässt sich die Verbiegung y aus der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen,

$$y''(x) = (2 - x^2)^{-1}m(x), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (1.6)$$

benötigt werden jeweils noch eine Randbedingung bei $x = -1$ und $x = 1$, zum Beispiel $y(-1) = \alpha$, $y'(1) = 0$.

Bei anderen Problemstellungen, das heißt der Modellierung durch andere Funktionen für q und S , erhält man zum Beispiel die folgende nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y''(x) = (1 + y'(x)^2)^{2/3}m(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1.7)$$

Randbedingungen für (1.6) oder (1.7) sind in verschiedener Form möglich:

– Enden frei aufliegend, $y(-1) = y(1) = 0$,

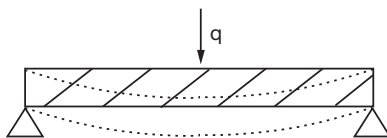


Abbildung 1.7. Balken mit freien Enden.

– Balken links eingespannt, rechts frei aufliegend, $y'(-1) = y(1) = 0$,

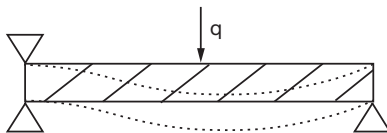


Abbildung 1.8. Balken links eingespannt, rechts frei.

– Balken links und rechts eingespannt, $y'(-1) = y'(1) = 0$.

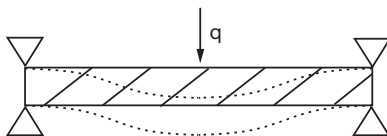


Abbildung 1.9. Balken mit eingespannten Enden.

Bemerkung. Beim letzten Beispiel ist die Lösung nur eindeutig bis auf eine Konstante, das heißt $y(x) = c + w(x)$. \square

Teil I

**Ein- und Mehrschrittverfahren zur numerischen
Lösung von Anfangswertaufgaben**

Bei der Lösung von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen prüft man zunächst mithilfe geeigneter Literatur (vergleiche zum Beispiel [2], [22], [33], [38], [54], [10], [8], [66], [65]), ob die gegebene Differentialgleichung in hinreichend einfacher Form geschlossen lösbar ist. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein, sodass man in der Praxis auf numerische Methoden zur Bestimmung von Näherungslösungen für Anfangswertaufgaben angewiesen ist.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit einer Klasse von Näherungsverfahren, die unter dem Namen Einschrittverfahren zusammengefasst werden. In Kapitel 3 werden dann die sogenannten Mehrschrittverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt. Sie unterscheiden sich von den Einschrittverfahren wesentlich dadurch, dass bei ihnen zur Berechnung eines Näherungswertes für die gesuchte Lösung nicht nur die Kenntnis der bereits berechneten Näherung im vorangehenden Punkt, sondern in mehreren vorangehenden Punkten benötigt wird.

Grundlage für die Herleitung von Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen sind die folgenden Überlegungen. Bei Approximation der Differentialgleichung und der Anfangswerte unter geeigneten, sehr allgemeinen Voraussetzungen liefern die Lösungen der zugehörigen angenäherten Gleichungen Approximationen für die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Der Begriff „Konsistenz“ präzisiert, was unter einer Approximation der Anfangswertaufgabe zu verstehen ist. Für Lipschitz-stetige Ein- und Mehrschrittverfahren, die mit der Anfangswertaufgabe konsistent sind, kann man die Konvergenz der Näherungslösungen gegen die gesuchte Lösung beweisen. Die Lipschitz-Stetigkeit gewährleistet ferner die Stabilität des Näherungsverfahrens, also die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten sowie der rechten Seite, gleichmäßig in der Schrittweite h .

