DE GRUYTER

Thomas Bedürftig, Roman Murawski

PHILOSOPHIE DER MATHEMATIK

DE G

Thomas Bedürftig · Roman Murawski
Philosophie der Mathematik

Thomas Bedürftig
Roman Murawski

Philosophie der Mathematik

De Gruyter

ISBN 978-3-11-019093-9
e-ISBN 978-3-11-022060-5

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Bedürftig, Thomas.
Philosophie der Mathematik / by Thomas Bedürftig, Roman Murawski.
p. cm. – Includes bibliographical references and index.
ISBN 978-3-11-022060-5 (alk. paper)
1. Mathematics – Philosophy. I. Murawski, Roman. II. Title.
QA8.4.B425 2010
510.1–dc22
2010011592

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Satz: Da-TeX Gerd Blumenstein, Leipzig, www.da-tex.de
Druck: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen
∞ Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Germany

www.degruyter.com

Unseren Frauen
Michaela und Hania
für viel Geduld und Verständnis
in der Zeit der Entstehung dieses Buches.

Vorwort

Die Philosophie der Mathematik steht zwischen der Philosophie und der Mathematik. Das ist kein leichter Stand. Für den Außenstehenden stellt sich die Frage, was Mathematik, dieses fest gefügte, unfehlbare System von Zahlen, Formeln und Methoden überhaupt mit Philosophie zu tun haben soll. Die Philosophie, deren Teilgebiet die Philosophie der Mathematik ihrem Namen nach ist, und die Philosophen haben es schwer mit einer Mathematik, die wissenschaftlich Vorbildcharakter hat und zudem bis ins Unüberschaubare angewachsen ist. Schließlich ist der Gegenstand einer Philosophie der Mathematik eine Mathematik, deren Mathematiker in der Regel wenig geneigt sind, sie philosophisch zu betrachten. Das ist eine verständliche Haltung, da ihre mathematische Arbeit weit entfernt von jeder Philosophie zu sein scheint.

Wir werden sehen, dass die Dinge etwas anders liegen. Mathematik ist eine lebendige, sich entwickelnde und sich wandelnde Wissenschaft mit einer wechselvollen Geschichte. Ihre Grundbegriffe, Methoden und Prinzipien sind traditionell wichtige Gegenstände der Philosophie. Und die mathematische Arbeit ist, wenn man in ihre Fundamente schaut, der Philosophie sehr nah.

Die Grundlage, auf die Mathematik baut, erlaubt nicht nur, sondern fordert geradezu trotz aller inner- und außermathematischer Erfolge und Anerkennungen, über sie nachzudenken. Dieses *mathematisch* zu tun, ist Aufgabe des mathematischen Gebietes der *Mathematischen Grundlagen*. Damit aber ist niemand vom Nachdenken befreit. Denn die Mathematischen Grundlagen reichen bis ins tägliche Zahlenfundament der praktischen mathematischen Arbeit, in die Lehre, ins mathematische Sprechen und Denken und in die mathematischen Methoden hinein. Viele ihrer Fragen sind philosophischen Ursprungs und ihre Ergebnisse von philosophischer Bedeutung. In ihrem Umfeld entstehen philosophische Fragen. Die Reflexion über Fragen aus den Mathematischen Grundlagen und der Philosophie dient der Bewusstheit in der mathematischen Arbeit und in der Lehre von Mathematik.

Die Autoren sind Mathematiker und haben sich vorgenommen, nicht zuletzt Kolleginnen und Kollegen in die Philosophie der Mathematik einzuführen, also Schüler, Studenten, Lehrer und Dozenten der Mathematik. Unsere Einführung ist naturgemäß auch für Philosophen von der Schule bis in die Universität interessant, gerade weil sie von der anderen Seite kommt. Das, was wir an mathematischen Kenntnissen voraussetzen, ist über weite Strecken elementar. Dort, wo das nicht der Fall ist – und dies ist eine *Gebrauchsanweisung* für dieses Buch –, ist der Text klein gesetzt. Das ist auch dann so, wenn es um speziellere Ausführungen mathematikphilosophischer Art geht. Der in der Standardgröße gedruckte Text ist auch für interessierte Laien mit mathematischen Vorkenntnissen aus der Schule geeignet.

Ausgangspunkt und immer wieder Bezugspunkt unseres Textes sind die reellen Zahlen. *Kapitel 1* skizziert den Weg zu ihnen und vermerkt in pointierter Weise mathematische und philosophische Probleme und Fragen, die sich auf diesem Wege stellen. Die Fragen weisen in die Mathematischen Grundlagen und in die Philosophie der Mathematik. Das umfangreiche *Kapitel 2* ist ein Abriss von Positionen aus der Geschichte der Mathematik und der Philosophie bis hin zu aktuellen Strömungen. Es bildet den Hintergrund für die folgenden Kapitel, speziell für die Grundfragen der Philosophie der Mathematik im *Kapitel 3*, das die Fragen aufnimmt, die sich in Kapitel 1 stellten. Kapitel 2 kann als unabhängiges Kompendium dienen. Einleitung, Kapitel 1 und Kapitel 3 lassen sich im Zusammenhang lesen, und es kann aktuell in Kapitel 2 nachgeschlagen werden, wenn Rückfragen notwendig werden und weiterer Bedarf nach zusammenhängenden Informationen über Philosophen, Mathematiker, mathematikphilosophische Schulen und Auffassungen entsteht.

Im *Kapitel 4* geht es um den heute universellen Hintergrund mathematischen Formulierens: die Mengenlehre. Die Verwendung von Mengensprechweisen wirkt zurück auf unser mathematisches Denken. Das Ziel ist, ein Bewusstsein für dieses oft unbewusste Fundament des mathematischen Sprechens und Denkens zu wecken. Auch dieses Fundament reflektieren wir und stellen zwei Mengenlehren vor, deren Ansätze sehr verschieden sind. *Kapitel 5* schließlich ist der axiomatischen Methode und dem zweiten mathematischen Fundament, der Logik, gewidmet. Wir geben einen kurzen Abriss über logische Grundbegriffe und blicken kurz auf die Geschichte der Axiomatik und der Logik. Die mathematische Logik hat manche ehemals philosophische Fragen aufgenommen und tiefgreifende Ergebnisse von philosophischer Tragweite erzielt. Im *Kapitel 6* schauen wir zurück und versuchen kurz zu charakterisieren, was Philosophie der Mathematik ist, in die wir bis dahin eingeführt haben. Ein Anhang enthält Kurzbiographien ausgewählter Philosophen und Mathematiker. Der Text schließt mit je einem Index für Symbole, Namen und Begriffe.

Wir danken für die großzügigen Förderungen, die dieses Buch erst möglich gemacht haben: Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD), der die Zusammenarbeit der Autoren seit Jahren unterstützt, der Alexander von Humboldt-Stiftung für finanzielle Hilfe und der Fundacja na rzecz Nauki Polskiej (Stiftung für die Polnische Wissenschaft) für die Übernahme mancher Sach- und Nebenkosten.

Und wir danken Herrn PD Dr. Robert Plato und Herrn Simon Albroscheit im Verlag De Gruyter für die geduldige, entgegenkommende und aufmerksame Betreuung und Hilfe bei der Herstellung dieses Buches.

Hannover und Poznań *Thomas Bedürftig*
im Januar 2010 *Roman Murawski*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die mathematische Laufbahn des Menschen beginnt früh. Die erste Mathematik entsteht in der Auseinandersetzung und im Einklang mit der Wirklichkeit. Die Zahlen, die mit dem Zählen verbunden sind und in der Mathematik zu den *natürlichen Zahlen* werden, erhalten von hierher ihre Bedeutungen. Das gilt ganz ähnlich für die negativen und gebrochenen, die rationalen Zahlen, die aus dem Umgang mit alltäglichen Größen in einer Art Abstraktion entstehen.

Anders ist es mit den reellen Zahlen, die wir im Kapitel 1 an den Anfang unserer Einführung stellen. Hier gibt es eine entscheidend neue Situation. Um die reellen Zahlen ausgehend von den natürlichen und rationalen Zahlen zu erreichen, geht die Mathematik ganz eigene und neue Wege. Sie löst sich aus den Bindungen an die konkreten Anwendungen. Die alte, einfache Abstraktion von alltäglichen und physikalischen Größen funktioniert nicht mehr. Es ist gerade der Konflikt mit den Größen, der sie veranlasst, reelle Zahlen *theoretisch* zu konstruieren oder deren gewünschte Eigenschaften *axiomatisch* zu postulieren. Es sind geometrische und theoretische Notwendigkeiten, die die Mathematik auf besondere Weise herausfordern und Begriffe und Methoden verlangen, die noch vor nicht allzu langer Zeit sehr neu und revolutionär gewesen waren. Diesen gegenüber stellten und stellen sich Fragen, die nicht nur mathematischer sondern auch philosophischer Art sind. Die Fragen weisen in viele Richtungen der Philosophie der Mathematik und der Mathematikgeschichte. Wir deuten einige der Fragen hier in der Einleitung an – anknüpfend an die reellen Zahlen – und nennen einige Probleme.

