

Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » (*Selected by Grenoble Sciences*) correspondent à :

- ▶ des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- ▶ des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- ▶ une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Pour contacter Grenoble Sciences :

tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- ▶ un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier,
- ▶ un **site web compagnon** qui propose :
 - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
 - des exercices pour s'entraîner,
 - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera la liste de nos sites compagnons à l'adresse internet suivante :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook>

Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**.

Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier** de Grenoble.

ISBN 978 2 7598 1749 8

© EDP Sciences 2015

Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Denis Gialis et François-Xavier Désert



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Terre et Univers de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture de l'ouvrage :

- ▶ Aurélien Barrau, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1, membre de l'Institut Universitaire de France,
- ▶ Thomas Buchert, Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon 1,
- ▶ Damir Buskalic, Professeur à l'Université de Savoie,
- ▶ Johann Collot, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Coordination éditoriale et mise en page : Stéphanie Trine ; figures : Sylvie Bordage ; illustration de couverture : Alice Giraud, d'après *Gravity Probe B and Space-Time and Stars and Galaxies* (NASA).

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur)

Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine) • Du Soleil à la Terre. Aéronomie et météorologie de l'espace (J. Lilensten & P.-L. Blelly) • Sous les feux du Soleil (J. Bornarel & J. Lilenstein) • La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan) • Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov) • Petit traité d'intégration (J.-Y. Briend) • Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière) • Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches) • Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie) • Analyse numérique et équations différentielles (J.-P. Demailly) • Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs (E. Belorizky) • Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug) • Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Demongeot) • Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert) • Nombres et algèbre (J.-Y. MÉRINDOL)

et d'autres titres sur le site internet
<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Avant-propos

La théorie de la relativité générale constitue, avec la théorie quantique, l'une des plus grandes avancées scientifiques du XX^e siècle. Le cadre mathématique sur lequel elle s'appuie est celui des variétés pseudo-riemanniennes, et l'une des découvertes majeures d'Albert Einstein est d'avoir compris le lien entre la gravitation, la matière et la géométrie de notre espace physique rebaptisé *espace-temps*.

Tout étudiant en physique connaît les efforts et la persévérance dont il faut faire preuve pour comprendre les bases de la relativité générale. Les enseignants en Master, dans les écoles doctorales ou dans les Grandes Ecoles, savent également les difficultés que l'on rencontre lorsqu'il s'agit d'exposer une théorie si fondamentale. Pourtant, les applications pratiques et les conséquences théoriques dans l'astrophysique moderne sont innombrables et incontournables.

Cet ouvrage de problèmes et d'exercices, de difficulté variable, a été construit dans l'unique but d'aider tout étudiant, chercheur ou curieux souhaitant assimiler les bases de la relativité générale via la pratique du calcul, tensoriel notamment, et du raisonnement mathématique et physique. De nombreuses démonstrations de cours, premiers tremplins vers des calculs plus complexes, sont ainsi intégrées dans des problèmes plus généraux et souvent très classiques. Chaque problème ou exercice fait l'objet d'une correction suffisamment détaillée pour permettre un travail parfaitement autonome de l'étudiant du Master au Doctorat.

Les deux premiers chapitres sont conçus pour amener le lecteur à se familiariser avec les notions mathématiques essentielles de géométrie différentielle et de calcul tensoriel. De nombreux points de vocabulaire sont introduits, et l'espace-temps est présenté et étudié dans le cadre plus général des variétés pseudo-riemanniennes.

Le troisième chapitre met l'accent sur le problème récurrent de la mesure du temps, des distances et des énergies par un observateur plongé dans un espace-temps courbé par un objet massif, ou bien artificiellement accéléré au cours d'un voyage spatial. Le problème pratique des systèmes de géolocalisation est abordé, tout comme celui de la gravitation en champ faible faisant le lien avec la gravitation de Newton.