Bei den Einschrittverfahren untersuchen wir noch Strategien zur adaptiven (und automatischen) Wahl der Schrittweiten, basierend auf Abschätzungen der Abschneidefehler, die Verwendung von expliziten und impliziten Verfahren für steife Differentialgleichungssysteme sowie sogenannte „unstetige Galerkin-Verfahren“. Bei steifen Differentialgleichungen zeigt sich, dass explizite Verfahren ungeeignet sind. Unstetige Galerkin-Verfahren sind auch für steife Systeme gut geeignet und erlauben die Konstruktion von Verfahren beliebig hoher Ordnung, wobei außerdem mathematisch begründete Schrittweitenkontrollen zur Verfügung stehen.

Bei den Mehrschrittverfahren werden die zentralen Begriffe wie Konsistenz, Stabilität und Konvergenz wie bei Einschrittverfahren definiert und analysiert. Wichtig ist, dass die Stabilität mit einer algebraischen Eigenschaft, nämlich der „Wurzelbedingung“, charakterisiert werden kann. Der Beweis kann mithilfe funktionentheoretischer Methoden oder mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra erfolgen.

Kapitel 2

Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme

Einschrittverfahren benutzen definitionsgemäß nur den zuletzt berechneten Näherungswert, um im nächsten Zeitschritt die nächste Näherung zu berechnen. Die Klasse der Einschrittverfahren umfasst unter anderem die einfachen und verbesserten Verfahren von Euler und Cauchy, die Methode der Taylor-Entwicklung, die expliziten und impliziten Runge–Kutta-Formeln, Verfahren vom Rosenbrock-Typ sowie die un stetigen Galerkin-Verfahren. Letztere können im Fall stückweise konstanter bzw. stückweise stetiger Ansatzfunktionen auch als Differenzenapproximationen geschrieben werden. Die zentralen Begriffe zur Untersuchung von Einschrittverfahren sind Konsistenz, Stabilität und Konvergenz, wobei für Stabilität und Konvergenz insbesondere Stabilitäts- bzw. Fehlerabschätzungen von Interesse sind.

In den Abschnitten 2.1 bis 2.5 werden die genannten verschiedenen Verfahren konstruiert sowie deren Konsistenz untersucht. Die folgenden zwei Abschnitte untersuchen Stabilität und Konvergenz einschließlich zugehöriger Abschätzungen. Damit lässt sich auch der Einfluss von Rundungsfehlern auf die Bestimmung von Näherungslösungen abschätzen.

Abschnitt 2.8 bringt zwei Möglichkeiten, durch Schätzungen des Abschneidefehlers die Schrittweiten zu kontrollieren. In Abschnitt 2.9 werden explizite und implizite Einschrittverfahren zur Lösung von steifen Differentialgleichungen untersucht. Zu Beginn von Abschnitt 2.9 werden verschiedene Definitionen von Steifheit vorgestellt und analysiert. Es zeigt sich, dass explizite Verfahren für steife Anfangswertprobleme ungeeignet sind. Einschrittverfahren müssen mindestens A -stabil sein, um für steife Differentialgleichungen sinnvoll eingesetzt werden zu können. Unstetige Galerkin-Verfahren (siehe Abschnitt 2.10) sind für steife Differentialgleichungen gut geeignet und erlauben eine effiziente Schrittweitenkontrolle. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden diese Verfahren vorgestellt sowie Beispiele und Fehlerabschätzungen angegeben.

Die Darstellung bis Abschnitt 2.7 lehnt sich eng an [59] an und wird erweitert durch Ergebnisse aus [25]. Für die Abschnitte 2.9 bzw. 2.10 wurden [28], [30], [58] bzw. [49] herangezogen.

2.1 Definition des Verfahrens

Bezeichnung (Anfangswertproblem). (A) Gegeben sei ein beschränktes abgeschlossenes Intervall $I = [0, T]$ der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} , eine Funktion f zweier Veränderlicher $(t, y) \in I \times \mathbb{K}^n$ und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Gesucht

ist eine stetig differenzierbare Lösung u des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T],$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0) = \alpha.$$

Ausgeschrieben hat das System die Gestalt

$$\frac{du_j}{dt}(t) = f_j(t, u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad t \in I, \quad u_j(0) = \alpha_j \quad j = 1, \dots, n,$$

mit der vektorwertigen Funktion $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \mathbb{K}^n$, $t \in I$.