Die reellen Zahlen sind, das ist heute die allgemeine Haltung, sicherer mathematischer Besitz. Man hat die heftigen Diskussionen weitgehend vergessen oder hält sie für erledigt, die noch vor 100 Jahren die Häupter und Herzen der Mathematiker, ja ihr Gewissen bewegten. Die Probleme aber sind durchaus nicht verschwunden. Man sieht sie gleichwohl in den Mathematischen Grundlagen gut aufgehoben, übergeht gern die Fragen und geht pragmatisch zur Tagesordnung über, die mit $\mathbb{R}$ beginnt. Die mathematische Lehre, in der es um schnelle Vermittlung der Begriffe und Methoden geht, geht von diesen reellen Zahlen aus, meidet möglichst die begrifflichen und methodologischen Fragen und verschenkt an diesem entscheidenden Punkt die Möglichkeit der reflektierenden Vermittlung eines interessanten Stoffes und tieferer Einsicht in die mathematischen Elemente.

Wir begeben uns im ersten Kapitel *auf den Weg* zu den reellen Zahlen, um ganz konkret und elementar ihre Probleme aufzudecken, die noch heute die Mathematischen Grundlagen und die Philosophie der Mathematik beschäftigen. Im Kapitel 3 – auf der Grundlage eines ausführlichen Berichtes über historische mathematikphilosophische Positionen im Kapitel 2 – erörtern wir dann die Probleme näher und verstehen die Konflikte besser, die zu Zeiten Kroneckers, Freges, Cantors und Dedekinds die Gemüter so erhitzt haben.

In der universitären Lehre und im mathematischen Unterricht ist von Konflikten wenig oder nichts zu bemerken. Die reellen Zahlen werden in der Mitte der gymnasialen Schulzeit gewöhnlich so eingeführt, dass verborgen bleibt, welch entscheidender Schritt hier getan wird. Auch dem geneigten Leser dürfte in seiner Schulzeit dieser Schritt kaum zu Bewusstsein gekommen sein. Denn mit der Autorität der Mathematik und des Mathematiklehrers wird der Mathematikunterricht an allen Tiefen und Klippen vorbei gelenkt. Wir wollen zur Einführung kurz, bevor wir im Kapitel 1 die Probleme im Detail identifizieren, einige Punkte im geläufigen Mathematikunterricht und in der Lehre an den Universitäten anschauen – und uns dabei vielleicht an unsere eigene Schul- oder Studienzeit erinnern. Es handelt sich um ganz einfache Dinge, die man in der Routine aber leicht übersieht.[1]

Die mathematische Lehre an den Universitäten beginnt gewöhnlich mit den reellen Zahlen. Sie setzt sie voraus – wenn sie gründlich ist, axiomatisch, d. h. in der Auflistung ihrer Eigenschaften, die kaum hinterfragt sondern gesetzt werden. Wenn die Erweiterung zu den reellen Zahlen thematisiert wird, sieht das vielleicht wie folgt aus.

Wir haben in einem Lehrbuch über Zahlbereiche in der Ausbildung von Lehrern dieses zur Einführung der reellen Zahlen gefunden: Am Anfang des Kapitels über reelle Zahlen wird konstatiert – nach einer Bemerkung über die Diagonale im Einheitsquadrat, einer grundsätzlichen Bemerkung über die Zahlengerade (s. u.) und einem indirekten Irrationalitätsbeweis:

> „Die uns vertraute Zahl $\sqrt{2}$ gehört also nicht zur Menge der rationalen Zahlen.“

Das ist überraschend. Woher ist uns $\sqrt{2}$ als Zahl vertraut? Zuvor waren die rationalen Zahlen eingeführt worden. Wohin gehört „die Zahl“ $\sqrt{2}$ dann? Offenbar, so suggerieren die Autoren, zu einer besonderen Art von Zahlen, den reellen Zahlen, die schon da sind. Wenn sie schon vorhanden und uns vertraut sind, warum muss man sie dann *einführen*? Offen bleibt bei dieser Art des Vorgehens zunächst, was $\sqrt{2}$ als *Zahl* eigentlich *ist*. Und ungeklärt bleibt, warum und wie man mit dem Term $\sqrt{2}$, der nie da gewesen ist, *rechnen* kann.

Diese Art der „Einführung“ der reellen Zahlen ist der Hintergrund für manchen Mathematikunterricht. Wie sollen Lehrer, die dieses oder ähnliches studiert haben, Schülern vermitteln, was hier wirklich passiert, an welcher begrifflichen Schwelle sie

[1] Wir bemerken, dass wir uns hier allein auf die Standardtheorie der reellen Zahlen beziehen. Interpretationen anderer Art werden z. B. in dem umfangreichen Lehrbuch [50] behandelt, das durchgehend mathematikhistorische Ausführungen enthält und das wir für das tiefere Studium der reellen Zahlen empfehlen.

stehen? Die Chance zumindest partiellen Verstehens der Probleme und der Eigenart ihrer Lösung wird verspielt.

Ein wichtiger Punkt folgt anschließend im Unterricht: Näherungsverfahren, z. B. für $\sqrt{2}$ – was immer $\sqrt{2}$ auch ist. Danach kommt eine Redewendung etwa so:

> Den abbrechenden und periodischen Dezimalbrüchen fügen wir die *unendlichen nicht-periodischen* Dezimalbrüche hinzu. Alle zusammen, das sind die reellen Zahlen.

Was sind das: Unendliche nicht-periodische Dezimalbrüche? Es geht um den *Umgang mit der Unendlichkeit*. Worum Mathematiker im 19. Jahrhundert hart und eigentlich unentschieden gerungen haben, wird im Unterricht als Selbstverständlichkeit gesetzt. Noch heute ist das Unendliche das große Problem in den Mathematischen Grundlagen, das ursächlich ist für viele weitere Probleme. Seine Problematik durchzieht das ganze vorliegende Buch.

Hinter dieser Art des Vorgehens steht die so genannte *Zahlengerade*, bei der man nicht mehr differenziert, ob es um Punkte oder Zahlen auf ihr geht. Es ist eine gebräuchliche und berechtigte Übung im Verlauf des Mathematikunterrichts, Zahlen als Punkte auf einer Geraden zu *veranschaulichen*. Ist man aber berechtigt, Zahlen und Punkte zu *identifizieren*? Das oben erwähnte Lehrbuch leitet das Kapitel über „eine Einführung in die reellen Zahlen" ganz offen mit dieser Erklärung ein:

> „Die reellen Zahlen werden also gleich zu Beginn durch die Gesamtheit **aller** Punkte der Zahlengeraden erklärt und als gegeben angesehen." [Fettdruck original im Lehrbuch]

Das ist praktisch – und erschlagend. Man erledigt mit einem Schlag die gesamte *Problematik des Kontinuums* in allen ihren Facetten. Was eigentlich ist *die* Zahlengerade? Was ist das für eine Gesamtheit, die „Gesamtheit aller Punkte"? Wie bildet man sie? Welch ein Gegenstand ist ein Punkt? Ist das Kontinuum einer Geraden durch Punkte ausschöpfbar, also eine Menge von Punkten? Wenn das so ist: Punkte sind zunächst keine Zahlen. Kann man Punkte einfach zu Zahlen erklären? Was sind das für Zahlen? Wie rechnet man mit Punkten?

Weiter wird mit der obigen Erklärung auch das Problem der *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$ beseitigt. Denn als Menge aller Punkte einer Geraden erben die so erklärten reellen Zahlen deren Lückenlosigkeit. Eigentlich denkt man heute mathematisch genau umgekehrt. Man konstruiert oder setzt $\mathbb{R}$ axiomatisch und erklärt dann Kopien von $\mathbb{R}$ zu Geraden. Nicht Punkte werden zu Zahlen sondern Zahlen zu Punkten.

