Siegfried Gottwald

Mehrwertige Logik

Einführung in Theorie und Anwendungen

LOGICA NOVA

Herausgegeben von

Siegfried Gottwald
Lothar Kreiser
Werner Stelzner

in Zusammenarbeit mit

G. Asser (Greifswald) · K. Berka (Prag) · N. C. A. da Costa (São Paulo) · J. M. Dunn (Bloomington) · C. F. Gethmann (Essen) · L. Gumański (Toruń) · R. Hilpinen (Turku) · O. F. Serebrjannikov (Leningrad) · V. A. Smirnov (Moskau) · N. Tennant (Canberra) · Chr. Thiel (Erlangen)

Siegfried Gottwald

Mehrwertige Logik

Eine Einführung in Theorie und Anwendungen

Akademie-Verlag Berlin 1989

ISBN 3-05-000765-6
ISSN 0323-5157

Erschienen im Akademie-Verlag Berlin, DDR-1086 Berlin, Leipziger Str. 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/167/89
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", DDR-7400 Altenburg
Einbandgestaltung: Peter Werzlau
LSV 0145
Bestellnummer: 754 960 7 (2191/1)
03500

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	IX
1.	Einleitung	1
1.1.	Klassische und mehrwertige Logik	1
1.2.	Zur Geschichte der mehrwertigen Logik	5
1.3.	Weiterhin benutzte Begriffe und Bezeichnungen	9
2.	Mehrwertige Aussagenlogik	12
2.1.	Die formale Sprache der Aussagenlogik	12
2.2.	Ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte, Tautologien und Folgerungen	18
2.3.	Spezielle Junktoren und Mengen von Quasiwahrheitswerten	27
2.3.1.	Wahrheitswertfunktionen für Negationen	30
2.3.2.	Wahrheitswertfunktionen für Konjunktionen	31
2.3.3.	Wahrheitswertfunktionen für Alternativen	32
2.3.4.	Wahrheitswertfunktionen für Implikationen	34
2.3.5.	Die Wahrheitswertfunktionen j_t	35
2.4.	Die Entscheidbarkeit mehrwertiger aussagenlogischer Systeme	36
2.5.	Die Axiomatisierbarkeit mehrwertiger aussagenlogischer Systeme	37
2.6.	Die formale Erfassung der Folgerungsbeziehung	53
2.7.	Funktionale Vollständigkeit	69
2.8.	Normalformdarstellungen	81
3.	Spezielle Systeme mehrwertiger Aussagenlogik	84
3.1.	Die Łukasiewiczschen aussagenlogischen Systeme	84
3.1.1.	Wichtige Tautologien der Ł-Systeme	86
3.1.2.	Charakterisierbarkeit der Anzahl der Quasiwahrheitswerte	90
3.1.3.	Axiomatisierbarkeit	99
3.1.4.	Entscheidbarkeit von $Ł_\infty$	105
3.1.5.	Darstellbarkeit von Wahrheitswertfunktionen	107

3.2. Algebraische Strukturen für die ŁUKASIEWICZschen Systeme 121
3.2.1. MV-Algebren ... 122
3.2.2. MV-Algebren und Axiomatisierungen der Ł-Systeme ... 134
3.2.3. ŁUKASIEWICZ-Algebren ... 144
3.3. Die POSTschen aussagenlogischen Systeme ... 146
3.4. Die GÖDELschen aussagenlogischen Systeme ... 155
3.5. Spezielle dreiwertige aussagenlogische Systeme ... 165
3.6. Allgemeinere Junktorenklassen und Quasiwahrheitswertstrukturen ... 170
3.6.1. Eine Charakterisierung der Wahrheitswertfunktionen et_1 und vel_1 ... 170
3.6.2. T-Normen als Wahrheitswertfunktionen für Konjunktionen .. 172
3.6.3. Mehrdimensionale Quasiwahrheitswertstrukturen ... 179

4. Mehrwertige Prädikatenlogik ... 183

4.1. Mehrwertige Prädikate ... 183
4.2. Die formale Sprache der Prädikatenlogik und ihre mehrwertigen Interpretationen ... 184
4.3. Zur Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Ausdrucksmengen ... 192
4.4. Die Axiomatisierbarkeit mehrwertiger prädikatenlogischer Systeme ... 207
4.5. Die ŁUKASIEWICZschen prädikatenlogischen Systeme ... 218
4.5.1. Wichtige allgemeingültige Ausdrücke ... 219
4.5.2. Resultate über die Ł-Systeme ... 223
4.5.3. Das unendlichwertige Ł-System ... 230
4.6. Prädikatenlogische Systeme mit mehrwertiger Identität ... 237
4.6.1. Mehrwertige Identitätsbeziehungen ... 238
4.6.2. „Absolute" Identitätsbeziehungen ... 240
4.6.3. „Echt mehrwertige" Identitätsbeziehungen ... 243

5. Anwendungen der mehrwertigen Logik ... 251

5.1. Das Anwendungsproblem ... 251
5.2. Quasiwahrheitswerte und alethische Modalitäten ... 252
5.3. Mehrwertige und intuitionistische Logik ... 258
5.4. Mehrwertige Logik und Präsuppositionstheorie ... 261
5.5. Unabhängigkeitsbeweise I: aussagenlogisch ... 267
5.6. Unabhängigkeitsbeweise II: prädikatenlogisch ... 271
5.7. Konsistenzuntersuchungen zur Mengenlehre ... 291
5.8. Unscharfe Mengen, Vagheit von Begriffen und mehrwertige Logik ... 298

5.8.1. Vagheit von Begriffen und unscharfe Mengen 298
5.8.2. Grundeigenschaften unscharfer Mengen 303
5.8.3. Gleichungen für unscharfe Zahlen 315
5.8.4. Unscharfe Relationen 324
5.9. Zwei außergewöhnliche Verallgemeinerungen 333
5.9.1. Unscharfe Folgerungsbeziehung 334
5.9.2. Approximatives Schließen 337

Literaturverzeichnis 346

Symbolverzeichnis 366

Namenverzeichnis 369

Sachverzeichnis 373

Vorwort

Wie die gesamte Logik der neueren Zeit, so befindet sich auch die mehrwertige Logik im Bereich sowohl mathematisch orientierter als auch philosophisch motivierter Betrachtungen. Soll daher ein Gesamteindruck vom aktuellen Entwicklungsstand der mehrwertigen Logik dem Leser vermittelt werden, muß der Autor diesen unterschiedlichen Aspekten Rechnung tragen. Das ist wegen der oft sehr differierenden Herangehensweisen durchaus problematisch – nicht allein für den nur auf einem dieser Gebiete geschulten Leser, der bereit sein muß, auch den Überlegungen und Methoden des jeweils anderen Gebietes zu folgen, sondern in gleicher Weise für den Autor selbst, der einen brauchbaren Kompromiß zwischen typisch mathematischer und typisch philosophischer Präsentation finden muß. Der Leser möge entscheiden, inwieweit dies im vorliegenden Buch gelungen ist: Angestrebt wurde eine Synthese der fast ausschließlich kalkültechnisch orientierten Darstellung bei ROSSER/TURQUETTE [1952] und den weitgehend philosophisch orientierten Darstellungen bei RESCHER [1969] und insbesondere bei SINOWJEW [1968].

Für lange Zeit schien es unklar, ob mehrwertige Logik mehr ist als nur eine unter vielen möglichen Verallgemeinerungen der klassischen zweiwertigen Logik. Noch ROSSER/TURQUETTE [1952] erwähnen das Problem der Anwendungen mehrwertiger logischer Systeme als eines der wesentlichen offenen Probleme für die mehrwertige Logik. Diese Situation hat sich seither gewandelt. Im vorliegenden Buch findet dies darin seinen Ausdruck, daß ein ganzes Kapitel unterschiedlichsten Anwendungsbereichen gewidmet ist.

Trotz gelegentlicher Mißverständnisse ist es klar, daß die mehrwertige Logik die klassische weder verdrängen noch ersetzen will. Es erweist sich jedoch, daß die mehrwertige Logik zu einer Reihe von interessanten Anwendungsbereichen fruchtbare Ideen bzw. Formalisierungen beizutragen vermag, die eine rationale Durchdringung und Darstellung jener Bereiche gestatten. Die Abschnitte über Präsuppositionstheorie, über unscharfe Begriffe und Mengen sowie über Konsistenzuntersuchungen zur Mengenlehre in Kapitel 5 zeigen dies exemplarisch. Sie deuten dem Kenner zugleich an, in welcher Weise die Berufung auf mehrwertige Logik Gewinn bedeuten kann. In dieser Weise widerlegen sie auch das gelegentlich vorgetragene Argument der prinzipiellen Vermeidbarkeit der mehrwertigen Logik, da man ja spätestens metatheoretisch doch der klassischen Logik sich bediene: So richtig dieses Argument ist, so sehr zielt es am Kern des Problems vorbei und liegt statt dessen auf dem Niveau von Behauptungen, daß man prinzipiell auf die Benutzung von Kraftfahrzeugen, auf moderne medizinische Betreuung, auf Kernenergie verzichten könne — all dies ist „prinzipiell" möglich, wäre aber durchaus unvernünftig. Vernünftig dagegen ist, mehrwertige Logik ebenso wie die genannten anderen Mittel dort einzusetzen, wo sie sinnvoll und nutzbringend angewendet werden können. In diesem Sinne gibt Kapitel 5 einen Überblick über wichtige heutige Anwendungsideen für die mehrwertige Logik, ohne erschöpfend sein zu können. Vielmehr soll diese relative Vielfalt unterschiedlicher Anwendungsaspekte den Leser anregen, über noch weitere Anwendungsmöglichkeiten nachzudenken.

Ein in dieses Buch nicht aufgenommener Anwendungsbereich sei hier jedoch extra genannt: die in den letzten Jahren viel diskutierte Benutzung mehrwertiger Logik zum Entwurf und zur Beschreibung von Schaltungen und Schaltelementen mit mehr als zwei stabilen Zuständen, die für die moderne Rechentechnik und Informatik potentielle Bedeutung haben. Dafür sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

Die Anregung, dieses Buch zu schreiben, stammt von meinem verehrten Kollegen Lothar Kreiser. Ihm sowie den Mitgliedern des Wissenschaftsbereichs Logik der Karl-Marx-Universität, mit denen ich Teile des Textes ausführlich diskutieren konnte, gilt mein Dank, vor allem aber meiner Frau für ihr andauerndes Verständnis für das mit solch einem Projekt verbundene stete stoffbezogene Engagement.

Leipzig, im Juni 1986

Siegfried Gottwald

1. Einleitung

1.1. Klassische und mehrwertige Logik

Die klassische Logik basiert auf zwei fundamentalen Prinzipien, dem Extensionalitätsprinzip und dem Zweiwertigkeitsprinzip. Das *Extensionalitätsprinzip* besagt in seiner aussagenlogischen Fassung, daß der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage H nur abhängt von den Wahrheitswerten derjenigen Aussagen, aus denen sich H zusammensetzt, daß es dagegen für den Wahrheitswert von H irrelevant ist, ob die Aussagen, aus denen sich H zusammensetzt, inhaltlich in irgendeiner Beziehung zueinander stehen. In seiner prädikatenlogischen Fassung besagt das Extensionalitätsprinzip zusätzlich, daß jeder Begriff eindeutig festgelegt ist durch die Gesamtheit aller der Objekte, auf die er zutrifft, d. h. durch seinen Umfang. Das *Zweiwertigkeitsprinzip* besagt, daß es genau die beiden Wahrheitswerte W und F – für „wahr" und für „falsch" – gibt und daß jede Aussage einen und nur einen dieser beiden Wahrheitswerte hat.