Anschließend setzen wir stets voraus, dass das Anfangswertproblem (A) eine eindeutig bestimmte Lösung u besitzt. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen werden dafür geeignete Voraussetzungen angegeben.¹

Beispiel 2.1 (Exponentielles Wachstum). Betrachte das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T; \quad u(t_0) = \alpha.$$

Dessen Lösung ist

$$u(t) = \alpha \exp(\lambda(t - t_0)),$$

wobei hier $f(t, y) = \lambda y$ gilt. □

Beispiel 2.2 (Schwingung (vergleiche Beispiel A.21 in Anhang A)).

$$u'' + 2au' + bu = F, \quad t > 0, \quad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta. \quad \square$$

Beispiel 2.3 (Van der Pol'sche Differentialgleichung, auch „Kippschwingung“ oder „Sägezahnsschwingung“). Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'' - \eta(1 - u^2)u' + u &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 1, \end{aligned}$$

lässt sich als System von zwei Gleichungen erster Ordnung schreiben ($u_1 = u$, $u_2 = u'$):

$$\begin{aligned} u'_1 &= f_1(t, u_1(t), u_2(t)), \quad u_1(0) = 0, \\ u'_2 &= f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \quad u_2(0) = 1, \end{aligned}$$

mit

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_2, \quad f_2(t, y_1, y_2) = -y_1 + \eta(1 - y_1^2)y_2,$$

¹ O. B. d. A. betrachten wir meist ein Zeitintervall $[0, T]$, was ohne Schwierigkeiten auf ein Intervall der Form $[t_0, t_0 + T]$ verallgemeinert werden kann.

oder äquivalent (mit $\varepsilon := \frac{1}{\eta}$)

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, & u_1(0) &= 0, \\ \varepsilon u_2' &= (1 - u_1^2)u_2 - \varepsilon u_1, & u_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

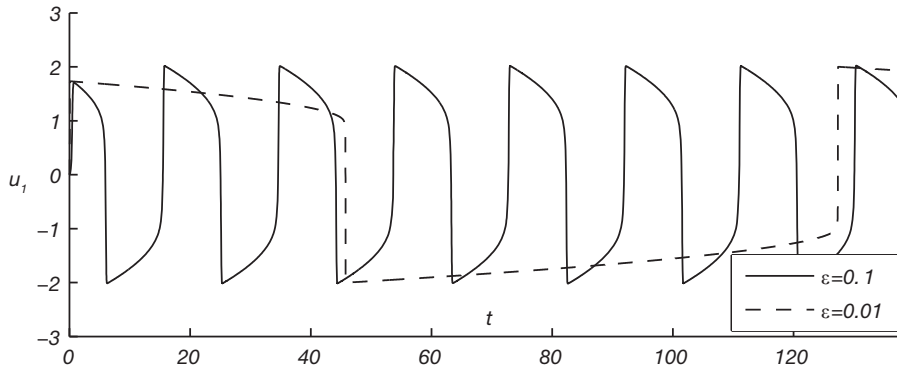


Abbildung 2.1. Kippschwingung, $\varepsilon = 0.1$ und 0.01 .

□

Für eine Folge von Schrittweiten $h > 0$ wird im Intervall $I = [0, T]$ jeweils ein zugehöriges *Punktgitter* erklärt durch die Vorschrift

$$I_h = [0, T]_h := \{t \in [0, T] \mid t = jh, \quad j = 0, \dots, N_h\}$$

mit der eindeutig bestimmten ganzen Zahl N_h aus dem Intervall

$$\frac{T}{h} - 1 < N_h \leq \frac{T}{h}, \quad 0 < h \leq T.$$

Die Punkte $t \in [0, T]_h$ nennt man *Gitterpunkte* und schreibt auch

$$t_j = jh, \quad j = 0, \dots, N_h.$$

Für jede stetig differenzierbare Funktion $u \in C^1[0, T]$ kann man an den Gitterpunkten aus der Menge