Das Ziel der mengentheoretischen Konstruktionen der reellen Zahlen, so verschieden sie sind, ist immer die Vollständigkeit. Hier stellt sich endgültig und klar die Frage nach dem Verhältnis von konstruiertem Zahlenbereich und geometrischer Gerade. Gibt es eine *Differenz* zwischen der *Menge* der reellen Zahlen und den möglichen Verhältnissen im *Kontinuum* einer geometrischen Geraden? Dieses Problem ist in dem

Moment nicht mehr erkennbar, wenn man $\mathbb{R}$ als Menge aller Punkte einer Geraden präsentiert oder Geraden für Kopien von $\mathbb{R}$ hält. Die durchaus mögliche Differenz aber verweist auf die so genannte Nicht-Standard-Analysis. Im Hintergrund erscheint die alte Vorstellung *unendlich kleiner* Größen. Wir gehen im Kapitel 3 darauf ein.

Welche Fragen, die in die Philosophie verweisen, stellen sich hier? Wir haben sie angedeutet. Es sind *philosophische Grundfragen*: Es ist die große alte Frage nach dem Unendlichen, die die Bildung unendlicher Mengen betrifft wie die Annahme unendlich kleiner Größen. Es ist die Frage nach mathematischen Begriffen wie die der Zahl und der Größe. Es ist das Problem des klassischen Kontinuums, der Auffassung des Kontinuums als Menge von Elementen und der Identifikation von Punkten und Zahlen. Es ist die Frage nach den Axiomen und der axiomatischen Methode. Und es ist überhaupt die Frage des Verhältnisses der Mathematik und ihrer Begriffe zur Wirklichkeit. Welchen Status haben mathematische Begriffe? Was sind Zahlen? Was ist ihr Ursprung?

Solche Fragen, die nicht zuletzt relevant sind für die Lehre von Mathematik, werden im Kapitel 1 auf dem Weg zu $\mathbb{R}$ konkret. Im Kapitel 2 begegnen sie uns in einem umfangreichen Abriss der Geschichte der Philosophie der Mathematik immer wieder. Dort stellen wir zahlreiche Mathematiker und Philosophen und ihre mathematikphilosophischen Positionen vor, von denen her wir Antworten suchen werden.

Im Kapitel 3 erörtern wir vor dem Hintergrund der Geschichte der Philosophie und Mathematik die Grundfragen. Es geht um die Frage, was Zahlen eigentlich sind. Es geht diskursiv um den Begriff der Unendlichkeit, der sich als zentrales Problem durch die verschiedenen Positionen im Kapitel 2 zieht, um den Begriff der Größe und des Kontinuums. Die Größen verschwanden aus der Mathematik mit der Ersetzung des klassischen Koninuums durch $\mathbb{R}$. Geblieben sind hier und dort ihre Namen.

Mengenlehre und Logik bilden heute die mathematische Disziplin der Mathematischen Grundlagen. Aus ihnen kommen die heutigen mengentheoretischen Sprechweisen und die Klärung der Begriffe des Beweises, der Folgerung, der Theorie. Die neue Methode der Sicherung und Darstellung des mathematischen Wissens ist eine erneuerte Axiomatik. Mengenlehre, die im Prinzip eine Theorie des Unendlichen ist, Logik und Axiomatik stellen wir in den Kapiteln 4 und 5 vor, schildern ihre Geschichte und verfolgen und deuten ihre Probleme und Ergebnisse. Es entstehen naturgemäß dort, wo neue Grundlagen sind, neue grundlegende philosophische Fragen.

Wir haben oben vornehmlich *Probleme* herausgestellt, die in den reellen Zahlen verborgen sind. Unbedingt bemerken müssen wir, welche mathematischen *Möglichkeiten* sie eröffnet und welche Fortschritte sie bewirkt haben. Der Schritt vom klassischen Kontinuum ins Kontinuum der reellen Zahlen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war revolutionär. Erst die reellen Zahlen und die Mengenlehre in ihrem Hintergrund machten es möglich, im anschaulichen Kontinuum verborgene Eigenschaften des Kontinuierlichen mathematisch zu erfassen. Zu diesen gehören grundlegende Begriffe wie der des Zusammenhangs, der Vollständigkeit, der Stetigkeit oder

der Dimension. Endlich konnten die Begriffe des Grenzwertes, des Differentials und Integrals präzisiert werden, die schon lange aber ungesichert im Gebrauch waren. Alles dies konnte nur gelingen, indem von manchem Problem wie den oben genannten abstrahiert wurde – durchaus gegen massive Widerstände z. B. intuitionistischer Art. Wir sind heute in einer anderen Position. Die damals neuen Grundlagen haben sich längst bewährt. Wir können uns heute mit nüchternem Abstand bewusst machen, auf welchem Boden wir stehen – ohne Grundsatzstreit über die Probleme, die weiter bestehen. Wir können die mathematischen Versuche und Leistungen bewundern, die Probleme zu überwinden, und zugleich das mathematische Wagnis realisieren, das in diesen Leistungen liegt.

Die angesprochenen Aspekte werden in den kommenden Kapiteln thematisiert. Zuerst aber kommen wir im Kapitel 1 zu einigen Problemen unseres Fundamentes $\mathbb{R}$, die im allgemeinen Alltag ein wenig verschollen zu sein scheinen. Das Kapitel 1 ist kurz, konkret, elementar und skizzenhaft. Die vorgestellten Schritte auf dem Weg zu den reellen Zahlen sind natürlich bekannt. Ungewohnt ist vielleicht die Abstraktion von jedem Vorwissen am Anfang, die besondere Aufmersamkeit bei jedem einzelnen Schritt, die unerbittliche Unterscheidung zwischen geometrischer und arithmetischer Ebene und die klare Nennung der Probleme.

Kapitel 1
Auf dem Weg zu den reellen Zahlen

Wir versuchen in diesem Kapitel, das mathematische Fundament der reellen Zahlen nachzuzeichnen, seinen Aufbau und seine mathematischen Grundlagen skizzenhaft darzustellen, um Probleme philosophischer, methodischer und mathematischer Natur offenzulegen. Wir konstatieren, wie wir es schon in der Einleitung angemerkt haben, noch einmal die nicht seltene Unkenntnis oder die Toleranz diesen Problemen gegenüber und den Pragmatismus, mit dem man die reellen Zahlen als universelles mathematisches Fundament setzt. Die reellen Zahlen scheinen irgendwie immer schon da zu sein. Sie sind quasi zu den „natürlichen" Zahlen des Mathematikers geworden. In diesem Kapitel wollen wir zunächst nur aufmerksam machen auf die Fragen im Hintergrund der reellen Zahlen, indem wir den, genauer einen Weg zu ihnen aufmerksam beobachten und die Wahrnehmung für Details und Schwierigkeiten schärfen. Zum Zwecke der Klarheit wählen wir eine knappe und *pointierte* Formulierung der Probleme.

Der Weg zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beginnt wie fast alles in der Mathematik bei den (echten) natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wir wählen in diesem Kapitel einen etwas späteren Ausgangspunkt: die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Es ist der Ausgangspunkt des Lernenden, der noch nichts von reellen Zahlen weiß. Wir versetzen uns also bewusst in einen mathematischen Zustand wie den eines Schülers oder ähnlich dem der Pythagoreer vor 2500 Jahren. *Etwas anderes als rationale Zahlen haben und kennen wir arithmetisch nicht*. Das ist die *Anforderung* in diesem Kapitel, von unseren Vorkenntnissen und Vormeinungen wirklich vollständig und durchgehend abzusehen. – Über den Weg von den natürlichen zu den rationalen Zahlen sprechen wir kurz im Rückblick des Kapitels 3.

1.1 Irrationalität

Was bedeutet Irrationalität? Nehmen wir das Standardbeispiel. Gesucht ist die Zahl, die quadriert 2 ergibt. Man nenne sie $\sqrt{2}$. Überall steht sofort der

Satz. $\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Dazu gibt es dann einen indirekten Standardbeweis wie z. B. den folgenden, der der Vollständigkeit wegen aufgenommen ist. Er verwendet die eindeutige Zerlegung von natürlichen Zahlen in Primzahlen.

Beweis:
Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational, sagen wir $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Dann ist $2 = \frac{m^2}{n^2}$ bzw. $2 \cdot n^2 = m^2$. Denken wir uns m und n in Primzahlen zerlegt, dann kommt in beiden die Primzahl 2 vor oder auch nicht, in m^2 und n^2 jeweils doppelt so oft. Die Anzahl der Primfaktoren 2 in m^2 und n^2 ist also jeweils 0 oder eine gerade Zahl. Soll die Gleichung $2 \cdot n^2 = m^2$ richtig sein, so besagt dies, dass diese Anzahl der Primfaktoren 2 in m^2 zugleich gerade und ungerade ist. Das steht im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von m^2. $\square$

Was bedeutet die Aussage des Satzes? Die *Suggestion*, die nicht nur den Wissenden trifft, ist: $\sqrt{2}$ ist eine andere Art von Zahl, eben eine irrationale Zahl.