Die unbeschränkte Gültigkeit dieser beiden fundamentalen Prinzipien ist seit jeher Gegenstand logisch-philosophischer Diskussionen gewesen. Natürlich kann es dabei nicht darum gehen, die klassische Logik in ihrer modernen Gestalt als formale Logik in Frage zu stellen – dazu hat diese klassische Logik ihren wissenschaftlichen Wert schon zu deutlich manifestiert. Sehr wohl jedoch steht im Hintergrund solcher Diskussionen auch die Frage nach einer eventuellen angemessenen Abgrenzung des Anwendungsfeldes der klassischen Logik und damit zugleich die Frage nach Wert und Anwendbarkeit sogenannter nichtklassischer logischer Systeme, die eben aus Auffassungen heraus in der Vergangenheit entwickelt worden sind, daß nicht alle Erscheinungsformen des Logischen gerade jenen beiden fundamentalen Prinzipien der klassischen Logik untergeordnet werden können. Denkt man etwa an Aussagen über zukünftige Ereignisse oder auch an die logische Behandlung von Fragen, so scheint es durchaus nicht offensichtlich, ob in solchen Zusammenhängen stets das Zweiwertigkeitsprinzip vernünftig beibehalten werden kann – oder ob nicht vielleicht an manchen Stellen die Nicht-Zuordnung von Wahrheitswerten sachgemäßer erschiene. Oder denkt man an Aussagen, die unter Benutzung von Modalitäten ausdrückenden Adverbien gebildet sind, wie etwa:

Notwendigerweise ist $2 \cdot (3 + 4)$ gleich $6 + 8$

Notwendigerweise starb J. W. Goethe am 22. 3. 1832 so ist nach dem gewöhnlichen intuitiven Sprachverständnis die erste dieser Beispielaussagen wahr, die zweite aber falsch — und mithin das Extensionalitätsprinzip hier verletzt, denn beide Beispielaussagen können als so gebildet vorgestellt werden, daß der einstellige aussagenbildende Operator „notwendigerweise gilt" auf die wahren Aussagen „$2 \cdot (3 + 4) = 6 + 8$" bzw. „J. W. Goethe starb am 22. 3. 1832" angewendet wurde.

Die *mehrwertige Logik*, die der Gegenstand dieses Buches ist, behält das Extensionalitätsprinzip der klassischen Logik sowohl in seiner aussagenlogischen als auch in seiner prädikatenlogischen Fassung bei, verzichtet aber auf das Zweiwertigkeitsprinzip. Der Leser, der sich auch über andere Gebiete nichtklassischer Logik informieren möchte, sei auf die Bücher Gabbay/Guenthner [1983—1989] und Kreiser/Gottwald/Stelzner [1988] verwiesen, wo er Informationen über eine Vielzahl weiterer nichtklassischer logischer Systeme findet.

Verzicht auf das Zweiwertigkeitsprinzip bedeutet aber nicht, daß die mehrwertige Logik auf die Betrachtung von Wahrheitswerten verzichtet. Wie in der klassischen Logik gehen wir auch hier davon aus, daß jeder Aussage ein Wahrheitswert zugeordnet ist — aber in der mehrwertigen Logik gibt es mehr als nur zwei Wahrheitswerte. Die erste und für das intuitive Verständnis auffälligste Konsequenz dieses Schrittes ist, daß die in der klassischen Logik unterstellte Beziehung der Wahrheitswerte W, F zum Wahrsein bzw. Falschsein von Aussagen ihre Natürlichkeit und intuitive Evidenz verliert. Es gibt bis heute keine überzeugende einheitliche Deutung der in der mehrwertigen Logik „zusätzlich" betrachteten Wahrheitswerte, die jene Werte mit dem naiven Verständnis von Wahrsein bzw. von Abstufungen dieses Wahrseins verbindet. Es ist dies einer der Gründe, weswegen wir weiterhin in diesem Buch von *Quasiwahrheitswerten* statt von Wahrheitswerten sprechen werden — und weswegen brauchbare und erfolgreiche Anwendungen der mehrwertigen Logik wesentlich sind, um zu verdeutlichen, daß es sich bei der mehrwertigen Logik um mehr als nur eine formale Verallgemeinerung der klassischen Logik handelt. Überhaupt wird man keine für alle relevanten Anwendungsfälle brauchbaren inhaltlichen Deutungen der Quasiwahrheitswerte erwarten dürfen, sondern diese Deutungen von Fall zu Fall den Anwendungen anzupassen haben. Strehle [1984] gibt für einen speziellen Anwendungsfall solch eine Diskussion; in den Abschnitten 5.2 und 5.4 enthaltene Resultate bzw. Ansätze leisten Analoges, wobei sogar eine Rückführung auf — jeweils mehrere — gewöhnliche Wahrheitswerte erfolgt. Die Rückführbarkeit spezieller Quasiwahrheitswertstrukturen auf Funktionen in der Menge $\{\mathsf{W}, \mathsf{F}\}$ der gewöhnlichen Wahrheitswerte diskutieren in anderem Kontext auch z. B. Scott [1973], [1974], Urquhart [1973], Malinowski

[1977] und BYRD [1979]. Wir überlassen die Deutung der Quasiwahrheitswerte den jeweiligen Anwendungsfällen.

Die mehrwertige Logik trifft keine generelle Festlegung darüber, ob in ihrem Bereich an Stelle der beiden Wahrheitswerte der klassischen Logik nun drei, vier, fünf, ... oder eventuell sogar unendlich viele Quasiwahrheitswerte treten sollen. Das bedeutet nicht, daß im jeweiligen konkreten Falle eines ganz bestimmten Systems mehrwertiger Logik etwa die Anzahl der Quasiwahrheitswerte variabel wäre; diese Anzahl von Quasiwahrheitswerten wird stets als feststehend betrachtet.[1] Es bedeutet aber, daß unsere Untersuchungen und Begriffsbildungen so allgemein angelegt werden sollen, daß die spezielle Quasiwahrheitswerteanzahl weitgehend ohne Einfluß bleibt, unsere Überlegungen mithin auf mehrwertige logische Systeme mit ganz unterschiedlichen Anzahlen von Quasiwahrheitswerten zutreffen. Um ein Beispiel zu nennen: der Begriff „Tautologie", den wir für Ausdrücke der mehrwertigen Aussagenlogik zu erklären beabsichtigen, wird so gefaßt werden, daß seine Definition in keiner Weise auf eine bestimmte Anzahl von Quasiwahrheitswerten Bezug nimmt; d. h. aber, daß auf diesen Begriff dann im Falle z. B. dreier Quasiwahrheitswerte ebenso Bezug genommen werden kann wie im Falle von vier, von 13 oder auch von unendlich vielen Quasiwahrheitswerten.

Übrigens ist nicht allein die Anzahl von Quasiwahrheitswerten charakteristisch für Systeme mehrwertiger Logik, sondern es sind dies auch strukturelle Beziehungen innerhalb der Menge von Quasiwahrheitswerten: Während etwa in der Quasiwahrheitswertmenge $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ je zwei der Quasiwahrheitswerte in natürlicher Weise hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen werden können, ist dies bei der Wertemenge $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ von geordneten Paaren aus Zahlen 0, 1 keineswegs der Fall. Aber beide Mengen von Quasiwahrheitswerten bestehen aus je vier Elementen.

Die einzigen (stillschweigenden) Voraussetzungen unserer weiteren Betrachtungen werden sein, daß (1) jeder Aussage genau ein Quasiwahrheitswert zukommt und daß (2) stets wenigstens zwei Quasiwahrheitswerte vorhanden sind – wir wollen sie normalerweise mit 0 und 1 bezeichnen – und diese beiden Quasiwahrheitswerte so beschaffen sind, daß sie bei Weglassung aller anderen Quasiwahrheitswerte (und eventuell gewisser Junktoren) sich verhalten wie die Wahrheitswerte F, W der klassischen (zweiwertigen) Logik. In diesem Sinne werden die von uns be-

---

[1] Allerdings gibt es auch Systeme, in denen die Anzahl der Quasiwahrheitswerte in gewissem Umfang variabel gelassen wird (vgl. MICHALSKI [1977]).

trachteten Systeme mehrwertiger Logik Verallgemeinerungen der klassischen Logik sein.

Die gegenüber der klassischen Logik größere Anzahl von Quasiwahrheitswerten, die in Systemen mehrwertiger Logik vorhanden sein können, gestatten natürlich auch eine größere Vielfalt von Verknüpfungen zwischen und Operationen mit solchen Quasiwahrheitswerten. Syntaktisches Gegenstück dieses semantischen Sachverhaltes wird z. B. sein, daß in der mehrwertigen Aussagenlogik je mehrere gleichberechtigte Verallgemeinerungen der klassischen aussagenlogischen Verknüpfungen wie z. B. Negation, Konjunktion, Implikation existieren, die sich alle nur dann voneinander unterscheiden, wenn Quasiwahrheitswerte verschieden von 0 und 1 in Betracht gezogen werden, daß aber auch Verknüpfungen auftreten werden, für die es in der klassischen Logik keine Entsprechung gibt. Leider gibt es keine allgemeinen Kriterien dafür, wann eine mehrwertig-aussagenlogische Verknüpfung z. B. als mehrwertige Negation, als mehrwertige Konjunktion, als mehrwertige Implikation gelten kann. Die späterhin betrachtete Normalbedingung hebt ebenso wie die Standardbedingung je einzelne charakteristische Eigenschaften der entsprechenden klassischen Junktoren als Kriterien heraus, ohne jedoch eine allgemeine Lösung dieses Problems zu liefern. Rein innerlogische Kriterien sind aber möglicherweise für diesen Zweck prinzipiell unzureichend, und allein Anwendungen mögen von Fall zu Fall hinreichende Begründungen liefern können, welcher mehrwertige aussagenlogische Operator wann die Rolle welches klassischen Junktors übernimmt.

Von den zwei prinzipiell unterschiedlichen Begründungs- und Darstellungsweisen für ein logisches System, nämlich einerseits seiner Basierung auf inhaltlichem, also semantischem Grunde mit nachfolgendem Aufbau eines dafür adäquaten Logikkalküls und andererseits seiner Festlegung durch einen Kalkül mit nachfolgender Angabe solcher semantischer Grundlagen, die genau den Kalkültheoremen einen semantisch ausgezeichneten Status geben, etwa den von Tautologien, bevorzugen wir in diesem Buch die erste Methode. Wir sehen die semantischen Vorstellungen als grundlegender an, die Kalküle haben nach Fixierung dieser semantischen Vorstellungen dann deren formale Erfassung zu leisten. Deswegen werden wir sowohl für die mehrwertige Aussagenlogik als auch für die mehrwertige Prädikatenlogik zunächst die inhaltlichen Vorstellungen, also die semantische Seite dieser logischen Systeme, erläutern, und erst danach uns der kalkülmäßigen Erfassung dieser semantischen Grundlagen zuwenden.

Wesentlicher Teil der folgenden Erörterungen ist schließlich die Diskussion von Anwendungen der mehrwertigen Logik. Gerade weil die historischen Wurzeln der mehrwertigen Logik Anwendungsideen entstammen, die sich nicht als tragfähig erwiesen haben, mehrwertige Logik aber nicht nur von innerlogischem Interesse ist, sind solche Anwendungen geeignet, den Wert der mehrwertigen Logik zu verdeutlichen.

1.2. Zur Geschichte der mehrwertigen Logik

Die Geschichte der mehrwertigen Logik beginnt mit Arbeiten von Łukasiewicz [1920] und Post [1921]. Zwar waren beide zeitlich nicht die ersten, die das Zweiwertigkeitsprinzip in der Logik nicht streng voraussetzten, jedoch begann die eigentliche Entwicklung mehrwertiger logischer Systeme erst nach diesen ihren Arbeiten und im Anschluß an sie.[2]

Die Vorgeschichte der mehrwertigen Logik läßt sich dagegen bis auf Aristoteles zurückverfolgen,[3] der etwa in De Interpretatione, cap. 9, das noch für Łukasiewicz (vgl. Łukasiewicz [1930]) stimulierende Problem diskutierte, welcher Wahrheitswert auf Zukünftiges bezogenen Aussagen zukommen kann. Die Frage, welchen Wahrheitswert man derartigen Aussagen über Zukünftiges zuzuschreiben geneigt ist, hängt u. a. eng zusammen mit philosophischen Auffassungen zum Determinismusproblem, denn die Deutung, daß ein etwa allein vorhandener dritter Wahrheitswert die qualitative Einstufung als „möglich", „unbestimmt" anzeige, ist sehr naheliegend – wenn auch keineswegs notwendig. Und in der Tat haben die den Indeterminismus vertretenden Epikuräer das Zweiwertigkeitsprinzip abgelehnt, während die Stoiker als strenge Deterministen es akzeptierten. Auch in der mittelalterlichen Philosophie und Logik hat jenes Problem der *contingentia futura* wiederholt zu umfangreichen Diskussionen geführt (vgl. Łukasiewicz [1935], Michalski [1937], Baudry [1950], Rescher [1969]), ohne jedoch zu einer Lösung gebracht worden zu sein.