$$I_h' = [0, T]_h' := \{t \in [0, T]_h \mid t = jh, \quad j = 0, \dots, N_h - 1\}$$

die vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten bilden, die Approximationen der Differentialquotienten $u'(t)$ für $t \in [0, T]_h'$ ergeben. Außerdem verwenden wir noch die Gitterpunktmenge

$$I_h^0 := \{t \in [0, T]_h \mid t = jh, \quad j = 1, \dots, N_h\}.$$

Das einfachste *Einschrittverfahren* erhält man durch das

Polygonzugverfahren (auch „Verfahren von Euler–Cauchy“ oder „Euler-Verfahren“).

$$\frac{1}{h}(u_h(t+h) - u_h(t)) = f(t, u_h(t)), \quad t \in I'_h, \quad u_h(0) = \alpha. \quad (2.1)$$

Grundlegend für die Konstruktion weiterer Verfahren ist die folgende Beziehung für die Lösung u von (A), die man durch Integration von t bis $t+h$ erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds, \quad t \in I'_h, \\ u(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Approximation des Integrals auf der rechten Seite durch geeignete Quadraturformeln führt auf eine Reihe weiterer Verfahren:

Verbessertes Polygonzugverfahren (auch „verbessertes Verfahren von Euler“).

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(t+h) - u_h(t)) &= f\left(t + \frac{h}{2}, u_h(t) + \frac{h}{2}f(t, u_h(t))\right), \quad t \in I'_h, \\ u_h(0) &= \alpha, \end{aligned}$$

das sich durch Approximation des Integrals in (2.2) mithilfe der Tangententrapezformel

$$\int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds \approx hf\left(t + \frac{h}{2}, u\left(t + \frac{h}{2}\right)\right)$$

und durch Taylor-Approximation ergibt,

$$u\left(t + \frac{h}{2}\right) = u(t) + \frac{h}{2}u'(t) + R_1(t) = u(t) + \frac{h}{2}f(t, u(t)) + R_1(t),$$

wobei R_1 einen Rest der Größenordnung Kh^2 bezeichnet.

Verbessertes Verfahren von Euler–Cauchy (auch „Verfahren von Heun“).

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(t+h) - u_h(t)) &= \frac{1}{2}\left(f(t, u_h(t)) + f(t+h, \tilde{u}_h(t+h))\right), \quad t \in I'_h, \\ u_h(0) &= \alpha, \end{aligned}$$

mit $\tilde{u}_h(t+h) = u_h(t) + hf(t, u_h(t))$; dieses Verfahren ergibt sich durch Approximation des Integrals in (2.2) mithilfe der Sehnentrapezformel

$$\int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds \approx \frac{h}{2}\left(f(t, u(t)) + f(t+h, u(t+h))\right)$$

und durch Taylor-Approximation

$$u(t+h) = u(t) + hf(t, u(t)) + \tilde{R}_1(t)$$

mit einem Rest \tilde{R}_1 von gleicher Größenordnung wie beim verbesserten Polygonzugverfahren.

Im Allgemeinen definiert man in Analogie zum Anfangswertproblem (A) als Einschrittverfahren eine Folge (A_h) diskreter Anfangswertaufgaben, wobei die Schrittweiten h eine geeignet gewählte Nullfolge durchlaufen sollen.

Bezeichnung (Einschrittverfahren). (A_h) Gegeben sei eine Folge von Funktionen f_h zweier Veränderlicher $(t, y) \in I'_h \times \mathbb{K}^n$ und eine Folge von Anfangswerten $\alpha_h \in \mathbb{K}^n$. Gesucht sind Lösungen $u_h(t)$, $t \in I_h$, des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_h(t+h) - u_h(t)) &= f_h(t, u_h(t)), \quad t \in I'_h, \\ u_h(0) &= \alpha_h. \end{aligned} \quad (2.3)$$

In diesen Gleichungen haben wir übrigens die gesuchten Lösungen als Funktionen geschrieben, die für jede Schrittweite h allerdings nur auf dem diskreten Punktgitter I_h definiert sind. Dieses Gleichungssystem ist stets eindeutig rekursiv lösbar. Man spricht deshalb auch genauer von einem *expliziten Einschrittverfahren*.