Was aber ist unsere Situation? Etwas anderes als rationale Zahlen gibt es nicht. Daher kann „irrational“ nichts anderes heißen als:

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

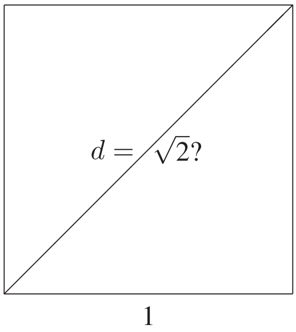
„Nicht rational“ aber heißt – mangels anderer Zahlen:

Satz. $\sqrt{2}$ *ist keine Zahl.*

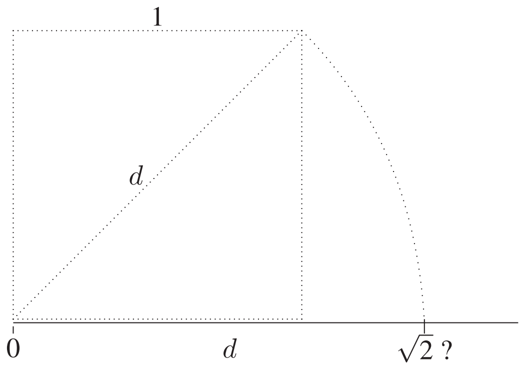
D. h. es gibt keine Zahl, die quadriert 2 ergibt. Was ist $\sqrt{2}$ dann?

$\sqrt{2}$ ist ein Term ohne Bedeutung.

Wir können diesen Term zwar schreiben, um Spannung zu wecken, wie wir ihn mit Sinn füllen. Aber Sinn hat das zunächst nicht. Es sei denn wir geben $\sqrt{2}$ einen anderen Sinn. Sehen wir den nicht im nächsten Standardbeispiel?



Aus dem Satz des Pythagoras folgt, so argumentieren wir, dass das Quadrat über der Diagonale im Einheitsquadrat den Flächeninhalt 2, die Diagonale d also die Länge $\sqrt{2}$ hat. Und: Wenn man d auf der *Zahlengerade* abträgt, dann kann man dort $\sqrt{2}$ als Länge von d sehen:



Das ist die nächste *Suggestion*, die den Wissenden und Lehrenden wie den Lernenden verleitet, $\sqrt{2}$ ohne weiteres als Zahl zu akzeptieren.

Welchen Fehler machen wir? Wir nehmen naiv an, *jeder* Punkt auf der Geraden, auf der wir uns die rationalen Zahlen als Punkte veranschaulicht haben und die dort dicht liegen, repräsentiert eine Zahl. Welche Zahlen aber haben wir? Rationale Zahlen! Und allein zu diesen Zahlen gehört bis jetzt ein Punkt auf der Zahlengeraden. Da $\sqrt{2}$ nicht rational ist, haben wir keine *Zahl* $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden gefunden sondern vielmehr einen *Punkt*, zu dem keine Zahl gehört. D. h. es gibt keine Zahl, die der Länge der Diagonale d entspricht. Es bleibt dabei:

$\sqrt{2}$ ist keine Zahl. Und: Es gibt keine Maßzahl, die die Länge von d angibt.

Das wiederum heißt:

Satz. *Die Diagonale d im Einheitsquadrat ist nicht messbar.*

Das ist eine erstaunliche Situation. Die Diagonale d hat eine Länge, und unsere Erfahrung sagt uns, dass es kein Problem ist, Längen zu messen. Jetzt müssen wir aus prinzipiellen Überlegungen akzeptieren, dass uns unsere Erfahrung täuscht. Es gibt Größen, denen wir – bei vorgegebener Einheit – keine Zahl zuordnen können. Wir können sie nicht messen. Denn Einheit und Größe können, wie man sagt, *inkommensurabel* sein. Wir können den Bereich der Größen nicht mit unseren Zahlen erfassen.

Kehren wir zum Anfang zurück, beim dem etwas nicht stimmt. So kann man den Anfang des Weges zu den reellen Zahlen eigentlich nicht beginnen: „$\sqrt{2}$ ist irrational.“ Denn die Formulierung tut von vornherein so, als ob $\sqrt{2}$ eine Zahl wäre. Man muss so anfangen:

Satz. *Es gibt keine Zahl, die quadriert 2 ergibt. Es gibt keine Maßzahl für die Diagonale im Einheitsquadrat.*

Schon allein mit dem Zeichen $\sqrt{2}$ von Anfang an zu operieren, ist im Prinzip problematisch, da schon dies „Zahl“ suggeriert und vorgibt, als hätte man die Lösung des Problems parat.

Die Schwere der Problematik und gerade das Problem des Ausgangspunktes des langen Weges zu den reellen Zahlen, der vor dem Lernenden liegt, wird gewöhnlich verschleiert. Man scheut sich vor dem „Offenbarungseid“: Die bisherige Arithmetik ist am Ende. Man versäumt die spannende und produktive Frage: Was kann man mathematisch tun?

Hinter solchen scheinbar nur methodischen und didaktischen Problemen stehen grundsätzliche philosophische Fragen.

1.2 Inkommensurabilität

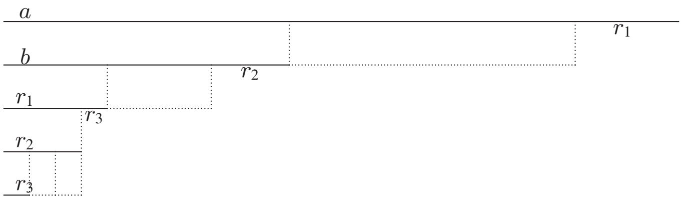
Welcher Art die Probleme sind, können wir am besten sehen, wenn wir weit zurück in Geschichte der Mathematik schauen. Die Entdeckung, die wir gemacht haben, haben die Pythagoreer vermutlich etwa 450 Jahre v. Chr. auch gemacht – in etwas anderer, direkterer Weise als wir. Eine der Vermutungen der Historiker in diesem Zusammenhang ist, dass es das regelmäßige Fünfeck war, ihr Ordenssymbol und ihr Symbol für den Kosmos, an dem sie das Phänomen der Inkommensurabilität entdeckt haben.[1]

Die Aufgabe war, das Verhältnis von Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck zu bestimmen. Zur *Verhältnisbestimmung* von Strecken hatten die Pythagoreer ein einfaches, überall anwendbares Verfahren entwickelt, die *Wechselwegnahme*, die zum bekannten *euklidischen Algorithmus* im Bereich der natürlichen Zahlen geworden ist. Die Wechselwegnahme war ein in der Geschichte der Mathematik wichtiges Verfahren, das auch in den Kapiteln 2 und 3 im Hintergrund immer wieder eine Rolle spielt. Da es in seiner geometrischen Form und Bedeutung selten praktiziert wird, stellen wir es hier kurz vor und wenden es dann im regelmäßigen Fünfeck an.

Seien a und b zwei Strecken. Die Griechen hatten keine normierten Maßeinheiten für Längen, mit denen sie a und b hätten messen, Maßzahlen zuordnen und so ihr Verhältnis bestimmen können. Sie gingen so vor:

Man nehme von a die kleinere Strecke b weg so oft, wie dies geht. Es bleibt der Rest r_1. Von b nehme man jetzt zweimal den Rest r_1 weg. Es bleibt der Rest r_2 usw.

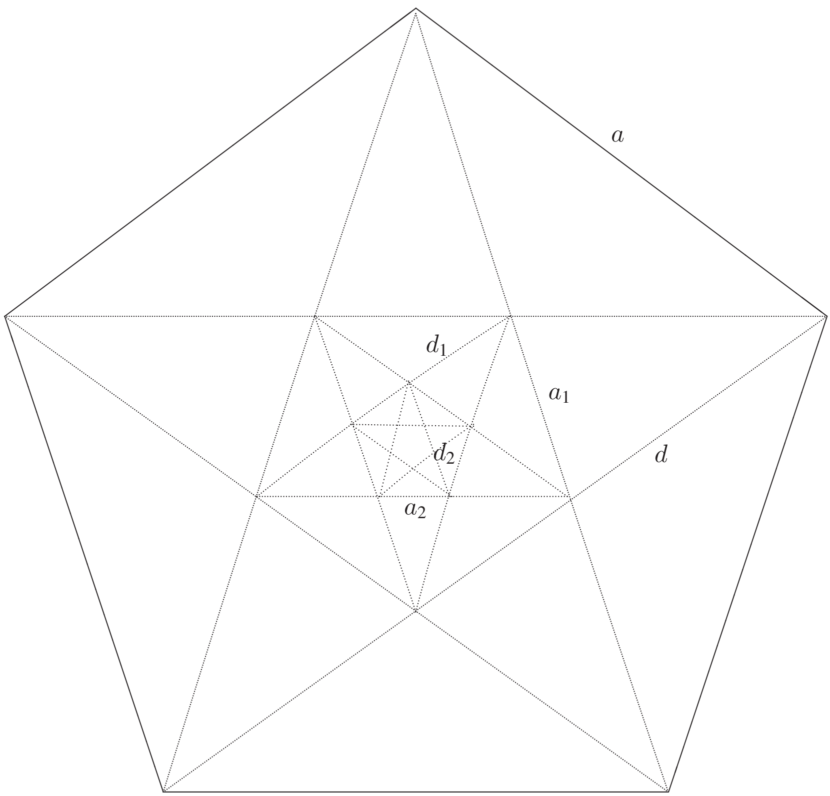
[1] Vgl. hierzu den Aufsatz von H.-G. Bigalke *Rekonstruktionen zur geschichtlichen Entwicklung des Begriffs der Inkommensurabilität* ([20]).