Les chapitres quatre et cinq abordent l'étude de l'espace-temps au voisinage des deux principaux types de trous noirs observés dans l'Univers que sont les trous noirs à symétrie sphérique, sans rotation ni charge électrique, appelés trous noirs de Schwarzschild, et les trous noirs en rotation mais dénués de charge électrique que l'on nomme trous noirs de Kerr. Le formalisme 3+1, utilisé de nos jours dans de nombreuses publications, est présenté au lecteur.

Le chapitre six propose une introduction à l'étude des ondes gravitationnelles, depuis la linéarisation de l'équation d'Einstein jusqu'aux conséquences pour la perte d'énergie d'un système binaire d'objets compacts.

Dans le chapitre sept, on introduit le tenseur énergie-impulsion et le tenseur champ électromagnétique. Divers exemples, comme les célèbres équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, permettent de découvrir leur utilisation dans le cadre de l'hydrodynamique et/ou de l'électrodynamique relativiste. Le formalisme 3+1 est de nouveau abordé et nous conduit à la projection des équations d'Einstein et des équations de Maxwell. Enfin, une construction du champ électromagnétique dans la magnétosphère d'un trou noir de Kerr est destinée à préparer le lecteur à l'étude du processus de Blandford-Znajek.

Dans le chapitre huit, c'est une présentation du rôle de la relativité générale dans la cosmologie moderne qui est proposée au travers d'une série d'exercices et de problèmes dont certains sont issus du cours donné par François-Xavier Désert en Master 2, à l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Les notations utilisées, les définitions et les relations fondamentales de la relativité générale sont regroupées dans un formulaire placé en fin d'ouvrage permettant à l'étudiant d'avoir un aperçu synthétique des bases de la théorie.

D. Gialis
14 juin 2013

Avvertissement – Au début de chaque problème, des lettres indiquent le niveau de difficulté : [M] signifie accessible dès la première année de Master, [MD] signifie accessible aux étudiants en fin de Master et plus, et enfin, [D] est réservé aux problèmes les plus difficiles de niveau Doctorat.

Notations – La sommation associée aux indices est faite selon la *convention d'Einstein*. En revanche, le type de lettres (latines ou grecques) pour l'écriture des indices et la correspondance au type de coordonnées (spatiales ou temporelles) varient selon les problèmes.

Table des matières

Chapitre 1 – Introduction à la géométrie différentielle	1
1.1. Courbes et vecteurs tangents	1
1.2. Géodésiques sur la sphère S_2	2
1.3. Métrique induite	5
1.4. Pseudo-sphère en dimension 3	6
1.5. Dualité métrique	8
1.6. Quadri-vecteurs de genre lumière, temps et espace	10
1.7. Dérivée de Lie	12
1.8. Changement de coordonnées dans l'espace-temps	16
1.9. Changement de coordonnées et élément de volume	17
1.10. Equations des géodésiques et principe variationnel	19
1.11. Unicité de la connexion de Levi-Civita	23
1.12. Courbes auto-parallèles	28
1.13. Géodésiques nulles	29
1.14. Transport parallèle	31
1.15. Produit extérieur et formes différentielles	33
Chapitre 2 – Géométrie et calcul tensoriel	39
2.1. Equation des géodésiques et vecteur tangent	39
2.2. Critère de tensorialité	42
2.3. Dérivée covariante seconde	43
2.4. Tenseur de Levi-Civita	44
2.5. Caractérisation de la courbure	46
2.6. Courbure de la sphère S_3	48
2.7. Courbure et élément de surface	49
2.8. Relations tensorielles	53