Die allgemeine Belebung der Logikforschung in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts führte zu ersten (teils noch unklaren) Anfängen mehrwertiger logischer Systeme bei McColl [1897] (vgl. Lovett [1900–01]) und Peirce[4], die jedoch ohne Auswirkung auf die nachfolgende Entwicklung blieben.

---

[2] Schon Łukasiewicz [1913] betrachtet verallgemeinerte Wahrheitswerte, aber diese Arbeit blieb für die Entwicklung der mehrwertigen Logik ohne erkennbaren Einfluß.

[3] Man vergleiche etwa Łukasiewicz [1930], [1970], Rescher [1969], Patzig [1973].

[4] Verwiesen sei auf Peirce [1931–58; Bd. 4] sowie Fisch/Turquette [1966], Turquette [1967].

Als mehrwertige logische Systeme werden oft auch die sogenannten „nicht-aristotelischen" Systeme von VASILEV [1910], [1912] angesehen; es scheint aber nach ARRUDA [1977] angebrachter, sie als Vorläufer der heutigen parakonsistenten logischen Systeme aufzufassen, in denen es „sich widersprechende" Theoreme der Form H, $\neg H$ geben kann, ohne daß sich daraus wie z. B. in der klassischen Logik die Herleitbarkeit aller Ausdrücke ergäbe.

Die Entwicklung der mehrwertigen Logik von 1920 bis ca. 1930 wurde im wesentlichen von ŁUKASIEWICZ und der polnischen Logikerschule getragen; ŁUKASIEWICZ/TARSKI [1930] und ŁUKASIEWICZ [1930] geben einen zusammenfassenden Überblick sowohl über kalkültechnische Resultate als auch über Interpretationsprobleme. Daneben hat BERNAYS [1926] die später in Abschnitt 5.5 dargestellte Methode der Unabhängigkeitsbeweise publiziert, die weite Verbreitung gefunden hat.

Die erwähnten Publikationen ŁUKASIEWICZ/TARSKI [1930] und ŁUKASIEWICZ [1930] sowie das – im englischen Sprachraum – einflußreiche Lehrbuch LEWIS/LANGFORD [1932], in dem die Grundideen der mehrwertigen Logik ausführlich dargestellt wurden, haben die weitere Forschung aktiviert. Wichtige theoretische Resultate über mehrwertige logische Systeme waren z. B. die Axiomatisierung des dreiwertigen ŁUKASIEWICZschen Systems $\mathbf{Ł}_3$ (in Negation und Implikation) durch WAJSBERG [1931] und die Ergänzung von $\mathbf{Ł}_3$ zu einem funktional vollständigen System $\mathbf{Ł}_3^S$ sowie dessen Axiomatisierung durch SŁUPECKI [1936]. Wichtige Anwendungsuntersuchungen waren die Klärung des Verhältnisses zur intuitionistischen Logik durch GÖDEL [1932] und JAŚKOWSKI [1936] (vgl. Abschnitt 5.3), die Anwendung dreiwertiger Systeme auf die Diskussion der Antinomienproblematik durch BOČVAR [1938], [1943] (vgl. auch SINOWJEW [1968]), wobei der dritte Wahrheitswert „sinnlos" bedeutet, und die Anwendung auf mathematische Probleme partiell, d. h. nicht überall erklärter Funktionen bei KLEENE [1938], [1952], in welchem Falle der dritte Wahrheitswert für „undefiniert" steht. Schließlich wurden die theoretischen Ansätze in den 40er Jahren insbesondere durch ROSSER und TURQUETTE verallgemeinert und weitergeführt; die Gesamtdarstellung in der Monographie ROSSER/TURQUETTE [1952] wurde für viele Jahre zum Standardwerk über mehrwertige Logik.

Seither ist das Gebiet der mehrwertigen Logik in rascher Entwicklung begriffen. Die noch bei ROSSER/TURQUETTE [1952] als wichtiges Problem genannte Frage nach nützlichen Anwendungen mehrwertiger logischer Systeme ist zwar nicht endgültig beantwortet und wohl auch nie abschließend beantwortbar, aber es wurden zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten untersucht. Kapitel 5 gibt einen Überblick über wesentliche Anwendungen. In gleicher Weise hat der Bestand an theoretischen Resultaten bedeutend zugenommen. Auf Einzelheiten soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden; viele solcher Resultate werden im folgenden erwähnt oder ausführlich dargestellt werden, ohne daß in irgendeiner Beziehung dabei Vollständigkeit angestrebt oder erreichbar wäre.

Neben rein theoretischen Untersuchungen innerhalb von mehrwertigen logischen Systemen und über sie haben anwendungsorientierte Untersuchungen eine zunehmend größere Bedeutung erlangt. Dies können zum einen Anwendungen innerhalb der Logik sein, wie die in den Abschnitten 5.5, 5.6 erörterten Unabhängigkeitsuntersuchungen oder wie Fragen der Deutung logischer Systeme als mehrwertiger Systeme etwa im Falle der intuitionistischen (Abschnitt 5.3), der modalen (Abschnitt 5.2) und z. B. auch der parakonsistenten Logik (vgl. DaCosta/Alves [1981]). Dies können zum anderen Anwendungen außerhalb der Logik sein, wie etwa zur Darstellung und Weiterentwicklung der Theorie der unscharfen Mengen (vgl. Abschnitt 5.8) oder zu einer Übertragung der klassischen Schaltalgebra, d. h. der Anwendung der klassischen Aussagenlogik auf Probleme der Analyse und des Entwurfs elektrischer Schaltungen, auf analoge Untersuchungen bezüglich mehrwertiger aussagenlogischer Systeme (vgl. etwa: Lee/Kandel [1978], Rine [1977] und auch Carvallo [1968]). Dies können z. B. auch kalkültechnische Anwendungen in anderen Bereichen der Mathematik sein, wie etwa die bei Bär/Rohleder [1967] mittels eines mehrwertigen Kalküls, dessen Quasiwahrheitswerte neben W, F ein Wert U für „unbestimmt" und alle reellen Zahlen sind, angegebene Reduktion von (ganzzahligen) 0-1-Optimierungsproblemen auf Fragen der (klassischen) Schaltalgebra. Dies können aber auch aus der mehrwertigen Logik, und zwar speziell dem Problem der funktionalen Vollständigkeit von Junktorenmengen (vgl. Abschnitt 2.7) erwachsene, vorwiegend algebraische Untersuchungen zur Komposition von Funktionen sein (vgl. etwa Rosenberg [1977], Pöschel/Kalužnin [1979] und bereits Jablonskij [1952], [1958]).

Daneben steht das Studium spezifischer algebraischer Strukturen, die aus der Betrachtung spezieller Systeme mehrwertiger (meist Aussagen-) Logik extrahiert wurden, wie etwa die Postschen Algebren (vgl. Abschnitt 3.3), die MV-Algebren und die Łukasiewiczschen Algebren (vgl. Abschnitt 3.2 und etwa noch Cignoli [1970]). Daneben stehen aber auch Anwendungsversuche meist zunächst der Idee einer geeigneten Quasiwahrheitswertmenge in verschiedensten Bereichen, etwa bei der Diskussion der Präsuppositionsproblematik in der natürlichen Sprache (vgl. Abschnitt 5.4) oder bei Problemstellungen der Diagnosefindung, z. B. bei pädagogischen Untersuchungen (vgl. Strehle [1984], Kreschnak [1985]).

Vor allem die letztgenannten Anwendungsideen werden häufig über den Einsatz unscharfer Mengen zur Modellierung unscharfer Begriffe (vgl.

Abschnitt 5.8) vermittelt. Dies scheint ein erfolgversprechenderer Weg zu sein als die vor allem in der Anfangsphase der Entwicklung der mehrwertigen Logik wiederholt versuchte wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung der Quasiwahrheitswerte (vgl. etwa ŁUKASIEWICZ [1913], REICHENBACH [1932], ZAWIRSKI [1935]). Resultate von GAINES [1978] deuten übrigens darauf hin, daß wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung einerseits und an der klassischen Logikauffassung orientierte extensionale Deutung der Quasiwahrheitswerte und damit der Junktoren andererseits unterschiedliche und einander ausschließende Verallgemeinerungen eines gemeinsamen „Kernes" sind. Auch die direkte Kopplung von mehrwertiger Logik und Quantenphysik wie beispielsweise bei REICHENBACH [1949] scheint bis heute nicht zu wirklich fruchtbaren Konsequenzen geführt zu haben, wenngleich man die sogenannte Quantenlogik[5] als mehrwertige Logik mit orthomodularen Verbänden als Quasiwahrheitswertstrukturen auffassen kann.

Zusammenfassende – lehrbuchartige bzw. monographische – Darstellungen der mehrwertigen Logik gibt es nur wenige. ROSSER/TURQUETTE [1952] war für lange Zeit das Standardwerk, dessen Schwergewicht auf Untersuchungen von Kalkülen für mehrwertige logische Systeme liegt. RESCHER [1969] ist eine bedeutende Ergänzung und gibt bei Verzicht auf viele kalkültechnische Details einen breit angelegten Überblick, bei dem neben der Erwähnung der verschiedenen Ansätze und Resultate stets auch eine philosophisch orientierte Erörterung ihrer Grundideen und ihrer Einbettung in umfassendere Entwicklungen gegeben wird. ACKERMANN [1967] stellt eine sehr knappe Einführung in einige wichtige Systeme mehrwertiger Logik dar; und ZINOV'EV [1960] und die erweiterte deutsche Übersetzung SINOWJEW [1968] sowie analog DUMITRIU [1971] erwähnen ebenfalls nur kurz die Grundbegriffe, um dann vorwiegend mit der mehrwertigen Logik zusammenhängende philosophische Fragen zu diskutieren. Das vorliegende Buch unterscheidet sich von RESCHER [1969] dadurch, daß hier die meisten der besprochenen Resultate vollständig bewiesen werden, wodurch aber der Umfang der erörterten Themen und ihre zusätzliche philosophische Diskussion zurücktreten. In diesem Sinne ähnelt es eher ROSSER/TURQUETTE [1952] als RESCHER [1969]. Von jenem unterscheidet es sich aber wesentlich in der Stoffauswahl – und von beiden in dem Gewicht, das hier auf (realisierte und auch potentielle) Anwendungen der mehrwertigen Logik gelegt wird,

---

[5] Überblicksdarstellungen zur Quantenlogik sind u. a. GREECHIE/GUDDER [1973], DALLA CHIARA [1981], [1986] und insbesondere auch HOLDSWORTH/HOOKER [1981 bis 82]; für speziellere Aspekte seien genannt: FINCH [1969], GOLDBLATT [1974], KALMBACH [1974], DALLA CHIARA [1976], DISHKANT [1978].

wobei die hier diskutierten Anwendungen weitgehend verschieden von den in RINE [1977] erörterten sind.

Die nicht in den genannten Darstellungen erfaßte Originalliteratur ist weit verstreut. Eine umfangreiche, gut gegliederte Bibliographie wird bei RESCHER [1969] gegeben und erfaßt die Literatur bis 1964/65. Ergänzungen und die Fortführung bis ca. 1975 bringt die analog organisierte Bibliographie WOLF [1977].

1.3. Weiterhin benutzte Begriffe und Bezeichnungen

Die folgenden Darstellungen der mehrwertigen Logik setzen Vertrautheit des Lesers mit der klassischen, d. h. zweiwertigen Prädikatenlogik PL_2 in dem Umfange voraus, wie er üblichen Universitätskursen für Nichtmathematiker entspricht. In unserer klassischen Metasprache benutzen wir deswegen auch gelegentlich die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$ für Negation, Konjunktion, Alternative, Implikation, Äquivalenz, Generalisierung und Partikularisierung in PL_2; „gdw" steht stets für „genau dann, wenn" und $=_{\mathrm{def}}$ bedeutet definitorische Übereinstimmung. Entsprechend rechnen wir zum Grundwissen des Lesers Grundkenntnisse der elementaren Mengenalgebra. Die Gesamtheit aller Objekte x, die eine gewisse Eigenschaft $H(x)$ haben, bezeichnen wir mit $\{x \mid H(x)\}$; mit $\{x \in A \mid H(x)\}$ ist die Gesamtheit aller derjenigen x mit der Eigenschaft $H(x)$ gemeint, die Element von A sind. Vereinigungs-, Durchschnitts- und Differenzbildung für Mengen werden wie üblich mit $\cup$, $\cap$, $\setminus$ bezeichnet; $\emptyset$ ist die *leere Menge*; (a, b) ist das *geordnete Paar* der Elemente a, b, charakterisiert durch die Eigenschaft

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Die aus den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ bestehende Menge ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$. $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

A^n die Menge aller n-Tupel von Elementen aus A. Gehört jedes Element einer Menge A zugleich auch zu einer Menge B, so ist A *Teilmenge* von B: $A \subseteq B$.