$$a = 2 \cdot b + r_1$$
$$b = 2 \cdot r_1 + r_2$$
$$r_1 = r_2 + r_3$$
$$r_2 = 3 \cdot r_3$$

In unserem Beispiel misst r_3 die Strecke r_2 genau drei mal. Damit ist $r_1 = 4 \cdot r_3$, $b = 11 \cdot r_3$, $a = 26 \cdot r_3$ und das Verhältnis von a zu b als $26 : 11$ bestimmt. r_3 ist ein gemeinsames Maß für a und b. Das war das Ziel der Wechselwegnahme: Die Bestimmung eines gemeinsamen Maßes für je zwei gegebene Strecken.

Dieses Verfahren übertragen wir jetzt in die Situation des regelmäßigen Fünfecks im folgenden Bild. Wir wollen dort das Verhältnis von Diagonale d zur Seite a bestimmen und orientieren uns an dem folgenden Bild. Aus Gründen der Symmetrien im regelmäßigen Fünfeck verläuft die Wechselwegnahme für d und a so:



$$\begin{array}{ccccc} d & = & a & + & d_1 \\ d_1 & = & a_1 & + & d_2 \\ d_2 & = & a_2 & + & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a & = & d_1 & + & a_1 \\ a_1 & = & d_2 & + & a_2 \\ a_2 & = & d_3 & + & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Was kann man im wahrsten Sinne *sehen*, was haben die alten Griechen gesehen?

> Die Wechselwegnahme bricht nicht ab.

Sie folgt der unendlichen Folge der Fünfecke, die immer kleiner werden und im Unendlichen verschwinden. D. h.:

> Es gibt kein gemeinsames Maß für Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck.

Die Erkenntnis ist und war:

Satz. *Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck sind inkommensurabel. Es gibt keine Zahlen, die das Verhältnis von Diagonale und Seite ausdrücken.*

Ein „sichtbarer" und direkter Beweis der Inkommensurabilität wie der eben gegebene ist etwas ganz anderes als das indirekte Argument oben für die „Irrationalität" von $\sqrt{2}$. Er bietet eine ganz andere Erfahrung für den Lernenden, die die Inkommensurabilität erst begreiflich macht und den – viel späteren – Begriff der Irrationalität begründet. Auch für $\sqrt{2}$ gibt es eine – ästhetisch nicht ganz so überzeugende – Möglichkeit der Ein*sicht* in die Inkommensurabilitität von Diagonale und Seite im Quadrat.

Wir sehen im obigen Bild zusätzlich, dass, da $d_1 = d - a$ ist, inneres und äußeres Verhältnis von d und a übereinstimmen: $d : a = a : (d - a)$. Das Verhältnis von d und a ist also das Verhältnis des *goldenen Schnittes*. Also:

> Es gibt keine Zahlen, die das Verhältnis des goldenen Schnittes ausdrücken.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität vor etwa 2450 Jahren hat die alten Griechen tief erschüttert. Warum?

Zahlen waren die Grundlage der Mathematik und – das ist bemerkenswert – der *Metaphysik* der Pythagoreer. Zahlen hatten für sie eine reale Kraft, die aus einer höheren Welt der Zahlen in die materielle Welt wirkte und die realen Dinge und ihre Verhältnisse nach den Verhältnissen der Zahlen formte. Das war die tiefe philosophische Überzeugung der Pythagoreer: *Alles ist Zahl*. Vor ihren Augen brach nun diese Überzeugung in sich zusammen. Denn sie sahen Strecken, die nicht in einem Verhältnis natürlicher Zahlen standen und so das zentrale Prinzip ihrer Philosophie aufhoben. Ihre Philosophie zerbrach in Mathematik und Metaphysik, die zuvor eins gewesen waren.

Legenden ranken sich um die Entdeckung der Inkommensurabilität, die im Orden der Pythagoreer als Geheimnis gehütet und angeblich von Hippasos von Metapont verraten wurde – mit dramatischen Folgen für den Verräter. Ihn traf der Fluch des Pythagoras. Auf seiner Flucht zur See verschlangen ihn die Fluten, die Gewitter und Sturm aufgewühlt hatten.

Platon deklarierte es einhundert Jahre später in deutlichen Worten als Schande, nichts von Inkommensurabilität zu wissen:

> „Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern eher nur beim Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen."
> ([147], Gesetze, Bd. 8, 819–820 AD)

Auch für den Lernenden heute bricht wie für die Pythagoreer eine – kleinere – Welt zusammen, und er erstaunt vielleicht ein wenig wie Platon. Denn seine Mathematik, die bis dahin galt, versagt. Diese Erfahrung aber kann der Lernende nur machen, wenn er die *Möglichkeit* hat, sie zu machen. Dazu gehört der arithmetische „Offenbarungseid". Er kann sie nicht machen, wenn man ihm $\sqrt{2}$ und die irrationalen Zahlen vorsetzt und so tut, als wenn sie längst da sind und man alles messen kann. Er braucht die Erfahrung, um den großen Schritt in eine neue, theoretische Mathematik zu erkennen und zu erleben, wie die Mathematik „theoretische Zahlen" erfindet und das Problem der Inkommensurabilität *theoretisch* überwindet.

Der Lehrende ist hier vielleicht nicht immer sensibel genug. Wir erinnern an das in der Einleitung erwähnte Lehrbuch. Denn man vergisst gern, was wir uns oben vorgenommen haben, nämlich wirklich den Standpunkt des Lernenden einzunehmen und von allem Vorwissen zu abstrahieren. Die reellen Zahlen sind so nah und so bequem. Mit ihnen ist alles messbar. Und es ist in der Tat mühsam, jeden Schritt bis zu den reellen Zahlen zu gehen. Aber die Einsicht in den „Abgrund" der Inkommensurabilität und in die folgenden Schritte bis zu $\mathbb{R}$ ist wichtig. Eines ist klar: In dem Moment, in dem reelle Zahlen gesetzt werden, ist die Inkommensurabilität verschwunden. Es bleibt die Irrationalität.

Heute stellen sich wie damals in diesem Zusammenhang philosophische Fragen. Zahlen und Zahlentheorie, die für die Pythagoreer damals das *Fundament* der Philosophie gewesen waren, lösten sich aus der Philosophie und standen nun der Philosophie gegenüber. Sie wurden *Gegen*stände der philosophischen Reflexion. In der Philosophie Platons traten die Ideen an die Stelle der Zahlen. Welchen Status hatten die Zahlen nun? Neben dem mathematischen Problem entstand die philosophische Frage nach den Zahlen:

- Was sind Zahlen?

Diese Frage meint zunächst die einfachsten der Zahlen, die natürlichen Zahlen, auf die alle anderen, auch die späteren reellen Zahlen zurückgeführt werden. Und diese Frage war es neben der Frage nach den reellen Zahlen, die im 19. Jahrhundert die mathematische Disziplin der *Mathematischen Grundlagen* hervorbrachte. Diese sollte *mathematisch* klären, was Zahlen sind. Über die Versuche hierzu und die philosophischen Ansichten werden wir in Kapitel 2 und 3 berichten.

Die anschließende Frage wird sein:

– Was sind reelle Zahlen?

Diese Frage ist nicht nur mit mathematischen sondern auch von philosophischen Problemen umgeben, wie wir gleich sehen werden. Was sind das eigentlich für Gegenstände, mit denen wir täglich umgehen? Allgemeinere mathematikphilosophische Fragen schließen sich an:

– Was ist der Status mathematischer Begriffe?
– Wie ist das Verhältnis der Mathematik und ihrer Begriffe zur Wirklichkeit?