2.9. Propriétés du tenseur de courbure	55
2.10. Platitude conforme	58
2.11. Vecteurs de Killing	59
2.12. Propriétés du tenseur de Weyl	62
2.13. Déviation géodésique	65
2.14. Tétrades et tenseur de Riemann	67
2.15. Dérivée de Fermi-Walker	71
2.16. Hypersurfaces de l'espace-temps	74
2.17. Equations de Gauss et Codazzi	80
2.18. Comparaison de courbures	84
Chapitre 3 – Espace-temps et mesure	87
3.1. Mesure des distances et des intervalles de temps	87
3.2. Energie dans un champ gravitationnel constant	90
3.3. Référentiel d'un observateur en rotation	92
3.4. De l'inconvénient des voyages spatiaux	94
3.5. Décalage vers le rouge gravitationnel	98
3.6. Gravitation en champs faibles	99
3.7. Champ gravitationnel terrestre et géolocalisation	102
3.8. Période de rotation d'un pulsar	105
Chapitre 4 – Espace-temps de Schwarzschild	109
4.1. Espace-temps statique à symétrie sphérique	109
4.2. Détermination de la métrique de Schwarzschild	111
4.3. Horizon des événements	116
4.4. Energie et moment cinétique orbital	117
4.5. Courbure de l'espace-temps de Schwarzschild et effet de marée	119
4.6. Géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild	123
4.7. Mirages gravitationnels et anneaux d'Einstein	134
4.8. Avance du périhélie de Mercure	137
4.9. Vitesse et énergie dans l'espace-temps de Schwarzschild	140
4.10. Collapse gravitationnel d'une étoile massive	141
4.11. Trous noirs, trous blancs et changement de coordonnées	145
4.12. Métrique de Schwarzschild en coordonnées isotropes	150

Chapitre 5 – Espace-temps de Kerr	153
5.1. Singularité et limites de la métrique de Kerr	153
5.2. Géodésiques nulles et coordonnées de Kerr-Schild	157
5.3. Formalisme 3+1 et métrique axisymétrique	162
5.4. Surface limite de stationnarité	169
5.5. Horizon et ergorégion d’un trou noir de Kerr	171
5.6. Processus de Penrose	174
5.7. Mesures d’un FIDO autour d’un trou noir de Kerr	176
5.8. Géodésiques dans l’espace-temps de Kerr	183
5.9. Orbite circulaire stable autour d’un trou noir de Kerr	191
5.10. Extraction d’énergie d’un trou noir de Kerr	194
5.11. Précession gyroscopique	198
5.12. Collision de particules près d’un trou noir de Kerr	205
Chapitre 6 – Ondes gravitationnelles	211
6.1. Equation d’Einstein linéarisée	211
6.2. Ondes gravitationnelles et jauge TT	216
6.3. Onde gravitationnelle et particules libres	220
6.4. Formule du quadripôle	224
6.5. De la source stationnaire à la limite newtonienne	227
6.6. Emission et perte d’énergie d’un système binaire	231
Chapitre 7 – Champs et matière	239
7.1. Tenseur énergie-impulsion et flux d’impulsion	239
7.2. Champs faibles et équation de Poisson	241
7.3. Dualité de Hodge et équations de Maxwell	243
7.4. Force de Lorentz et tenseur de Maxwell	246
7.5. Propriétés du tenseur énergie-impulsion	250
7.6. Rayonnement et luminosité d’une étoile compacte	255
7.7. Nuage de poussière	260
7.8. Transformation de jauge	261
7.9. Equations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	263
7.10. Equations de Arnowitt, Deser et Misner	268
7.11. Formalisme 3+1 et champ électromagnétique	275
7.12. Magnétosphère d’un trou noir de Kerr	283

Chapitre 8 – Cosmologie	291
8.1. Métrique de Friedmann-Robertson-Walker	291
8.2. Géométrie d’hypersurfaces spatialement isotropes en tout point	295
8.3. Courbure de l’Univers et géodésiques	298
8.4. Dynamique de l’Univers et équations de FRW-Lemaître	302
8.5. Paramètre de décélération et densités réduites	310
8.6. Distance angulaire et distance de luminosité	314
8.7. Horizon cosmique et taille de l’Univers	316
8.8. Age de l’Univers et paramètre d’échelle	317
8.9. Voyage intergalactique	319
Formulaire abrégé de relativité générale	323
Quelques constantes astrophysiques	343
Bibliographie	344
Index	349

Introduction à la géométrie différentielle

[M] ■ EXERCICE 1.1

Les notions de base naturelle et de vecteur tangent sont illustrées dans cet exercice de niveau élémentaire.