Relationen sind Mengen von geordneten Paaren. Ist R eine Relation und $(a, b) \in R$, so sagt man, daß R auf (a, b) zutrifft und schreibt dafür auch aRb. Eine *Äquivalenzrelation* S in einer Menge A ist eine solche Relation $S \subseteq A \times A$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d. h., für die aSa für jedes $a \in A$ gilt und mit aSb stets auch bSa sowie mit aSb und

bSc stets auch aSc gilt. Ist S Äquivalenzrelation in A, so wird jedem $a \in A$ seine Rest- bzw. Äquivalenzklasse $[a]_S = \{b \in A \mid aSb\}$ bezüglich S zugeordnet; solche Restklassen $[a]_S$, $[b]_S$ sind genau dann disjunkt, d. h. haben genau dann $\emptyset$ als Durchschnitt, wenn sie verschieden sind.

Eine Relation R heißt *Halbordnung* in einer Menge A, wenn $R \subseteq A \times A$ reflexiv und transitiv ist und aus aRb, bRa stets $a = b$ folgt; ist R Halbordnung in A, so heißt A auch (bezüglich R) halbgeordnet. Ist $\leq$ Halbordnung in A, so heißen $a, b \in A$ *vergleichbar*, falls $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt, so heißt im Falle $a \leq b$ wie üblich a *kleinergleich* b oder b *größergleich* a, so heißt a *maximales* (*minimales*) Element von A, falls jedes mit a vergleichbare Element von A kleinergleich (größergleich) a ist, so heißt $B \subseteq A$ *Kette* von A, falls je zwei Elemente von B (bezüglich $\leq$) vergleichbar sind, und so heißt a *obere Schranke* von B, falls jedes $b \in B$ kleinergleich a ist. Das ZORNsche Lemma besagt, saß eine halbgeordnete Menge schon dann ein maximales Element hat, wenn nur jede Kette von A eine obere Schranke hat; es genügt sogar schon, daß nur jede wohlgeordnete Kette eine obere Schranke hat. Dabei heißt eine Kette *wohlgeordnet*, wenn jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein minimales Element hat.

Halbgeordnete Mengen, in denen jede Zweiermenge $\{a, b\}$ eine kleinste obere Schranke $a \sqcup b$ und ebenso eine größte untere Schranke $a \sqcap b$ besitzt, werden auch *Verbände* genannt. Die solcherart in Verbänden erklärten Verknüpfungen $\sqcup$, $\sqcap$ können ihrerseits zur Charakterisierung der Verbände benutzt werden: Eine Menge A mit zwei in A erklärten (zweistelligen) Operationen $\sqcup$, $\sqcap$ ist ein Verband, falls beide Operationen jeweils kommutativ und assoziativ sind und außerdem den sogenannten Verschmelzungsgesetzen $a = a \sqcap (a \sqcup b)$ und $a = a \sqcup (a \sqcap b)$ für beliebige $a, b \in A$ genügen. Verbände sind somit spezielle algebraische Strukturen, d. h. mit Operationen und eventuell auch Relationen versehene Mengen. Für beliebige algebraische Strukturen A wird mit $|A|$ wie üblich ihr Grundbereich, d. h. die Menge aller ihrer Elemente bezeichnet.

Schließlich benötigen wir gelegentlich noch die Menge ${}^AB$ aller Funktionen von A in B und Verallgemeinerungen von $\cap$, $\cup$ auf (indizierte) Familien A_i, $i \in I$ von Mengen:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{x \mid \bigwedge_{i \in I} (x \in A_i)\right\},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{x \mid \bigvee_{i \in I} (x \in A_i)\right\},$$

wobei mitunter $\bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ für $\bigcap_{i \in I} A_i$ geschrieben wird. Ist f eine Funktion von A in B, so schreiben wir dafür auch $f: A \to B$.

Das Beweisende wird durch ∎ angegeben. Literaturverweise erfolgen grundsätzlich durch Angabe von (Autoren- bzw. Herausgeber-) Name[n] und einer zugehörigen Jahreszahl; unter diesen Daten ist die entsprechende Literatur im Literaturverzeichnis angegeben. Sätze, Hilfssätze und explizit benannte Definitionen werden innerhalb der einzelnen Abschnitte fortlaufend durchnumeriert und ebenso referiert. Wichtige Formeln, auch definitorische Festlegungen, auf die an anderer Stelle verwiesen wird, werden ebenfalls abschnittweise fortlaufend mit am rechten Seitenrand angegebener Abschnittnummer und Zählzahl durchnumeriert; diese Zahlen werden in Klammer auch als Verweisdaten genannt. Vor allem Axiome und einige wenige Bedingungen haben eigenständige Markierungen als Kennzeichnungen, die im Symbolverzeichnis mit aufgeführt sind, um das Aufsuchen zu erleichtern. Überhaupt werden für die wichtigsten Symbole die Stellen ihres jeweils ersten Auftretens im Symbolverzeichnis angeführt.

2. Mehrwertige Aussagenlogik

2.1. Die formale Sprache der Aussagenlogik

Wie in allen Bereichen der modernen formalen Logik hat es sich auch in der mehrwertigen Logik sowohl auf aussagenlogischem wie auf prädikatenlogischem Niveau als äußerst vorteilhaft erwiesen, die den Gegenstand der jeweiligen Untersuchung darstellenden Phänomene des Logischen mit einer auf das Notwendigste normierten Sprache zu beschreiben. Wir setzen deswegen voraus, daß für jedes der im folgenden zu betrachtenden mehrwertigen aussagenlogischen Systeme **S** eine normierte, d. h. formalisierte Sprache fixiert sei, die die folgenden Ausdrucksmittel umfasse:

(a) eine unendliche Menge $\boldsymbol{V}_0$ von Aussagenvariablen;
(b) eine – im allgemeinen endliche – Menge $\boldsymbol{J}^{\mathbf{S}}$ von Junktoren, d. h. von aussagenlogischen Operatoren, deren jeder eine festgelegte Stellenzahl ≥ 1 habe;
(c) die Klammern), (und das Komma als technische Zeichen zur Sicherung der eindeutigen Lesbarkeit bildbarer Ausdrücke

und gegebenenfalls noch

(d) eine Menge $\boldsymbol{K}^{\mathbf{S}}$ von Konstanten zur Bezeichnung bestimmter Quasiwahrheitswerte.

Wir benutzen als Aussagenvariable den mit einer beliebigen natürlichen Zahl von Strichen als oberen Indizes ergänzten Buchstaben „p“, d. h. wir nehmen

$$\boldsymbol{V}_0 = \{p', p'', p''', \ldots\}. \tag{2.1.1}$$

Es wird allerdings nur selten nötig sein, einen ganz bestimmten Ausdruck dieser normierten Sprache der mehrwertigen Aussagenlogik explizit aufzuschreiben. Vielmehr ist es im allgemeinen ausreichend, die Form der zu betrachtenden Ausdrücke hinreichend genau zu kennen. Deswegen werden wir meist nur anzugeben brauchen, daß an gewissen Stellen eines zu betrachtenden Ausdrucks eine Aussagenvariable auftritt, ohne daß es dabei wesentlich wäre, genau zu wissen, um welche Aussagenvariable es sich handelt. Um uns in solchen Fällen einer einfacher handhabbaren Schreibweise bedienen zu können, vereinbaren wir, daß weiterhin die Symbole

$$p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, \ldots \tag{2.1.2}$$

Aussagenvariablen bedeuten sollen. (Natürlich bedeutet in einer gegebenen Formel dann jedes dieser Symbole an allen Stellen seines Vorkommens dieselbe Aussagenvariable; aber unterschiedliche Symbole brauchen nicht notwendig unterschiedliche Aussagenvariable zu bedeuten.) Außerdem werden wir $p^{(n)}$ schreiben für die Aussagenvariable $p'^{\cdots}{}'$ mit n Strichen, also z. B. $p^{(3)}$ für p''', $p^{(4)}$ für p'''' usw.

Beachten muß man, daß die in (2.1.2) aufgeführten Symbole nicht zur normierten Sprache unserer mehrwertigen Aussagenlogik gehören, sondern daß sie der Metasprache angehören, deren wir uns bedienen, wenn wir über unsere aussagenlogische Sprache sprechen. Man nennt diese Symbole deshalb oft auch Metavariable, genauer: Metavariable für Aussagenvariable. Weiterhin auftretende Formeln, in denen solche Metavariable aus der Liste (2.1.2) vorkommen, deuten uns daher (korrekt gebildete) Ausdrücke der aussagenlogischen Sprache nur an.

Der gemäß (a), (b), (c) und (d) zur Sprache der mehrwertigen Aussagenlogik gehörende Grundbestand an Zeichen, ihr Alphabet, ergibt durch Hintereinanderschreiben solcher Zeichen u. a. die sinnvollen Zeichenverknüpfungen, die Ausdrücke dieser Sprache. Wie üblich ist die Menge aller Ausdrücke die kleinste Menge, die:

(1) jede Aussagenvariable und jede Quasiwahrheitswertkonstante enthält;

(2) für jeden zum Alphabet gehörenden Junktor φ, seine Stellenzahl möge m sein, und beliebige Ausdrücke $H_1, H_2, \ldots, H_m$ auch die Zeichenfolge

$$\varphi(H_1, H_2, \ldots, H_m)$$

enthält.

Wegen dieser Festlegung kann jeder Ausdruck unserer aussagenlogischen Sprache durch endlich oftmalige geeignete Anwendung des gemäß (2) erlaubten Übergangs von einfacheren zu komplizierteren Ausdrücken aus Aussagenvariablen und Konstanten für Quasiwahrheitswerte aufgebaut werden.

Wir setzen außerdem voraus, daß die Alphabete unserer mehrwertigen aussagenlogischen Systeme stets so beschaffen seien, daß den gemäß (1), (2) gebildeten Ausdrücken immer anzusehen ist, wie sie gebildet worden sind. In mathematisch genauer Formulierung verlangen wir also, daß die Alphabete unserer logischen Systeme stets freie Halbgruppen bezüglich der Verkettung, d. h. des Hintereinanderschreibens ihrer Zeichen seien. Dann ist gesichert, daß jeder Ausdruck H, der weder Aussagenvariable noch Quasiwahrheitswertkonstante ist, auf eindeutige Weise gemäß (2) mittels eines Junktors $\varphi \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{S}}$ aus eindeutig feststellbaren Ausdrücken

$H_1, \ldots, H_m$ gebildet wurde; dieser Junktor φ heißt dann auch Hauptverknüpfungszeichen von H.

Um unsere Ausdrücke in möglichst gewohnter Weise aufschreiben zu können, vereinbaren wir zusätzlich, für zweistellige Junktoren φ die Infixschreibweise der Präfixschreibweise vorzuziehen, also

$$(H_1 \varphi H_2) \quad \text{statt} \quad \varphi(H_1, H_2) \tag{2.1.3}$$

zu schreiben. Auch sollen die äußeren Klammern im Ausdruck $(H_1 \varphi H_2)$ immer dann wegbleiben dürfen, wenn dies keine Mißverständnisse beim eindeutigen Lesen der Ausdrücke geben kann. Und es sollen dann, wenn Analoga der klassischen Junktoren $=\!\!\!\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ für Negation, Konjunktion, Alternative und Implikation betrachtet werden, stets Negationsanaloga stärker binden als Konjunktions- und Alternativanaloga und diese wiederum stärker binden als Implikationsanaloga, also wohlbekannte Klammereinsparungsregeln wie üblich gelten, sobald dies sinnvoll möglich ist. Derartige Analogien zu Junktoren der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik werden wir dadurch angeben, daß wir für die mehrwertigen Analoga die für die klassischen Junktoren üblichen Symbole in nur geringfügiger graphischer Variation verwenden oder eventuell Indizes anfügen. Außerdem wollen wir bei einstelligen Junktoren ψ auch die Schreibweise

$$\psi H_1 \quad \text{statt} \quad \psi(H_1) \tag{2.1.4}$$

gestatten, wenn dies nicht zu Mißverständnissen führen kann, und festlegen, daß jeder einstellige Junktor stärker binde als jeder mehrstellige.