Gescheitert war damals das philosophische Programm der Pythagoreer nicht in der Praxis. Es waren geometrische Größen, die den Zahlen ihre Grenzen zeigten. Die mathematische Antwort der Griechen war plausibel: Sie entwickelten eine Größenlehre, die der Zahlenlehre an die Seite gestellt wurde und, so kann man sagen, seitdem vorrangig war. Diese Größenlehre war wie die griechische Geometrie axiomatisch, d. h. sie basierte auf – nicht immer expliziten – Grundsätzen, die die Verhältnisse und den Gebrauch der Größen beschrieben.

Mathematisch wird im axiomatischen Vorgehen die Frage ausgeklammert, was dieses oder jenes ist. Was daher philosophisch und auch mathematisch offen blieb, ist die Frage:

– Was sind, besser: was waren Größen?

Heute sind die alten Größen aus der Mathematik ausgebürgert. Es sind die Zahlen, die reellen Zahlen, die sie vertreten.

1.3 Rechnen mit $\sqrt{2}$?

Unsere Frage oben war: Was kann man mathematisch tun, wenn man arithmetisch mit leeren Händen da steht? Z. B.: Wie sollen wir mit $\sqrt{2}$ rechnen, wenn wir nicht wissen, was $\sqrt{2}$ ist und wie dieser Term sich zu den rationalen Zahlen verhält? $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. sind alles Terme ohne Bedeutung. Was soll dann

$$3 \cdot \sqrt{2}, \quad 2 + 3 \cdot \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

usw. sein? Selbst

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

ist ein Term ohne Bedeutung.

Dennoch rechnet man bald ohne Bedenken, als wenn die reellen Zahlen vorhanden wären: Man adjungiert, wie man sagt, $\sqrt{2}$ an $\mathbb{Q}$ und tut dabei so, als ob die Menge aller Terme $a + b \cdot \sqrt{2}$, also

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ wäre – wobei $\mathbb{R}$ und das Rechnen in $\mathbb{R}$ stillschweigend vorausgesetzt wird. Ohne Kommentar ist das nicht korrekt. Es ist notwendig, wenigstens ein paar Worte zum Rechnen mit $\sqrt{2}$ und anderen Termen wie oben zu sagen.

Wir müssen in Studium und Unterricht deutlich sein und zumindest etwas wie dies sagen. *Wir tun so*, als könnte man $\sqrt{2}$ rechnen: Rechne mit $\sqrt{2}$ formal so, *als ob* sein Quadrat 2 wäre. Fasse z. B. $3 \cdot \sqrt{2}$ und $2 + 3 \cdot \sqrt{2}$ als *formale* Terme auf, rechne aber mit ihnen wie gewöhnlich, d. h. tu so, als ob die Rechengesetze, wie sie in $\mathbb{Q}$ herrschen, auch für diese formalen Terme gelten.

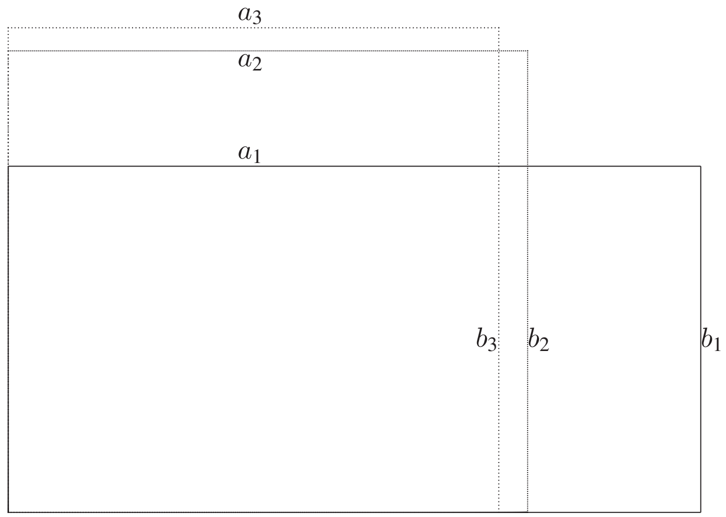
Es muss deutlich werden, dass hier etwas ganz Neues, etwas *Theoretisches* passiert, dass es um eine *formale Erweiterung*, um eine *formale* Adjunktion von $\sqrt{2}$ an $\mathbb{Q}$ geht. Im Studium sollte man das elementare algebraische Verfahren der formalen Adjunktion, das ohne den Term $\sqrt{2}$ auskommt, unbedingt vorstellen.

1.4 Näherungsverfahren, Intervallschachtelungen und Vollständigkeit

Wir halten noch einmal fest: Wir haben *nichts als die rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$. Von der *Zahl* $\sqrt{2}$ können wir noch immer nicht sprechen, selbst wenn wir mit $\sqrt{2}$ rechnen.

Wenn man d, die Diagonale im Einheitsquadrat, nicht messen kann, so kann man ihre Länge mit rationalen Zahlen doch annähern. Dafür und für andere Fälle sind viele Näherungsverfahren ausgedacht worden. Wir wählen ein altes Verfahren, das Heron-Verfahren, das schon in der Antike verwendet und nach Heron von Alexandria (um 100 n. Chr.) benannt wurde.

Wir wollen das Quadrat über d mit dem Flächeninhalt 2 durch Rechtecke mit dem Flächeninhalt 2 annähern, die rationale Seitenlängen haben. Wir beginnen sehr einfach und sehr ungenau mit dem Rechteck R_1, dessen Seiten die Längen $a_1 = 2$ und $b_1 = 1$ haben. Als nächste Näherung bilden wir das Rechteck R_2, dessen Seite a_2 das arithmetische Mittel von a_1 und b_1 ist: $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Dann muss $b_2 = \frac{2}{a_2}$ sein. Entsprechend verfahren wir mit a_3 und b_3 usw. usf. Für die Folge der Rechtecke ergibt sich das folgende Bild:

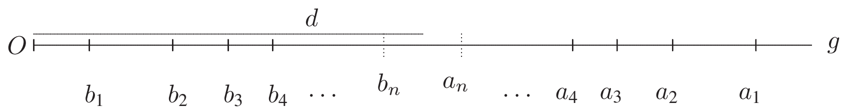


Die Seiten im Rechteck R_n haben also die Längen

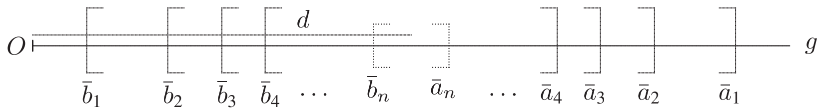
$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{a_n}.$$

Alle Maßzahlen zu den Seiten a_i, b_i der Rechtecke R_i sind rationale Zahlen. Die Werte a_i fallen, die Werte b_i steigen an, die Differenzen $a_i - b_i$ nähern sich dem Wert 0.

Die Folge der Seiten a_i, b_i denken wir uns jetzt auf einer Geraden g vom einem Anfangspunkt O aus abgetragen, also durch *Punkte* auf der Geraden g repräsentiert, die durch Striche markiert sind. Wir betonen, es geht um die Seiten als *geometrische Strecken* und deren Längen. Das sieht im Prinzip so aus:

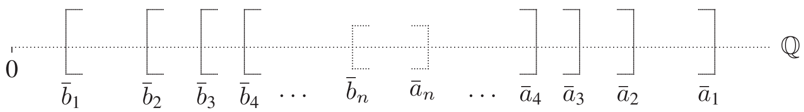


Wir sehen eine Schachtelung von Intervallen, die jeweils von den Endpunkten der b_i und a_i begrenzt werden. Das ist im nächsten Bild noch etwas deutlicher veranschaulicht.



Die a_i, b_i sind die *Endpunkte der Rechteckseiten* mit rationalen Längen. Die Pünktchen „ …“ deuten an, dass das Verfahren immer weiter läuft und zu immer neuen Seiten a_i, b_i führt, die bei jedem Schritt näher um Punkt für d zusammenrücken. Das Intervall $[b_n, a_n]$ ist eine Station mit vielleicht großem n in der nicht abbrechenden Folge von Intervallen $[b_i, a_i]$, die alle den Endpunkt von d enthalten. Dies ist die *geometrische Situation*.

Daneben, und dies müssen wir *völlig getrennt* sehen, steht die arithmetische Situation im Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Wir stellen uns alle rationalen Zahlen als Punkte auf einer Geraden vor. Und zwar so: Im nächsten Bild wollen wir *nur* die „rationalen Punkte“ sehen, d. h. die „Zahlengeraden“ der rationalen Zahlen und darauf die Intervalle der rationalen Zahlen, die die Längen der Rechteckseiten a_i, b_i angeben. Die Entsprechung „Punkt – Zahl“ ist so geläufig, dass man gewöhnlich die rationalen Maßzahlen der Seiten a_i, b_i ebenfalls einfach mit a_i, b_i bezeichnet. Wir müssen streng sein und Zahlen von Punkten unterscheiden. Wir bezeichnen daher die Maßzahlen mit $\bar{a}_i, \bar{b}_i$. Wir bemerken: Es *fehlt* eine Entsprechung für d, da es für die Länge von d keine rationale Maßzahl gibt.