Courbes et vecteurs tangents – Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , muni de coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$, on considère un point P de coordonnées $(0, 1, 0)$ par lequel passent trois courbes définies par

$$C_1(\lambda) = (\lambda, 1, \lambda),$$

$$C_2(\xi) = (\sin \xi, \cos \xi, \xi),$$

$$C_3(\rho) = (\sinh \rho, \cosh \rho, \rho + \rho^3).$$

1 – Calculer au point P , $df/d\lambda$, $df/d\xi$, et $df/d\rho$, pour la fonction f telle que $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$.

2 – Déterminer les composantes des vecteurs tangents $d/d\lambda$, $d/d\xi$, et $d/d\rho$, à chacune des courbes, au point P et dans la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$. Que dire alors des trois courbes ?

► SOLUTION

1 – En dérivant la fonction f par rapport à un paramètre $\tau \in \{\lambda, \xi, \rho\}$, on obtient

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau},$$

$$\begin{array}{l}
\text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \\
\text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cosh \rho, \\
\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\sin \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sinh \rho, \\
\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = 1 + 3\rho^2.
\end{array}$$

Au point P de coordonnées $(x = 0, y = 1, z = 0)$, c'est-à-dire $(\lambda = 0, \xi = 0, \rho = 0)$, on déduit

$$\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{df}{d\xi}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{df}{d\rho}\right)_P = 0.$$

2 – On peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{d}{d\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{d}{d\rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

ce qui, d'après la question précédente, donne au point P de coordonnées $(x = 0, y = 1, z = 0)$,

$$\frac{d}{d\lambda} = (1, 0, 1), \quad \frac{d}{d\xi} = (1, 0, 1), \quad \frac{d}{d\rho} = (1, 0, 1),$$

dans la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$. Les trois courbes sont donc tangentes en P .

[M] ■ EXERCICE 1.2

Le but est ici de définir une géodésique sur une surface de l'espace euclidien et d'en déterminer explicitement les équations.

Géodésiques sur la sphère S_2 – On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Une *géodésique* d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe γ , de classe \mathcal{C}^∞ sur $I \subset \mathbb{R}$, tracée sur S telle que, pour tout $t \in I$, et tout vecteur \vec{T} du plan tangent à γ en t , $\ddot{\gamma}(t) \perp \vec{T}$. On admet que cette courbe est un arc paramétré régulier, c'est-à-dire tel que, $\forall t \in I$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Remarque : on notera que $\gamma(t)$ et ses dérivées $\dot{\gamma}(t)$, $\ddot{\gamma}(t)$ sont des vecteurs.

1 – Soit $\{u, v\}$ un système de coordonnées de S , et σ une courbe régulière de S de classe C^∞ sur $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que, $\forall t \in I$,

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = E(u(t), v(t)) (\dot{u}(t))^2 + 2F(u(t), v(t)) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(u(t), v(t)) (\dot{v}(t))^2,$$

avec E , F et G trois applications que l'on exprimera sous la forme d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2 – On admet que la fonction $\mathcal{L} : (t, u, v, \dot{u}, \dot{v}) \mapsto \|\dot{\sigma}(t)\|^2$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange. Démontrer que σ est une géodésique.

3 – Montrer que toute géodésique est parcourue à vitesse constante.

4 – On considère la sphère $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\|^2 = 1\}$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\gamma : I \rightarrow S_2$ une géodésique de S_2 . Montrer qu'il existe une fonction $\lambda : t \mapsto \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle$, telle que $\ddot{\gamma}(t) = \lambda(t) \gamma(t)$. En déduire les équations des géodésiques sur S_2 .