Als Teilausdrücke eines Ausdrucks H bezeichnen wir den Ausdruck H selbst und, wenn H von der Gestalt $\varphi(H_1, \ldots, H_m)$ ist, auch alle Teilausdrücke der Ausdrücke $H_1, \ldots, H_m$.

Da die mehrwertige Logik das Extensionalitätsprinzip beibehält, sind die Aussagenvariablen wie in der klassischen Aussagenlogik lediglich Variable für Quasiwahrheitswerte: In allen konkreten Anwendungen interessiert von den für die Aussagenvariablen zu nehmenden Aussagen lediglich ihr (Quasi-) Wahrheitswert. Deswegen kann man auch in der mehrwertigen Aussagenlogik von den Junktoren wieder voraussetzen, daß sie vollständig durch eine Wahrheitswertfunktion beschrieben werden — denn de facto interessieren nur die Quasiwahrheitswerte zusammengesetzter Ausdrücke H, und wegen des Extensionalitätsprinzips ergeben sie sich allein aus den Quasiwahrheitswerten der zur Bildung von H benutzten Ausdrücke. Deswegen setzen wir generell voraus, daß bezüglich jedes mehrwertigen aussagenlogischen Systems $\mathbf{S}$ mit jedem der zum Alphabet von $\mathbf{S}$ gehörenden Junktoren φ eine Wahrheitswertfunktion $\mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}$ gleicher Stellenzahl wie φ fest verbunden sei. In gleicher Weise setzen wir voraus, daß mit jeder Konstante **t** für Quasiwahrheitswerte im System **S** ein Quasiwahrheitswert $\mathbf{t}^{\mathbf{S}}$ dieses Systems fest verbunden ist. Ist noch $\mathscr{W}^{\mathbf{S}}$ die Menge der Quasiwahrheitswerte des Systems **S**, so wird wie in der klassischen Aussagenlogik durch jede Belegung $\alpha : V_0 \to \mathscr{W}^{\mathbf{S}}$ der Aussagenvariablen mit Quasiwahrheitswerten jedem Ausdruck H der normierten Sprache von **S** ein Quasiwahrheitswert zugeordnet. Man setze einfach für beliebige Ausdrücke H:

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} \alpha(p), & \text{falls } H \text{ die Aussagenvariable } p \text{ ist,} \\ \mathbf{t}^{\mathbf{S}}, & \text{falls } H \text{ die Quasiwahrheitswert-} \\ & \text{konstante } \mathbf{t} \text{ ist,} \\ \mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_1, \alpha), \ldots, \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_m, \alpha)), & \\ \quad \text{falls } H \text{ Ausdruck der Form} & \\ \quad \varphi(H_1, \ldots, H_m) \text{ ist, } \varphi \text{ } m\text{-stelliger} & \\ \quad \text{Junktor von } \mathbf{S}. & \end{cases}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß in dieser Weise $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha)$ bezüglich des mehrwertigen aussagenlogischen Systems **S** für jeden Ausdruck H von **S** eindeutig festgelegt ist.

Wie in der klassischen Aussagenlogik zeigt man induktiv über den Ausdrucksaufbau, daß $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha)$ nur von der Belegung derjenigen Aussagenvariablen abhängen kann, die im Ausdruck H vorkommen.

Satz 2.1.1. *Für jeden Ausdruck H und beliebige Variablenbelegungen α, β: $V_0 \to \mathscr{W}^{\mathbf{S}}$, für die $\alpha(p) = \beta(p)$ ist für jede in H vorkommende Aussagenvariable p, gilt*

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta).$$

Beweis. Ist H eine Aussagenvariable oder eine Quasiwahrheitswertkonstante, so folgt die Behauptung sofort aus der Definition von $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha)$. Ist H Ausdruck der Form $\varphi(H_1, \ldots, H_m)$, gilt die Behauptung bereits für die Teilausdrücke $H_1, \ldots, H_m$ von H und ist $\alpha(p) = \beta(p)$ für jede in H vorkommende Aussagenvariable p, so gilt

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_i, \alpha) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_i, \beta)$$

für alle $i = 1, \ldots, m$, denn in einem Teilausdruck von H kann keine Aussagenvariable vorkommen, die nicht auch in H vorkommt. Dann ist jedoch

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha) &= \mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_1, \alpha), \ldots, \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_m, \alpha)) \\ &= \mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_1, \beta), \ldots, \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_m, \beta)) \\ &= \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz für beliebige Ausdrücke H bewiesen. ∎

Wir nennen Ausdrücke H, G der Sprache eines mehrwertigen logischen Systems $\mathbf{S}$ *semantisch äquivalent,* falls für beliebige Variablenbelegungen $\alpha : \boldsymbol{V}_0 \to \mathscr{W}^{\mathbf{S}}$ gilt, daß

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(G, \alpha)$$

ist. Die Beziehung der semantischen Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Ausdrücke. Wie in der klassischen Logik gilt in jedem mehrwertigen logischen System $\mathbf{S}$ für die Beziehung der semantischen Äquivalenz auch das Ersetzbarkeitstheorem.

Satz 2.1.2 (Ersetzbarkeitstheorem). *Sind die Ausdrücke H', H'' semantisch äquivalent und entsteht der Ausdruck G dadurch aus dem Ausdruck H, daß in H an einigen Stellen seines Vorkommens der Teilausdruck H' von H durch den Ausdruck H'' ersetzt wird, so sind die Ausdrücke H, G semantisch äquivalent.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung induktiv über den Ausdrucksaufbau des Ausdrucks H. Die Ausdrücke H', H'', G mögen die genannten Voraussetzungen erfüllen.

Ist H eine Aussagenvariable oder eine Quasiwahrheitswertkonstante, so ist H der einzige Teilausdruck von H. Ist H' verschieden von H, so kommt H' nicht als Teilausdruck in H vor und G stimmt mit H überein; ist H' der Ausdruck H, so ist G der Ausdruck H oder der Ausdruck H''. Also sind jedenfalls H, G semantisch äquivalent.

Sei nun H ein Ausdruck der Form $\varphi(H_1, \ldots, H_m)$ und gelte die Behauptung für alle Teilausdrücke der Ausdrücke $H_1, \ldots, H_m$. Ist H' der Ausdruck H oder kein Teilausdruck von H, so ist G der Ausdruck H oder der Ausdruck H'', also jedenfalls mit H semantisch äquivalent. Andernfalls ist H' Teilausdruck gewisser der Ausdrücke $H_1, \ldots, H_m$, und es gibt Ausdrücke $H_1'', \ldots, H_m''$ derart, daß G der Ausdruck $\varphi(H_1'', \ldots, H_m'')$ ist und jeder der Ausdrücke H_i'', $1 \leq i \leq m$, dadurch aus H_i entsteht, daß der Teilausdruck H' an einigen Stellen seines Vorkommens in H_i durch H'' ersetzt wird. Dann sind aber H_i, H_i'' semantisch äquivalente Ausdrücke für jedes $i = 1, \ldots, m$, also gilt $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_i, \alpha) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_i'', \alpha)$ für jede Belegung $\alpha : \boldsymbol{V}_0 \to \mathscr{W}^{\mathbf{S}}$ der Aussagenvariablen, also gilt auch

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \alpha) &= \mathrm{ver}_\varphi^{\mathbf{S}}\big(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_1, \alpha), \ldots, \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_m, \alpha)\big) \\ &= \mathrm{ver}_\varphi^{\mathbf{S}}\big(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_1'', \alpha), \ldots, \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_m'', \alpha)\big) \\ &= \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(G, \alpha) \end{aligned}$$

und H, G sind semantisch äquivalent. ∎

Wie auch in der klassischen Logik beschreibt jeder Ausdruck H eine

Wahrheitswertfunktion w_H, deren Stellenzahl die Anzahl der in H vorkommenden Aussagenvariablen ist. Nehmen wir an, daß in H genau die Aussagenvariablen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vorkommen, so ergibt sich für jedes k-Tupel $(t_1, \ldots, t_k)$ von Quasiwahrheitswerten der Funktionswert von w_H für dieses k-Tupel als

$$w_H(t_1, \ldots, t_k) =_{\text{def}} \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta), \tag{2.1.5}$$

wobei β eine Variablenbelegung ist, für die

$$\beta(p_i) = t_i \tag{2.1.6}$$

gilt für alle $i = 1, .., k$. Da $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta)$ nur von der Belegung der in H vorkommenden Aussagenvariablen abhängt, wird $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta)$ durch die Bedingung (2.1.6) also eindeutig festgelegt. Wir nennen w_H auch kurz die *Wahrheitswertfunktion* von H.

Gelegentlich ist es vorteilhaft, in der Wahrheitswertfunktion von H zusätzliche, überflüssige Argumente zuzulassen. Kommen die in H vorkommenden Aussagenvariablen unter den Aussagenvariablen $q_1, \ldots, q_n$ vor, etwa als $q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$, so möge eine erweiterte, n-stellige Wahrheitswertfunktion $\tilde{w}_H$ erklärt sein durch die Gleichung

$$\tilde{w}_H(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} w_H(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}); \tag{2.1.7}$$

die x_i seien hier Variable für Quasiwahrheitswerte.

Generell ist ein mehrwertiges aussagenlogisches System $\mathbf{S}$ eindeutig charakterisiert durch die Gesamtheit folgender Daten:

– seine Menge $\mathcal{W}^{\mathbf{S}}$ von Quasiwahrheitswerten;
– die Menge $\boldsymbol{J}^{\mathbf{S}}$ seiner Junktoren und die jedem Junktor $\varphi \in \boldsymbol{J}^{\mathbf{S}}$ entsprechende Wahrheitswertfunktion $\mathrm{ver}^{\mathbf{S}}_{\varphi}$;
– die Menge $\boldsymbol{K}^{\mathbf{S}}$ der Quasiwahrheitswertkonstanten und den jeder Konstanten $\mathbf{t} \in \boldsymbol{K}^{\mathbf{S}}$ entsprechenden Quasiwahrheitswert $\mathbf{t}^{\mathbf{S}}$.

Zur Vereinfachung unserer Bezeichnungen vereinbaren wir noch, daß die ein spezielles mehrwertiges aussagenlogisches System $\mathbf{S}$ anzeigenden oberen Indizes an unseren bisherigen Bezeichnungen immer dann weggelassen werden dürfen, wenn aus dem Kontext unmißverständlich klar ist, auf welches logische System $\mathbf{S}$ Bezug genommen wird.

Die Ausdrucksmittel eines logischen Systems $\mathbf{S}$ lassen sich nutzen, um z. B. weitere Junktoren oder auch weitere Konstanten für Quasiwahrheitswerte definitorisch einzuführen. Wir werden solche Möglichkeiten später ebenfalls nutzen. Hat man z. B. einen Junktor ϕ definitorisch neu eingeführt, so hat man danach im Hinblick auf die sprachliche Ausdrucksfähigkeit des so erweiterten logischen Systems $\mathbf{S}$ prinzipiell zwei Möglichkeiten: Entweder man fügt den definitorisch eingeführten Junktor ϕ

zum Alphabet von **S** hinzu und gibt eine neue, ergänzte Ausdrucksfestlegung für das definitorisch erweiterte System, oder man schreibt zwar den neuen Junktor ϕ enthaltende Formeln auf, die allen Bedingungen korrekt gebildeter Ausdrücke entsprechen für ein Alphabet, dem ϕ angehören würde, liest diese Formeln aber nur als (metasprachliche) Abkürzungen für Ausdrücke von **S**, die ϕ nicht enthalten. Wir werden weiterhin der zweiten Methode folgen, da wir ohnehin Metavariable für Aussagenvariable benutzen, und da wir auch weiterhin Metasymbole zur Bezeichnung von Ausdrücken gebrauchen werden, wie wir es bei der Formulierung der Bedingung (2) der Ausdruckscharakterisierung und an weiteren Stellen bereits getan haben.

Wir werden zur Bezeichnung von Ausdrücken die Buchstaben: H, G, A, B, C, ..., eventuell mit Indizes, benutzen. Große griechische Buchstaben wie etwa Σ, θ werden Ausdrucksmengen bedeuten.