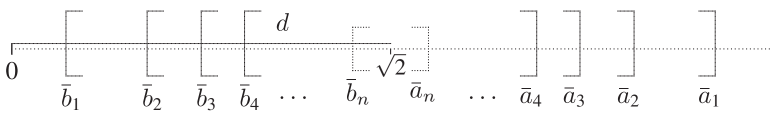
So überzeugend kongruent die arithmetische Situation aussieht, so entscheidend anders ist sie. Oben, in der geometrischen Darstellung, liegt der Endpunkt von d in allen Intervallen $[b_i, a_i]$. Hier in $\mathbb{Q}$ gibt es eine d entsprechende Zahl nicht:

> Der Durchschnitt in $\mathbb{Q}$ über alle Intervalle $[\bar{b}_i, \bar{a}_i]$ ist leer.

Was tut man? Man *postuliert* eine d entsprechende Zahl.

> *Forderung*:
> Es gibt genau eine Zahl, die in allen Intervallen $[\bar{b}_i, \bar{a}_i]$ liegt.

Die heißt $\sqrt{2}$. Sie füllt die Lücke, die in $\mathbb{Q}$ war, und misst d.



Eine andere Frage ist, was das ist, was man da fordert. Dazu kommen wir gleich.

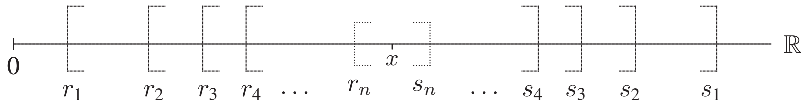
Der eben beschriebene Vorgang veranschaulicht den entscheidenden Schritt zu den reellen Zahlen. Wir haben durch $\sqrt{2}$ ein *Lücke* in $\mathbb{Q}$ geschlossen – durch eine Forderung.

Jetzt *fordern* wir gleich die ganze Menge der reellen Zahlen, die überall *lückenlos* und *vollständig* sein soll.

> *Forderung*:
> $\mathbb{R}$ sei eine Menge. Mit den Elementen von $\mathbb{R}$ rechne man so wie mit den rationalen Zahlen. Auch die Anordnung der Elemente soll so sein wie die der rationalen Zahlen mit der folgenden zusätzlichen Eigenschaft der *Vollständigkeit*:

Axiom (Vollständigkeitsaxiom). Sei $([r_n, s_n])$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$.

> Dann gibt es genau eine Zahl x, die in allen Intervallen $[r_i, s_i]$ liegt.



„Axiom“ ist das griechische Wort für „Forderung“, eine Forderung, die für „gerecht“ oder plausibel gehalten wird und deren Aussage „evident“ sein soll. Provoziert hat die axiomatische Forderung der Vollständigkeit der Konflikt mit den anschaulichen geometrischen Größen, die jetzt gemessen und durch die reellen Zahlen repräsentiert werden können. Dies ist das Ziel der Forderung gewesen.

Hier stellt sich die Frage nach der axiomatischen Methode.

> Woher kommen Axiome, wie wählen wir sie aus, wie begründen wir sie?

Ganz grundsätzlich:

> Ist die axiomatische Methode geeignet, reale oder anschauliche Phänomene zu erfassen?

Axiome, so sagt man, sind *evidente* Aussagen. Wir bemerken, dass die Evidenz der Forderung der Vollständigkeit aus der anschaulichen Vollständigkeit der geometrischen Geraden kommt und *nicht* aus dem Bereich der rationalen Zahlen selbst. Es ist eine geometrische Evidenz, die der Arithmetik hinzugefügt, man kann fast sagen „aufgezwungen“ wird. Für die klassische Arithmetik, die bis $\mathbb{Q}$ reicht, ist gerade die Unvollständigkeit evident. Wir erreichen mit der axiomatischen Setzung von $\mathbb{R}$ mit dem Vollständigkeitsaxiom eine neue arithmetische Stufe, eine axiomatische, d. h. eine *theoretische* Stufe.

Es fehlt noch die Konstruktion der reellen Zahlen, die sagt, was diese geforderten reellen Zahlen sind. Dazu kommen wir im nächsten Punkt.

Jetzt hat sich die Situation entscheidend gewandelt: Jeder möglichen geometrischen Länge, markiert durch einen Punkt auf einer Geraden, entspricht nun, das sichert das Vollständigkeitsaxiom, eine reelle Zahl. Und umgekehrt: Alle diese reellen Zahlen lassen sich wieder auf einer geometrischen Geraden, der „Zahlengeraden“, als Punkte *veranschaulichen*. Das ist ein großer Schritt: Wegen dieser gegenseitigen Entsprechung kann man Zahlen und Längen identifizieren. Oder besser: Wir können Längen und allgemein Größen durch reelle Zahlen *ersetzen*.

Die Folge ist: Die Zahlen*gerade* wird eine Gerade aus *Zahlen*. Die geometrische Gerade wird zur *Kopie* von $\mathbb{R}$. Wir haben in Kürze und Schnelligkeit beobachtet, was in der Mathematik des 19. Jahrhunderts allmählich geschah. Das lineare, geometrische Kontinuum wurde von einem arithmetischen Kontinuum abgelöst. Das Kontinuum ist seitdem $\mathbb{R}$. Das Kontinuum ist zu einer Menge geworden. Zurückübersetzt in die Geometrie: Das lineare Kontinuum ist zur Punktmenge geworden. Dies ist die Folge des Vollständigkeitsaxioms.

Die Frage, die sich jetzt stellt, wenn wir auf dieses Ergebnis schauen, ist: Wird diese umkehrbare Korrespondenz zwischen reellen Zahlen und Punkten der geometrischen Gerade, dem anschaulichen, geometrischen Kontinuum gerecht? Ist es überhaupt möglich, das geometrische „Kontinuum“ einer Geraden durch Punkte, die auf ihr liegen, zu begreifen? Oder handelt es sich bei Punkten und Geraden um ganz fremde Dinge, zwischen denen nur ein *äußeres Verhältnis*, das in der Inzidenz besteht: Punkte liegen auf Geraden, Geraden verlaufen durch Punkte.

Mathematisch ist heute diese Frage – durch das Vollständigkeitsaxiom und die Folgen – wie oben beschrieben entschieden. Es bleiben philosophische Fragen:

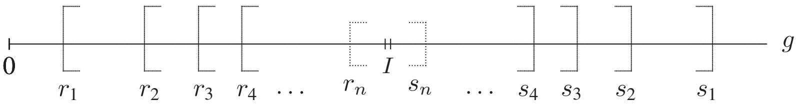
– Kann das Phänomen des Kontinuums durch Punkte erfasst werden? Ist das geometrische Kontinuum eine Menge von Punkten?

Speziell:

– Kann die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ das lineare Kontinuum ersetzen?

Hieraus entsteht noch einmal die Frage nach der Evidenz des obigen Vollständigkeitsaxioms, in dem die zentrale mathematische Entscheidung liegt. Betrachten wir Intervallschachtelungen *geometrisch*, so entsprechen den Intervallen Strecken. Betrachten wir den anschaulichen Durchschnitt über alle Intervallstrecken einer Intervallschachtelung, so ist dieser Schnitt, das verlangt das Vollständigkeitsaxiom, geometrisch ein Punkt. Aus Kontinua wird in dieser Operation des Durchschnittes etwas Diskontinuierliches. Kann das sein? Ist es nicht *geometrisch* denkbar oder gar denknotwendig, dass das Ergebnis der Durchschnittsbildung ein Kontinuum, ein Intervall ist? Dessen Länge müsste unendlich klein, „infinitesimal“ sein – aber nicht Null. Könnte es also so sein:

> Sei $([r_n, s_n])$ eine Intervallschachtelung mit reellen Grenzen auf einer Geraden g. Dann gibt es ein *Intervall* I, das in allen Intervallen $[r_i, s_i]$ liegt. Die Länge des Intervalls ist infinitesimal.



Die Vorstellung von etwas, das unendlich klein sein soll, ist eine Herausforderung. Das unendlich Kleine ist ein mathematisches Problem und ein philosophisches Problem – wie das Problem des Unendlichen überhaupt, das uns gleich ausführlicher begegnet.