Für die Lösung u von (A) bezeichnet

$$\tau_h(t+h) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds - f_h(t, u(t)), \quad t \in I'_h, \quad (2.4)$$

den sogenannten *Abschneidefehler*, der für $h \rightarrow 0$ in geeigneter Weise gegen null streben soll.

Speziell haben wir für die Verfahrensfunktion f_h bisher folgende **Beispiele** kennengelernt:

- Im Polygonzugverfahren ist $f_h(t, y) = f(t, y)$.
- Für das verbesserte Polygonzugverfahren erhalten wir

$$f_h(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right).$$

- Im verbesserten Verfahren von Euler–Cauchy gilt

$$f_h(t, y) = \frac{1}{2}(f(t, y) + f(t+h, y + hf(t, y))).$$

Beispiel 2.4 (Polygonzugverfahren für $u' = \lambda u$). Einsetzen in die Näherungsgleichung liefert $u_h(0) = \alpha_h$ sowie

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hf(t, u_h(t)) = u_h(t)(1 + \lambda h).$$

Durch vollständige Induktion erhält man

$$u_h(kh) = \alpha_h(1 + \lambda h)^k, \quad k = 0, \dots, N_h. \quad \square$$

Beispiel 2.5 (Verbessertes Polygonzugverfahren für die Van der Pol'sche Differentialgleichung (vergleiche Beispiel 2.3)). Mit

$$f_1(t, y_1, y_2) = y_2, \quad f_2(t, y_1, y_2) = -y_1 + \eta(1 - y_1^2)y_2$$

erhalten wir Näherungen (u_h^1, u_h^2) von (u_1, u_2) durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (u_h^1(t+h) - u_h^1(t)) &= u_h^2(t) + \frac{h}{2} (-u_h^1(t) + \eta(1 - u_h^1(t)^2)u_h^2(t)), \\ \frac{1}{h} (u_h^2(t+h) - u_h^2(t)) &= -\left(u_h^1(t) + \frac{h}{2}u_h^2(t)\right) + \eta\left(1 - (u_h^1(t) + \frac{h}{2}u_h^2(t))^2\right) \\ &\quad \times \left(u_h^2(t) + \frac{h}{2}(-u_h^1(t) + \eta(1 - u_h^1(t)^2)u_h^2(t))\right), \\ u_h^1(0) &= 0, \quad u_h^2(0) = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Wir werden später auch Einschrittverfahren mit nicht notwendig äquidistanten Schrittweiten betrachten,

$$u_h(t+h(t)) = u_h(t) + h(t)f_h(t, u_h(t))$$

für t aus einem entsprechenden Gitter. In diesem Fall werden die Schrittweiten $h(t)$ in Abhängigkeit der Stelle $t \in I_h$ gewählt, bis zu der man die numerische Lösung bereits berechnet hat.

Darüber hinaus werden wir auch *implizite Verfahren* untersuchen, wie zum Beispiel das *implizite Euler-Verfahren*,

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hf(t+h, u_h(t+h)). \quad (2.5)$$

Wir lassen hier die mögliche Abhängigkeit der Schrittweite von der Stelle t in der Bezeichnung weg. Allgemeine implizite Einschrittverfahren lassen sich in folgender Form schreiben:

$$u_h(t+h) = u_h(t) + hf_h(t, u_h(t), u_h(t+h)) \quad (2.6)$$

mit einer *Verfahrensfunktion* $f_h = f_h(t, y, z)$. Für implizite Verfahren muss das gesuchte $u_h(t+h)$ in jedem Schritt durch die Lösung des im Allgemeinen nichtlinearen Gleichungssystems (2.6) bestimmt werden, was iterativ erfolgen kann.