2.2. Ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte, Tautologien und Folgerungen

Trotz der in Abschnitt 1.1 erwähnten Schwierigkeit der inhaltlichen Interpretation der Quasiwahrheitswerte mehrwertiger logischer Systeme oder zumindest der Schwierigkeit der Deutung der zu den Quasiwahrheitswerten 0, 1 „hinzukommenden" Werte orientiert sich vielfach das intuitive Verständnis für die Quasiwahrheitswerte mehrwertiger logischer Systeme an der Vorstellung, daß diese Quasiwahrheitswerte eine Art von Abstufung des Wahrseins – und vielleicht auch des Falschseins – oder aber eine Graduierung zwischen (wirklicher, echter, absoluter) Wahrheit und (wirklicher, echter, absoluter) Falschheit bedeuten. Ohne jeden Bezug auf die vielschichtigen philosophischen Probleme, die sich aus solchen Vorstellungen ergeben, entsteht unmittelbar das formale Problem, welche Quasiwahrheitswerte eines mehrwertigen logischen Systems an die Stelle des Wahrheitswertes W der klassischen Logik treten sollen, und eventuell auch, welche Werte an Stelle des anderen Wahrheitswertes F der klassischen Logik treten sollen.

Unsere bereits in Abschnitt 1.1 getroffene Festlegung, daß bei alleiniger Betrachtung der Quasiwahrheitswerte 0, 1 diese die Rolle der Wahrheitswerte F, W übernehmen sollen, bedeutet zunächst nur, daß der Quasiwahrheitswert 1 einer der Quasiwahrheitswerte ist, die an Stelle des Wahrheitswertes W treten, und daß der Quasiwahrheitswert 0 einer derjenigen Werte ist, die an Stelle des Wahrheitswertes F treten. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch weitere Quasiwahrheitswerte an

Stelle des Wahrheitswertes W (und ebenso weitere an Stelle des Wahrheitswertes F) treten.

Häufig interessiert man sich in erster Linie für diejenigen Quasiwahrheitswerte, die an Stelle des Wahrheitswertes W treten: Sie werden dann *ausgezeichnete* Quasiwahrheitswerte genannt. Interessiert man sich auch für diejenigen Quasiwahrheitswerte, die an Stelle des Wahrheitswertes F der klassischen Logik treten, so unterscheidet man zwischen *positiv ausgezeichneten* und *negativ ausgezeichneten* Quasiwahrheitswerten; die positiv ausgezeichneten sind in diesem Falle diejenigen, die an Stelle des Wahrheitswertes W treten, während die negativ ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte an die Stelle des Wahrheitswertes F treten (vgl. RESCHER [1969]).

Für die Festlegung, welche Quasiwahrheitswerte (positiv) ausgezeichnet sein sollen, gibt es keine allgemeinen Regeln. Normalerweise betrachtet man den Quasiwahrheitswert 1 als ausgezeichneten Quasiwahrheitswert, und mit jedem ausgezeichneten Quasiwahrheitswert t auch jeden anderen Quasiwahrheitswert als ausgezeichnet, der – in einer natürlichen Anordnung der Quasiwahrheitswerte mit 1 als größtem – größer als t ist.

Analoges gilt für negativ ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte (mit 0 an Stelle von 1 und „kleiner“ statt „größer“).

Übrigens wird nicht verlangt, daß im Falle des Vorhandenseins positiv ausgezeichneter und negativ ausgezeichneter Quasiwahrheitswerte jeder Quasiwahrheitswert in einer dieser beiden Arten ausgezeichnet sein soll. Es gibt vielmehr zwei prinzipiell unterschiedliche Positionen hinsichtlich ausgezeichneter Quasiwahrheitswerte. Eine dieser Positionen nimmt im wesentlichen eine Zweiteilung der Gesamtheit der Quasiwahrheitswerte vor, wobei es im allgemeinen genügt, die (positiv) ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte allein zu kennzeichnen, die nicht gekennzeichneten, d. h. die nicht ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte übernehmen de facto die Rolle negativ ausgezeichneter Werte. Die andere dieser Positionen akzeptiert eine Dreiteilung der Gesamtheit aller Quasiwahrheitswerte in positiv ausgezeichnete, negativ ausgezeichnete und nichtausgezeichnete; letztere werden im allgemeinen als „zwischen“ den positiv und den negativ ausgezeichneten Quasiwahrheitswerten liegend angesehen. Überhaupt wird normalerweise implizit eine – wenigstens partielle – Ordnung der Quasiwahrheitswerte derart unterstellt, daß ein „Absteigen“ vom Wert 1 zum Wert 0 möglich ist und wenigstens gewisse Quasiwahrheitswerte untereinander vergleichbar sind, d. h., es wird unterstellt, daß die Menge der Quasiwahrheitswerte in einer natürlichen Weise halbgeordnet ist.

Da wir weiterhin negativ ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte kaum zu betrachten haben werden, sollen im folgenden immer positiv ausgezeichnete Werte gemeint sein, wenn lediglich von ausgezeichneten Quasiwahrheitswerten gesprochen wird. Die Menge aller (positiv) ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte eines mehrwertigen logischen Systems **S** werde mit $\mathscr{D}^{\mathbf{S}}$ bezeichnet.

Hat man ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte zur Verfügung, so kann man leicht Beziehungen zwischen Wahrheitswertfunktionen mehrwertiger logischer Systeme und denen der klassischen Aussagenlogik betrachten, sofern man annimmt, daß festgelegt ist, welche mehrwertigen Junktoren welchen klassischen Junktoren entsprechen sollen.

Nehmen wir an, daß NON, ET, VEL, SEQ Wahrheitswertfunktionen bezüglich einer fixierten Menge von Quasiwahrheitswerten sind, deren entsprechende Junktoren Analoga der klassischen Junktoren Negator, Konjunktor, Alternator bzw. Implikator seien. Man sagt, daß diese Wahrheitswertfunktionen die *Standardbedingungen* erfüllen, falls gelten:

(N) NON(x) ist genau dann ein ausgezeichneter Quasiwahrheitswert, wenn x kein ausgezeichneter Quasiwahrheitswert ist;

(K) ET(x, y) ist genau dann ein ausgezeichneter Quasiwahrheitswert, wenn x, y ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte sind;

(A) VEL(x, y) ist genau dann ein nicht-ausgezeichneter Quasiwahrheitswert, wenn x, y nicht-ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte sind;

(I) SEQ(x, y) ist genau dann ein nicht-ausgezeichneter Quasiwahrheitswert, wenn x ein ausgezeichneter und y ein nicht-ausgezeichneter Quasiwahrheitswert ist.

Dabei ist unterstellt, daß es nur (positiv) ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte gibt, und daß die nicht-ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte an die Stelle des Wahrheitswertes F der klassischen Logik treten (vgl. ROSSER/TURQUETTE [1952]).

Während Bezugnahme auf die Standardbedingungen unterstellt, daß fixiert ist, welcher Junktor eines mehrwertigen logischen Systems Analogon welches klassischen Junktors ist, gibt es eine weitere Möglichkeit, mehrwertige Junktoren bzw. Wahrheitswertfunktionen auf klassische zu beziehen. Wir sagen, daß ein Junktor φ eines mehrwertigen logischen Systems **S** bzw. die ihm entsprechende Wahrheitswertfunktion $\mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}$ die *Normalbedingung* erfülle, falls die Funktion $\mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}$ nur Werte aus $\{0, 1\}$ annimmt; solange ihre Argumente Werte aus $\{0, 1\}$ sind, d. h. falls die Wahrheitswertfunktion $\mathrm{ver}_{\varphi}^{\mathbf{S}}$ bei Einschränkung der Argumentwerte auf die Menge $\{0, 1\}$ von Quasiwahrheitswerten übereinstimmt mit der Wahrheitswertfunktion einer klassisch-logischen Aussagenverknüpfung — wobei dann natürlich stets W für 1 und F für 0 zu lesen ist.

Die durch die Normalbedingung einerseits und durch die Standardbedingung andererseits formulierten Forderungen an Junktoren mehrwertiger logischer Systeme sind voneinander unabhängig: Wir werden später sowohl Beispiele für Junktoren kennenlernen, die der Normal-, aber nicht der Standardbedingung genügen, als auch für Junktoren, die einer Standard-, aber nicht der Normalbedingung genügen. Leicht zu konstruieren sind schließlich sowohl Beispiele für solche Junktoren, die beiden Bedingungen genügen, als auch für solche Junktoren, die beide Bedingungen verletzen.

Mit Hilfe der Menge $\mathcal{D}^{\mathbf{S}}$ aller ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte eines mehrwertigen logischen Systems **S** sind wir nun sowohl in der Lage zu erklären, welche Ausdrücke Tautologien heißen sollen, als auch den (semantischen) Folgerungsbegriff weitgehend ebenso wie in der klassischen Logik einzuführen. Unter einer *Tautologie* eines mehrwertigen aussagenlogischen Systems **S**, kurz auch **S**-Tautologie genannt, verstehen wir einen Ausdruck H der Sprache von **S**, für den

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}}$$

für jede Belegung $\beta: V_0 \to \mathcal{W}^{\mathbf{S}}$ der Aussagenvariablen mit Quasiwahrheitswerten gilt, d. h. dessen Quasiwahrheitswert stets ein ausgezeichneter ist. Die Menge aller Tautologien des Systems **S** sei $\mathrm{Taut}^{\mathbf{S}}$.

Wie üblich ist die Menge aller **S**-Tautologien abgeschlossen gegen Einsetzungen.

Satz 2.2.1. *Ist H eine **S**-Tautologie und entsteht H' dadurch aus H, daß simultan in H für die Aussagenvariablen $p_1, \ldots, p_k$ **S**-Ausdrücke $H_1, \ldots, H_k$ eingesetzt werden, so ist auch H' eine **S**-Tautologie.*

Beweis. Ist $\beta: V_0 \to \mathcal{W}^{\mathbf{S}}$ eine Belegung der Aussagenvariablen, so bilde man dazu die Variablenbelegung β^* mit

$$\beta^*(p) = \begin{cases} \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H_i, \beta), & \text{falls} \quad p = p_i \quad \text{für ein} \quad i = 1, \ldots, k \\ \beta(p) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion von H' und β^* gilt

$$\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H', \beta) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta^*),$$

wie man induktiv über den Ausdrucksaufbau von H zeigt. Also gilt $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H', \beta) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}}$ für jede Belegung β, also $H' \in \mathrm{Taut}^{\mathbf{S}}$. ∎

Will man auch den Begriff *Kontradiktion* für die mehrwertige Logik verallgemeinern, so bieten sich dafür z. B. folgende zwei Möglichkeiten an:

1. Verfügt das betrachtete mehrwertige logische System über eine geeignete Negation $\neg$, so kann man einen Ausdruck H seiner Sprache genau dann Kontradiktion nennen, wenn $\neg H$ eine Tautologie ist.

2. Hat das betrachtete mehrwertige logische System negativ ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte, so kann man H Kontradiktion nennen, falls sein Quasiwahrheitswert stets – d. h., welche Quasiwahrheitswerte auch den in H vorkommenden Aussagenvariablen zugeordnet werden – ein negativ ausgezeichneter ist.

Beide Arten der Einführung des Begriffes „Kontradiktion" können in ein und demselben mehrwertigen System möglich sein, brauchen aber nicht dieselben Ausdrücke als Kontradiktionen zu kennzeichnen. Erfüllt allerdings die unter 1. genannte Negation die Standardbedingung (N) einer Negation und erschöpfen positiv und negativ ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte alle Quasiwahrheitswerte, dann sind beide Arten gleichwertig.

Eine Belegung $\beta : V_0 \to \mathcal{W}^{\mathbf{S}}$, die einem Ausdruck H einen ausgezeichneten Wert zuordnet, nennt man auch ein *Modell* von H. Die *Modellklasse* $\mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H)$ eines Ausdrucks H sei die Menge aller derjenigen Belegungen, die H einen ausgezeichneten Quasiwahrheitswert geben:

$$\mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H) =_{\mathrm{def}} \{\beta \mid \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}}\}. \tag{2.2.1}$$

Für Ausdrucksmengen Σ sei entsprechend die Modellklasse die Menge aller Variablenbelegungen β, die allen Ausdrücken aus Σ einen ausgezeichneten Quasiwahrheitswert geben:

$$\mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma) =_{\mathrm{def}} \Big\{\beta \mid \bigwedge_{H \in \Sigma} \big(\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}}\big)\Big\}. \tag{2.2.2}$$

Die Tautologien sind mithin genau diejenigen Ausdrücke, deren Modellklasse die Menge aller Variablenbelegungen ist. Und als *erfüllbar* wollen wir schließlich diejenigen Ausdrücke bezeichnen, deren Modellklasse nichtleer ist:

$$H\ \mathbf{S}\text{-}\mathit{erfüllbar} =_{\mathrm{def}} \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H) \neq \emptyset. \tag{2.2.3}$$

Dem Begriff „Tautologie", der einer der zentralen Begriffe der klassischen Aussagenlogik ist, steht gleichberechtigt der Begriff der Folgerung aus einer Menge von Prämissen zur Seite. Und ebenso, wie die Betrachtung der (positiv) ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte in natürlicher Weise zur Definition der Tautologien mehrwertiger logischer Systeme führte, wird die Berufung auf die ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte zu einer natürlichen Verallgemeinerung des üblichen Folgerungsbegriffs führen.