– Ist das unendlich Kleine denkbar? Was ist sein Verhältnis zum Kontinuum?

Die Idee der infinitesimalen Größen hat fast von Beginn an die Mathematik begleitet, sie hat im 17. Jahrhundert zur *Infinitesimal*rechnung geführt, hat im 18. Jahrhundert eine Blüte erlebt, ist im 19. Jahrhundert verworfen worden und wurde im 20. Jahrhundert mathematisch rehabilitiert – fast ohne Folgen. Darüber berichten wir im Kapitel 3.

Wir bemerken noch, dass die Durchschnitte über die Intervallstrecken, die wir uns eben vorstellten und die die Frage nach dem unendlich Kleinen aufwarfen, auch das Element des *unendlich Großen* enthalten: Es geht im Durchschnitt um unendlich viele Intervallstrecken.

1.5 Zur Konstruktion der reellen Zahlen

Wir kommen zu der Frage, was das sein kann, was man als Zahl x im Vollständigkeitsaxiom fordert. Es geht um die Konstruktion dieser Zahlen und die Konstruktion des Zahlbereichs $\mathbb{R}$.

Da tut man etwas, was sehr mathematisch ist und den unbefangen Leser vielleicht überrascht und befremdet. Wir stellen uns die Intervallschachtelung wie oben vor, die gegen die geforderte Zahl $\sqrt{2}$ „konvergieren“ soll, wie man sagt. Da man nicht sagen kann, was z. B. dieses $x = \sqrt{2}$ ist, erhebt man die oben angegebene Intervallschachtelung selbst zur mathematischen Identität und sagt – *im ersten Versuch*: Diese Intervallschachtelung, das ist die $\sqrt{2}$. Prägnant aber unzulässig ausgedrückt:

> $\sqrt{2}$ *ist die Intervallschachtelung, die gegen* $\sqrt{2}$ *konvergiert.*

In dieser Formulierung machen wir gerade den Fehler, den wir zur Vermeidung empfohlen haben: Wir tun am Ende des Satzes so, als wenn $\sqrt{2}$ schon da wäre. Daraus ergibt sich der zirkuläre Charakter der Formulierung. Anders aber ist es umständlich, zu sagen: *Diese* Intervallschachtelung ist $\sqrt{2}$. Es geht darum, den formalen Term $\sqrt{2}$ als eine vorliegende, konkrete Intervallschachtelung zu erklären. Kurz und weniger deutlich:

> $\sqrt{2}$ *ist eine Intervallschachtelung.*

Vom psychologischen und philosophischen Standpunkt ist auch diese Formulierung einigermaßen merkwürdig. Das Problem ist, eine Zahl zu *konstruieren*, wie sie im Vollständigkeitsaxiom gefordert wird. Zur Verfügung steht als Instrument eine Intervallschachtelung, ein Prozess. Der Konstruktionsprozess aber liefert keine Zahl. Er führt prinzipiell zu keinem Ergebnis, da er unendlich ist. Da also der Konstruktionsprozess das Einzige ist, was man in der Hand hat, *erklärt* man ihn zu seinem Ergebnis. Also:

– Der Prozess wird als Ergebnis gesetzt.

  Das erscheint paradox. Da das Problem der Konstruktion einer Zahl in der Intervallschachtelung repräsentiert ist, wird es fast absurd:

– Das Problem ist die Lösung.

  Wenn ein Problem soweit konkretisiert ist wie im Beispiel $\sqrt{2}$, ist das mathematisch legitim. Es ist ein typisch theoretisches Vorgehen, für den Lernenden sehr ungewöhnlich und schwer zu akzeptieren. Eine Intervallschachtelung ist doch keine Zahl.

Was man hier tut, ist auch erkenntnistheoretisch bemerkenswert. Kein geringerer als Richard Dedekind, der im 19. Jahrhundert wesentlich an der Konstruktion der reellen Zahlen beteiligt war und dabei mathematisch in etwas anderer, aber vergleichbarer Weise vorging, hatte seine Schwierigkeiten mit dieser Vorgehensweise. Er wehrte sich gegen die Identifikation der Zahl, die man sich im Innern aller Intervalle *vorstellt*, mit der Schachtelung. Im Denken tritt für ihn etwas zu dem unendlichen Prozess hinzu. Dedekind hätte von der Zahl $\sqrt{2}$ als „geistiger Schöpfung“ gesprochen, die der Mensch aus der Vorstellung der Intervallschachtelung hervorbringt. Das aber ist eine philosophische Redeweise und mathematisch nicht konkret. Mathematisch greifbar ist in unserem Beispiel allein die Intervallschachtelung.

Das mathematische Vorgehen – die Erklärung von Intervallschachtelungen als Zahlen und dann das Rechnen mit solchen Intervallschachtelungen – dokumentiert wieder sehr deutlich den mathematischen Schritt ins Theoretische. Für den unvorbereiteten Anfänger ist dieser Schritt eine besondere Herausforderung. Die Konstruktion der reellen Zahlen ist eine Konstruktion in einer neuen, theoretischen Bedeutung. In der Schule geht man gewöhnlich und aus guten Grund auf diese Konstruktion nicht ein.

Es tritt in der bisher nur vorläufig und im Grundsatz beschriebenen Konstruktion ein zusätzliches Problem auf, das den ersten Versuch, $\sqrt{2}$ zu definieren, kompliziert, prinzipiell aber nicht verändert. Es gibt unterschiedliche Intervallschachtelungen, die $\sqrt{2}$ darstellen können. Im obigen Beispiel des Heronverfahrens braucht man nur die Anfangsbedingung zu verändern und schon ergibt sich eine andere Intervallschachtelung, die ebenso $\sqrt{2}$ darstellen kann. Da die Wahl frei ist und es diverse Verfahren gibt, gibt es unbegrenzt viele Intervallschachtelungen, die $\sqrt{2}$ sein könnten. Was tut man? Man nimmt alle solche „äquivalenten“ Intervallschachtelungen, die zusammen $\sqrt{2}$ sein sollen. Einzelne Intervallschachtelungen wie die oben angegebene *repräsentieren* dann $\sqrt{2}$ in diesem neuen Sinn. Dies ist *der zweite und endgültige Versuch*, zu sagen, was $\sqrt{2}$ ist:

– $\sqrt{2}$ *ist eine Menge von Intervallschachtelungen.*
– $\mathbb{R}$ *ist die Menge aller Mengen äquivalenter Intervallschachtelungen.*

Es gibt unterschiedliche Konstruktionen der reellen Zahlen, die in ähnlicher Weise vorgehen. Und alle Konstruktionen zeigen wie zuvor das Vollständigkeitsaxiom, dass im Bereich der Zahlen etwas Neues und Besonderes geschehen ist:

> Mit der *Forderung* der reellen Zahlen, die sich besonders im Vollständigkeitsaxiom ausdrückt, ist der Bezug zur Wirklichkeit aufgehoben. Die *Konstruktionen* bieten Repräsentanten für die reellen Zahlen, die keine Einzelobjekte sondern unendliche Prozesse sind.

Das Axiom der Vollständigkeit ist, wie wir oben bemerkten, vom Gesichtspunkt der Zahlen her *nicht* evident.

> Das Vollständigkeitsaxiom ist für den Bereich Zahlen eine abstrakte Setzung, die der Geometrie der Geraden entlehnt ist.

Das Ziel war die Entsprechung zwischen den Punkten auf einer Geraden und Zahlen, um die Größen und die Punkte auf einer Geraden durch die gesetzten Zahlen darstellen und dann ersetzen zu können. Die Folge und die ausdrückliche Absicht war die Arithmetisierung der Analysis und der Mathematik.

Die Konstruktionen der reellen Zahlen, von denen wir eine angedeutet haben, sind keine Abstraktionen aus einer physikalischen oder anschaulichen Wirklichkeit. Über den Grad und die Problematik ihrer Formalität werden wir im nächsten Punkt sprechen.

Mit der Axiomatik und der Konstruktion der reellen Zahlen, die unendliche Prozesse als mathematische Gegenstände akzeptiert, ist die Mathematik in eine neue Ebene des Theoretischen und Abstrakten aufgestiegen.

1.6 Über den Umgang mit dem Unendlichen

In der eben angedeuteten Konstruktion der reellen Zahlen werden Intervallschachtelungen als klar bestimmte Objekte aufgefasst. Dies ist heute derart Standard, dass kaum mehr wahrgenommen wird, welche Setzung hier passiert.

Eine Intervallschachtelung ist eine unendliche Folge von Intervallen

$$[b_1, a_1],\ [b_2, a_2],\ [b_3, a_3],\ [b_4, a_4],\ \ldots,$$