2.2 Konsistenz

2.2.1 Konsistenzbedingungen

Die Anfangswertaufgabe (A) mit der Lösung u bzw. die zugehörige Gleichung

$$\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds, \quad t \in I'_h, \quad u(0) = \alpha \quad (2.7)$$

wird bei den Einschrittverfahren (A_h) durch eine Folge diskreter Anfangswertaufgaben der Gestalt

$$\frac{1}{h}(u_h(t+h) - u_h(t)) = f_h(t, u_h(t)), \quad t \in I'_h, \quad u_h(0) = \alpha_h \quad (2.8)$$

approximiert. Dabei erhält man die Funktionen f_h durch geeignete Näherungen für das Integral (2.7) in der Gestalt

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, u(s)) ds = f_h(t, u(t)) + \tau_h(t+h), \quad t \in I'_h, \quad (2.9)$$

mit dem *Abschneidefehler* τ_h als *Restglied* (vergleiche (2.4)). Aus den Gleichungen (2.7) und (2.9) gewinnt man mit der Lösung u von (A) die Darstellung

$$\tau_h(t+h) = \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - f_h(t, u(t)), \quad t \in I'_h.$$

Für $t = t_0 = 0$ erklären wir den Abschneidefehler durch

$$\tau_h(t_0) = \alpha - \alpha_h.$$

Also lässt sich der Abschneidefehler τ_h charakterisieren als der Defekt, welcher beim Einsetzen der Lösung u der Anfangswertaufgabe (A) in das System der Näherungsgleichungen des Einschrittverfahrens (2.8) entsteht.

Der *lokale Diskretisierungsfehler* $\rho_h(t+h)$ ist dadurch erklärt, dass man einen Verfahrensschritt entlang der Lösungskurve $u(t)$ ausführt und den Fehler zu $u(t+h)$ betrachtet,

$$\begin{aligned} \rho_h(t+h) &:= u(t+h) - \tilde{u}_h(t+h), \\ \text{wobei } \tilde{u}_h(t+h) &= u(t) + hf_h(t, u(t)), \quad t \in I'_h. \end{aligned}$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler und den Abschneidefehler ergibt sich dann die Beziehung²

$$\rho_h(t+h) = u(t+h) - u(t) - hf_h(t, u(t)) = h\tau_h(t+h), \quad t \in I'_h.$$

Dies gilt jedoch nur für die hier betrachteten expliziten Verfahren.

Definition 2.6. Die Differenzgleichungen in (2.8) heißen eine *konsistente Approximation* der Integralgleichung in (2.7) bzw. der Differentialgleichung $u' = f(t, u)$, wenn der Abschneidefehler τ_h für $h \rightarrow 0$ auf I_h^0 gleichmäßig gegen null strebt, also wenn die folgende *Konsistenzbedingung* gilt:

$$\max_{t \in I_h^0} \|\tau_h(t)\| \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \quad (2.10)$$

Hierbei und im Folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem \mathbb{K}^n .

² Der lokale Diskretisierungsfehler heißt auch „lokaler Verfahrensfehler im Punkt $(t+h, u(t+h))$ “.

Definition 2.7. Das Einschrittverfahren (A_h) heißt *konsistent* mit der Anfangswertaufgabe (A) , wenn der Abschneidefehler τ_h auch für die Anfangsbedingung in (2.8) gegen null konvergiert und somit die nachstehende Konsistenzbedingung besteht:

$$\max \left\{ \|\alpha_h - \alpha\|, \max_{t \in I_h^0} \|\tau_h(t)\| \right\} = \max_{t \in I_h} \|\tau_h(t)\| \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Für die Anwendungen benötigt man das folgende notwendige und hinreichende Konsistenzkriterium.

Satz 2.8. Die Konsistenzbedingung (2.10) ist genau dann erfüllt, wenn die Funktionen f, f_h mit der Lösung u von (A) der Beziehung

$$\max_{t \in I_h} \|f_h(t, u(t)) - f(t, u(t))\| \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

genügen.