Wir betrachten für ein gegebenes mehrwertiges aussagenlogisches System $\mathbf{S}$ einen Ausdruck H und eine Menge Σ von Ausdrücken von $\mathbf{S}$. H möge eine *Folgerung* aus Σ heißen, bzw. wir sagen, daß H *aus* Σ *folgt*, falls jede solche Zuordnung von Quasiwahrheitswerten zu den in H und den Ausdrücken aus Σ vorkommenden Aussagenvariablen dem Ausdruck

H einen ausgezeichneten Quasiwahrheitswert gibt, die allen Ausdrücken aus Σ ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte zuordnet; $\Sigma \models_{\mathbf{S}} H$ bedeute, daß H aus Σ folgt (bezüglich des mehrwertigen logischen Systems **S**). Wir schreiben $\Sigma \not\models_{\mathbf{S}} H$, falls H (bezüglich **S**) nicht aus Σ folgt. Unsere in (2.2.1) und (2.2.2) eingeführte Terminologie nutzend, definieren wir also:

$$\Sigma \models_{\mathbf{S}} H =_{\text{def}} \text{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \subseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(H). \tag{2.2.4}$$

Handelt es sich bei der Ausdrucksmenge Σ um die leere Menge, so schreibt man wie üblich einfacher

$$\models_{\mathbf{S}} H \quad \text{statt} \quad \emptyset \models_{\mathbf{S}} H. \tag{2.2.5}$$

Da außerdem offensichtlich $\text{Mod}^{\mathbf{S}}(\emptyset)$ die Menge aller Variablenbelegungen ist, erhalten wir als unmittelbare Folgerung für beliebige Ausdrücke H:

$$\models_{\mathbf{S}} H \quad \text{gdw} \quad \text{H} \in \text{Taut}^{\mathbf{S}}, \tag{2.2.6}$$

die Tautologien des logischen Systems **S** sind also gerade diejenigen Ausdrücke H, die – bezüglich **S** – Folgerungen aus der leeren Ausdrucksmenge sind.

Bezeichnen wir die Menge aller Folgerungen aus einer Ausdrucksmenge Σ mit $\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$:

$$\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma) =_{\text{def}} \{H \mid \Sigma \models_{\mathbf{S}} H\}, \tag{2.2.7}$$

so ergeben sich für mehrwertige aussagenlogische Systeme ganz entsprechende Eigenschaften wie in der klassischen Logik (vgl. etwa SCHRÖTER [1955–58; Teil II] oder ASSER [1959]).

Satz 2.2.2. *Für beliebige Ausdrucksmengen Σ, θ eines mehrwertigen aussagenlogischen Systems* **S** *gelten:*

(a) $\Sigma \subseteq \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$, (*Einbettung*)

(b) $\Sigma \subseteq \theta \Rightarrow \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \subseteq \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\theta)$, (*Monotonie*)

(c) $\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)) = \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$. (*Abgeschlossenheit*)

Beweis. (a) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen (2.2.2) und (2.2.3). Für (b) genügt es zu bemerken, daß jedes Modell von θ auch ein Modell von Σ ist, d. h. $\text{Mod}^{\mathbf{S}}(\theta) \subseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$ gilt, denn ist dann $H \in \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$, so $\Sigma \models_{\mathbf{S}} H$, also $\text{Mod}^{\mathbf{S}}(H) \supseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \supseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(\theta)$ und mithin $\theta \models_{\mathbf{S}} H$, also $\text{H} \in \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\theta)$. Behauptung (c) ist bewiesen, wenn $\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)) \subseteq \text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$ gezeigt sein wird, da die umgekehrte Inklusion unmittelbar aus (a) folgt. Ist aber $\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \models_{\mathbf{S}} H$, also $\text{Mod}^{\mathbf{S}}(\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)) \subseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(H)$ nach (2.2.4), so brauchen wir für $\Sigma \models_{\mathbf{S}} H$ nur $\text{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \subseteq \text{Mod}^{\mathbf{S}}(\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma))$ zu zeigen, d. h. zu zeigen, daß jedes Modell von Σ auch ein Modell von $\text{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$ ist. Ist aber

$\beta \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$ und $H \in \mathrm{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$, so $\beta \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H)$ wegen (2.2.7) und (2.2.4). Daher gilt wirklich $\mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\mathrm{Fl}^{\mathbf{S}}(\Sigma))$, und auch (c) ist bewiesen. ∎

Satz 2.2.3 (Kompaktheitssatz). *Besitzt bezüglich eines endlichwertigen aussagenlogischen Systems* $\mathbf{S}$ *jede endliche Teilmenge einer Ausdrucksmenge* Σ *von* $\mathbf{S}$ *ein Modell, so hat auch* Σ *ein Modell.*

Beweis. Nehmen wir an, daß jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell besitze. Wir betrachten die Anfangsstücke der Folge aller Aussagenvariablen, d. h. die Mengen $P_n = \{p', p'', \ldots, p^{(n)}\}$ für jedes $n \geq 0$. Dabei soll $P_0 = \emptyset$ sein. Induktiv über n werden wir zeigen, daß es zu jeder dieser Mengen P_n von Aussagenvariablen eine (partielle) Variablenbelegung $\alpha_n : P_n \to \mathscr{W}^{\mathbf{S}}$ gibt, so daß

(a) für jedes $m < n$ die Belegung α_n Fortsetzung der Belegung α_m ist, d. h., daß $\alpha_n(q) = \alpha_m(q)$ gilt für alle $q \in P_m$;
(b) zu jeder endlichen Teilmenge Σ' von Σ ein Modell β_n von Σ' existiert, das auf P_n mit α_n übereinstimmt, d. h. für das $\beta_n(q) = \alpha_n(q)$ gilt für jedes $q \in P_n$.

Für $n = 0$ gibt es nichts zu beweisen, da Bedingung (a) leer wird und (b) erfüllt ist, da nach Voraussetzung jede endliche Teilmenge Σ' von Σ ein Modell hat. Sei also unsere Behauptung für $n = k$ richtig. Dann setzen wir

$$\alpha_{k+1}(q) =_{\mathrm{def}} \alpha_k(q) \quad \text{für alle} \quad q \in P_k,$$

womit (a) für α_{k+1} erfüllt ist. Es verbleibt die Festlegung des Funktionswertes $\alpha_{k+1}(p^{(k+1)})$.

Ist $\mathbf{S}$ ein M-wertiges System, also o. B. d. A. $\mathscr{W}^{\mathbf{S}} = \left\{\frac{k}{M-1} \,\middle|\, 0 \leq k < M\right\}$, so gibt es bezüglich $p^{(k+1)}$ zunächst die folgenden 2 Möglichkeiten:

(1) Es gibt eine endliche Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, so daß $\gamma(p^{(k+1)}) = 0$ gilt für jedes Modell γ von Σ_0, das auf P_k mit α_k übereinstimmt.
(2) Jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ hat ein Modell γ, das auf P_k mit α_k übereinstimmt und für das $\gamma(p^{(k+1)}) \in \left\{\frac{1}{M-1}, \frac{2}{M-1}, \ldots, 1\right\}$ ist.

Im Falle (1) hat jede endliche Menge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ein Modell δ mit $\delta(p^{(k+1)}) = 0$, das auf P_k mit a_k übereinstimmt. Andernfalls gäbe es eine endliche Menge $\Sigma_0' \subseteq \Sigma$ derart, daß $\delta(p^{(k+1)}) > 0$ wäre für jedes Modell δ von Σ_0', das auf P_k mit α_k übereinstimmt. Dann hätte aber die endliche Teilmenge $\Sigma_0 \cup \Sigma_0'$ von Σ kein Modell, das auf P_k mit α_k übereinstimmt — im Widerspruch zur Induktionsannahme, daß (b) für $n = k$ gilt. Also können wir

$$\alpha_{k+1}(p^{(k+1)}) =_{\text{def}} 0 \quad \text{im Falle (1)}$$

setzen und damit (b) für $n = k + 1$ erfüllen.

Liegt Fall (2) vor, so sollen folgende beiden weiteren Fälle unterschieden werden:

(3) Es gibt eine endliche Menge $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, so daß $\gamma(p^{(k+1)}) = \dfrac{1}{M-1}$ gilt für jedes Modell γ von Σ_1, das auf P_k mit α_k übereinstimmt.

(4) Jede endliche Menge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ hat ein Modell γ, das auf P_k mit α_k übereinstimmt und für das $\gamma(p^{(k+1)}) \in \left\{\dfrac{2}{M-1}, \dfrac{3}{M-1}, \ldots, 1\right\}$ ist.

Erneut zeigt man leicht, daß im Falle (3) jede endliche Menge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ein Modell δ mit $\delta(p^{(k+1)}) = \dfrac{1}{M-1}$ hat, das auf P_k mit α_k übereinstimmt. Andernfalls gäbe es eine endliche Menge $\Sigma_1' \subseteq \Sigma$ derart, daß $\delta(p^{(k+1)}) > \dfrac{1}{M-1}$ wäre für jedes Modell δ von Σ_1' – und dies ergäbe erneut einen Widerspruch zur Induktionsannahme. Also können wir

$$\alpha_{k+1}(p^{(k+1)}) =_{\text{def}} \frac{1}{M-1} \quad \text{im Falle (3)}$$

setzen und damit (b) für $n = k + 1$ erfüllen.

Fall (4) wird in ganz analoger Weise wie eben Fall (2) in zwei weitere Unterfälle zerlegt. Und dieses Beweisverfahren wird fortgesetzt bis zu den Fällen:

$(2M - 3)$ Es gibt eine endliche Menge $\Sigma_{M-2} \subseteq \Sigma$, so daß

$$\gamma(p^{(k+1)}) = \frac{M-2}{M-1} \quad \text{gilt für jedes Modell } \gamma \text{ von } \Sigma_{M-2},$$

das auf P_k mit α_k übereinstimmt.

$(2M - 2)$ Jede endliche Menge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ hat ein Modell γ, das auf P_k mit α_k übereinstimmt und für das $\gamma(p^{(k+1)}) = 1$ ist.

Es ist dann wie in den Fällen (1), (3) oben auch für den Fall $(2M - 3)$ leicht beweisbar bzw. für den Fall $(2M - 2)$ offensichtlich, daß wir

$$\alpha_{k+1}(p^{(k+1)}) =_{\text{def}} \frac{M-2}{M-1} \quad \text{im Falle} \quad (2M-3),$$

$$\alpha_{nk+1}(p^{(k+1)}) =_{\text{def}} 1 \quad \text{im Falle} \quad (2M-2)$$

setzen können und damit (b) für $n = k + 1$ erfüllen. Also ist insgesamt gezeigt, daß es für jedes n Variablenbelegungen $\alpha_n : P_n \to \mathcal{W}^{\mathbf{S}}$ gibt, die die Bedingungen (a), (b) erfüllen.

Nun erklären wir eine (vollständige) Variablenbelegung $\beta : \boldsymbol{V}_0 \to \mathcal{W}^{\mathbf{S}}$ dadurch, daß für jede Aussagenvariable $p^{(n)}$ gelte

$$\beta(p^{(n)}) =_{\text{def}} \alpha_n(p^{(n)}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Unser Beweis ist beendet, wenn wir zeigen können, daß β ein Modell von Σ ist. Sei daher $H \in \Sigma$. Wir wählen k so, daß alle in H vorkommenden Aussagenvariablen zu P_k gehören; und wir betrachten ein Modell γ von $\{H\}$, das auf P_k mit α_k übereinstimme. Dann ist $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \gamma) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}}$ und außerdem $\mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \gamma) = \mathrm{Wert}^{\mathbf{S}}(H, \beta)$, denn γ und β geben den in H vorkommenden Aussagenvariablen je denselben Quasiwahrheitswert. Also ist β Modell für jeden Ausdruck $H \in \Sigma$, also Modell von Σ. ∎

Für den Beweis des nachfolgenden sogenannten Endlichkeitssatzes der Folgerungsbeziehung ist es vorteilhaft, noch eine andere Variante dieses Kompaktheitssatzes zur Verfügung zu haben.

Satz 2.2.4. *Besitzt bezüglich eines endlichwertigen aussagenlogischen Systems* **S** *und eines* **S***-Ausdrucks G jede endliche Teilmenge einer Ausdrucksmenge Σ von* **S** *ein Modell, das zugleich kein Modell von G ist, so hat auch Σ ein Modell, das kein Modell von G ist.*

Der Beweis kann fast wörtlich wie der Beweis des Kompaktheitssatzes geführt werden, nur hat man überall statt Modellen von Σ bzw. $\Sigma' \subseteq \Sigma$ lediglich solche Modelle von Σ bzw. $\Sigma' \subseteq \Sigma$ zu betrachten, die zugleich keine Modelle von G sind. Für den Nachweis, daß auch die in jenem Beweis abschließend konstruierte Variablenbelegung β kein Modell von G ist, nutze man vorteilhaft die Tatsache aus, daß auch in G nur endlich viele Aussagenvariablen vorkommen. (Der Leser führe die Details übungshalber selbst aus.)

Übrigens ist immer dann Satz 2.2.4 eine Verschärfung des Kompaktheitssatzes 2.2.3, wenn es in der Sprache von **S** einen Ausdruck gibt, dessen Quasiwahrheitswert stets ein nicht-ausgezeichneter ist.

Satz 2.2.5 (Endlichkeitssatz). *Ist* **S** *ein endlichwertiges aussagenlogisches System und gilt $\Sigma \models_{\mathbf{S}} H$ für einen Ausdruck H und eine Menge Σ von Ausdrücken von* **S**, *so gibt es eine endliche Menge $\Sigma^* \subseteq \Sigma$, für die bereits $\Sigma^* \models_{\mathbf{S}} H$ gilt.*

B e w e i s. Es sei Σ' eine endliche Teilmenge von Σ. Gilt $\Sigma' \not\models_{\mathbf{S}} H$, so gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma')$ derart, daß $\alpha \notin \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H)$. Gilt also $\Sigma' \not\models_{\mathbf{S}} H$ für jede endliche Teilmenge Σ' von Σ, so können wir Satz 2.2.4 anwenden und erhalten, daß ein $\beta \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(\Sigma)$ existiert, so daß $\beta \notin \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}}(H)$ ist. Also gilt $\Sigma \not\models_{\mathbf{S}} H$. Damit ist die Kontraposition unserer Behauptung und also diese selbst bewiesen. ∎

Es ist wesentlich, daß wir sowohl beim Kompaktheitssatz als auch beim Endlichkeitssatz endlichwertige Systeme betrachtet haben. Wir wollen durch ein Gegenbeispiel nun noch zeigen, daß beide Resultate für unendlichwertige aussagenlogische Systeme nicht zu gelten brauchen.

Das mehrwertige aussagenlogische System $\mathbf{S}^0$ habe die unendliche Quasiwahrheitswertmenge

$$\mathcal{W}^{\mathbf{S}^0} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2^n} \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$$

und im Alphabet einen zweistelligen Junktor $\rightharpoonup$, einen einstelligen Junktor v und eine Quasiwahrheitswertkonstante O. Die Menge $\mathcal{D}^{\mathbf{S}^0}$ der ausgezeichneten Quasiwahrheitswerte sei irgendeine den Wert O nicht enthaltende Teilmenge von $\mathcal{W}^{\mathbf{S}^0}$. Die Konstante O bezeichne den Quasiwahrheitswert 0; die Wahrheitswertfunktionen zu $\rightharpoonup$ und v mögen die Eigenschaften haben:

$$\mathrm{ver}^{\mathbf{S}^0}_{\rightharpoonup}(x, y) \in \mathcal{D}^{\mathbf{S}^0} \quad \text{gdw} \quad x \leq y,$$
$$\mathrm{ver}^{\mathbf{S}^0}_{\mathsf{v}}(x) = \frac{1}{2}\, x.$$

Für beliebige Ausdrücke H von $\mathbf{S}^0$ sei $\mathsf{v}^n H$ die n-fache Iteration der Anwendung des Junktors v; es sei also $\mathsf{v}^0 H =_{\mathrm{def}} H$ und $\mathsf{v}^{k+1} H =_{\mathrm{def}} \mathsf{v}(\mathsf{v}^k H)$. Es seien

$$\Sigma = \{(p' \rightharpoonup \mathsf{v}^n p'') \mid n \geq 0\},$$
$$G = (p' \rightharpoonup \mathsf{O}).$$

Man sieht sofort, daß für jede Variablenbelegung $\alpha \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}^0}(\Sigma)$ gelten muß, daß $\alpha(p') = 0$ ist. Also gilt $\Sigma \models_{\mathbf{S}^0} G$. Ist aber Σ' eine endliche Teilmenge von Σ und $\beta \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}^0}(\Sigma')$, so muß nur $\alpha(p') \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \alpha(p'')$ sein für den größten „Exponenten“ m, für den $(p' \rightharpoonup \mathsf{v}^m p'') \in \Sigma'$ ist. Also gibt es Modelle $\gamma \in \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}^0}(\Sigma')$ mit $\gamma(p') \neq 0$, also mit $\gamma \notin \mathrm{Mod}^{\mathbf{S}^0}(G)$. Also gilt $\Sigma' \not\models_{\mathbf{S}^0} G$ für jede endliche Teilmenge Σ' von Σ.

Da somit der Endlichkeitssatz für $\mathbf{S}^0$ nicht gilt, kann weder der Kompaktheitssatz noch Satz 2.2.4 für $\mathbf{S}^0$ gelten.

2.3. Spezielle Junktoren und Mengen von Quasiwahrheitswerten

Die bisherige Entwicklung der mehrwertigen Logik ist so verlaufen, daß dabei trotz der möglichen großen Allgemeinheit hinsichtlich der Menge der Quasiwahrheitswerte und auch hinsichtlich der Wahl der Wahrheitswertfunktionen und der in den Systemen mehrwertiger Aussagenlogik betrachteten Junktoren, denen diese entsprechen, einige spezielle Quasiwahrheitswertmengen und Wahrheitswertfunktionen besonders häufig und intensiv betrachtet worden sind.

Bei den endlichen Mengen von Quasiwahrheitswerten handelt es sich dabei einerseits um lückenlose Anfangsabschnitte der Reihe der natürlichen Zahlen, also um Mengen der Art

$$\{1, 2, \ldots, M\} \tag{2.3.1}$$

für gegebenes M, oder um Mengen rationaler Zahlen zwischen 0 und 1 der Art

$$\mathscr{W}_M = \left\{0, \frac{1}{M-1}, \frac{2}{M-1}, \ldots, \frac{M-2}{M-1}, 1\right\}. \tag{2.3.2}$$

Als unendliche Quasiwahrheitswertmengen betrachtet man mitunter die Menge N aller natürlichen Zahlen, aber vorzugsweise entweder die Menge $\mathscr{W}_{\aleph_0}$ aller rationalen Zahlen, d. h. Brüche $\frac{m}{n}$ zwischen 0 und 1:

$$\mathscr{W}_{\aleph_0} = \{m/n \mid 0 \leq m \leq n \wedge n \neq 0\}, \tag{2.3.3}$$

oder die Menge $\mathscr{W}_\infty$ aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1:

$$\mathscr{W}_\infty = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \tag{2.3.4}$$

die auch kurz als $[0, 1]$ bezeichnet wird.

Wir werden im folgenden bei unendlichen Mengen von Quasiwahrheitswerten die Gesamtheit der natürlichen Zahlen außer Betracht lassen, und auch bei den endlichen Mengen von Quasiwahrheitswerten solchen der Gestalt (2.3.2) den Vorzug geben. Dies ist in den meisten Fällen für unendliche Wertmengen eine unwesentliche und für endliche Wertmengen überhaupt keine Einschränkung: Jede Menge der Art (2.3.1) läßt sich z. B. eineindeutig auf eine solche der Art (2.3.2) abbilden, und zwar sowohl durch eine Zuordnung

$$x \mapsto \frac{x-1}{M-1} \tag{2.3.5}$$

als auch durch eine Zuordnung

$$x \mapsto \frac{M-x}{M-1}. \tag{2.3.6}$$

Die Zuordnung (2.3.5) bildet dabei die Quasiwahrheitswerte 1 bzw. M von (2.3.1) ab auf die Quasiwahrheitswerte 0 bzw. 1 von (2.3.2) und erhält die natürliche Anordnung aller Quasiwahrheitswerte; die Zuordnung (2.3.6) dagegen bildet die Quasiwahrheitswerte 1 bzw. M von (2.3.1) ab auf 1 bzw. 0 von (2.3.2) und kehrt die natürliche Anordnung der Quasiwahrheitswerte von (2.3.1) um. Außerdem gestattet jede der Zuordnungen (2.3.5), (2.3.6) auch noch eine eineindeutige Zuordnung zwischen den in einer Wertemenge (2.3.1) erklärbaren Wahrheitswertfunktionen und denen, die in der entsprechenden – d. h. gleiche Elementeanzahl habenden – Wertemenge (2.3.2) erklärt werden können. Deswegen läßt sich schließlich auch jedem mehrwertigen logischen System mit Wertemenge der Form (2.3.1) ein System mit Quasiwahrheitswertemenge der Form (2.3.2) zuordnen, das dieselben (meta)logischen Eigenschaften hat.

Derartige eineindeutige Zuordnungen sind auch von anderen endlichen Quasiwahrheitswertmengen als solchen der Form (2.3.1) auf Mengen der Form (2.3.2) möglich, nur muß man dann die Wertemengen $\mathcal{W}_M$ gegebenenfalls mit einer von der natürlichen Ordnung der Elemente verschiedenen Anordnung versehen.

Für die oben betrachteten unendlichen Quasiwahrheitswertmengen kann man zeigen, daß trotz gleicher Elementeanzahl die Wertemenge N aller natürlichen Zahlen und die Wertemenge $\mathcal{W}_{\aleph_0}$ nicht eineindeutig und ordnungserhaltend aufeinander abbildbar sind: Die Ordnung von N ist diskret, während $\mathcal{W}_{\aleph_0}$ dicht geordnet ist. Übrigens ist die Tatsache, daß die Mengen $\mathcal{W}_{\aleph_0}$ und $\mathcal{W}_\infty$ unterschiedliche Elementeanzahl haben, später von geringerer Bedeutung als die Tatsache, daß in $\mathcal{W}_\infty$ jede Teilmenge sowohl ein Supremum als auch ein Infimum hat, dies jedoch in $\mathcal{W}_{\aleph_0}$ nicht der Fall ist.

Besonders häufig betrachtete Wahrheitswertfunktionen entsprechen mehrwertigen Verallgemeinerungen der klassischen Aussagenverknüpfungen. Es gibt verschiedene Verfahren, solche Wahrheitswertfunktionen zu beschreiben. Bei endlichen, nicht zu umfangreichen Mengen von Quasiwahrheitswerten sind geeignet notierte Tabellen – sogenannte Wahrheitswerttafeln – vorteilhaft. Solche Tabellen können aber sehr umfangreich werden, wenn die Anzahl der Quasiwahrheitswerte und die Stellenzahl der Wahrheitswertfunktion größer werden: Zur Beschreibung einer 4-stelligen Wahrheitswertfunktion bei 9 Quasiwahrheitswerten muß eine solche Tabelle schon $9^4 = 6561$ Funktionswerte enthalten. Allgemein sind bei M Quasiwahrheitswerten für eine k-stellige Wahrheitswertfunktion M^k Funktionswerte anzugeben (und gibt es insgesamt M^{M^k} verschiedene k-stellige Wahrheitswertfunktionen in diesem Falle). Deshalb ist es meist günstiger, die Wahrheitswertfunktionen durch – z. B. arithmetische – Formeln zu beschreiben. Und bei unendlichen Wertemengen ist dies die wesentliche Methode, denn Wahrheitswertetafeln sind in