Beweis. Es ist

$$\tau_h(t+h) = \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - u'(t) + f(t, u(t)) - f_h(t, u(t)), \quad t \in I'_h,$$

und

$$\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - u'(t) = \frac{1}{h} \int_0^h [u'(t+s) - u'(t)] ds, \quad t \in I'_h.$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von u' konvergiert

$$\max_{t \in I'_h} \left\| \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - u'(t) \right\| \leq \max_{\substack{0 \leq t \leq T-h \\ 0 \leq s \leq h}} \|u'(t+s) - u'(t)\| \longrightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$. Zusammen mit der obigen Beziehung für τ_h folgt daraus die Behauptung. \square

Definition 2.9. Eine Zahl $p > 0$ heißt *Konsistenzordnung* des Einschrittverfahrens (A_h) , wenn es eine positive Zahl $K > 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\max_{t \in I_h} \|\tau_h(t)\| \leq Kh^p \quad (h \rightarrow 0). \quad (2.11)$$

2.2.2 Konsistenz spezieller Verfahren

Für die Herleitung von Einschrittverfahren (A_h) mit einer Konsistenzordnung $p \geq 1$ benötigt man im Allgemeinen, dass die Lösung u der Anfangswertaufgabe (A) stetige Ableitungen höherer Ordnung auf $I = [0, T]$ besitzt. Hinreichend dafür ist, dass die

rechte Seite f der Differentialgleichung stetig ist und stetige partielle Ableitungen nach beiden Argumenten t, y in einer geeigneten Umgebung $G \subseteq I \times \mathbb{K}$ der Lösung u von (A) besitzt. Wir beschränken die Darstellung in diesem Abschnitt auf den Fall skalarer Anfangswertprobleme, das heißt $n = 1$.

Für das Folgende definieren wir diese Menge G als „Streifen“ um die Lösung u der Gestalt $G = I \times \mathbb{K}$ oder

$$G = K_\rho(u) := \left\{ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \mid |y - u(t)| \leq \rho, 0 \leq t \leq T \right\} \quad (2.12)$$

mit einer beliebigen, passend gewählten positiven Zahl ρ . Ist zum Beispiel f m -mal stetig differenzierbar nach beiden Argumenten, also $f \in C^m(G)$, so folgt aus der Darstellung von u bzw. u' durch die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I = [0, T],$$

dass u' dann m -mal stetig differenzierbar wird oder $u \in C^{m+1}(I)$ ist. Für die höheren Ableitungen von u erhält man dabei aus der Differentialgleichung die Darstellung

$$u''(t) = \frac{d}{dt} f(t, u(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) (t, u(t)), \quad t \in I,$$

und mit der Abkürzung

$$(Df)(t, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) (t, y), \quad (t, y) \in G,$$

gilt allgemeiner

$$\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}}(t) = (D^k f)(t, u(t)), \quad t \in I, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.13)$$

Für $m \geq 2$ lautet die Darstellung für u''' zum Beispiel

$$u'''(t) = (D^2 f)(t, u(t)) = \left(f_{tt} + f_t f_y + 2f f_{ty} + f(f_y)^2 + f^2 f_{yy} \right) (t, u(t)).$$

Beispiel 2.10 (Polygonzugverfahren). Das Polygonzugverfahren besitzt die Konsistenzordnung $p = 1$, falls $f \in C^1(G)$.

Beweis. Wegen $f_h = f$ und der Integraldarstellung des Restglieds der Taylor-Formel ist

$$\tau_h(t+h) = \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - u'(t) = h \int_0^1 u''(t+sh)(1-s) ds, \quad t \in I'_h.$$

Falls $u \in C^2(I)$, so folgt

$$\max_{t \in I_h^0} |\tau_h(t)| \leq \frac{1}{2} h \max_{t \in I} |u''(t)|$$

und damit die behauptete Konsistenzordnung von $p = 1$. □