► SOLUTION

1 – On peut écrire, par définition, $\sigma(t) = M(u(t), v(t))$, avec M un point de σ , ce qui donne

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\partial M}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial M}{\partial v} \dot{v},$$

avec $\{\partial M/\partial u, \partial M/\partial v\}$ la base naturelle associée au système de coordonnées $\{u, v\}$ sur S . La norme au carré s'écrit donc

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = E(u, v) \dot{u}^2 + 2F(u, v) \dot{u} \dot{v} + G(u, v) \dot{v}^2,$$

avec

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle, \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle.$$

2 – Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v}^2 \right), \\ \frac{d}{dt} (F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v} \dot{v}^2 \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v} = \left\langle \dot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle,$$

$$F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v} = \left\langle \dot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle,$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt} (E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v}) = \left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \dot{\sigma}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right) \right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt} (F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v}) = \left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \dot{\sigma}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right) \right\rangle.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v}^2 \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \dot{u} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \dot{v}, \dot{\sigma} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right), \dot{\sigma} \right\rangle, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v} \dot{v}^2 \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \dot{u} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \dot{v}, \dot{\sigma} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right), \dot{\sigma} \right\rangle. \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent donc

$$\left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle = 0,$$

ce qui signifie que $\ddot{\sigma}$ appartient au plan tangent à S en t . Autrement dit, σ est une géodésique.

3 – Soit γ une géodésique. On a simplement

$$\frac{d}{dt} (\|\dot{\gamma}(t)\|^2) = \frac{d}{dt} (\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle) = 2 \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

puisque $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$. La vitesse est donc constante le long d'une géodésique.

4 – La courbe γ étant une géodésique, le vecteur \overrightarrow{OM} , égal à $\gamma(t)$, est tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$, ce qui s'écrit aussi $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$. En dérivant deux fois, on obtient

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

Comme $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ est constant, on peut définir une fonction λ constante telle que $\lambda(t) = - \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -\omega^2$. Cela montre aussi que $\overrightarrow{OM} \perp \dot{\gamma}$. On dispose donc, pour γ , de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\gamma} + \omega^2 \gamma = 0.$$

Les géodésiques sur la sphère S_2 sont donc telles que

$$\gamma(t) = \gamma(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{\gamma}(0)}{\omega} \sin(\omega t).$$

Autrement dit, une géodésique est un grand cercle défini comme l'intersection de S_2 avec le plan dont une base est $\{\overrightarrow{OM}_0, \dot{\gamma}(0)\}$, avec $\overrightarrow{OM}_0 = \gamma(0)$.

[M] ■ EXERCICE 1.3

Cet exercice illustre simplement, par l'étude d'un exemple, la notion de métrique induite, si importante en relativité générale.

Métrique induite – Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , muni d'un repère $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ cartésien, on considère une courbe $\mathcal{C} : s \mapsto (x(s), 0, z(s))$, paramétrée par son abscisse curviligne s .

1 – Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) .

2 – Calculer la métrique induite par la métrique euclidienne dans cette paramétrisation.

► SOLUTION

1 – Pour obtenir une paramétrisation de la surface de révolution, il suffit d'exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de cette surface, qui sont obtenues après rotation d'un vecteur de la courbe. Cette paramétrisation s'écrira ainsi

$$\vec{\Sigma} : (s, p) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(p) & -\sin(p) & 0 \\ \sin(p) & \cos(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \cos(p) \\ x(s) \sin(p) \\ z(s) \end{pmatrix}.$$

2 – Un vecteur déplacement élémentaire sur cette surface s'écrit

$$d\vec{\Sigma} = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial p} dp,$$

avec

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial s} = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) \cos(p) \\ \dot{x}(s) \sin(p) \\ \dot{z}(s) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial p} = \begin{pmatrix} -x(s) \sin(p) \\ x(s) \cos(p) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La métrique induite est donc donnée par

$$d\sigma^2 = \|\mathrm{d}\vec{\Sigma}\|^2 = (\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2) ds^2 + x(s)^2 dp^2,$$

en notant $\dot{x}(s) = dx/ds$, et $\dot{z}(s) = dz/ds$. La variable s étant l'abscisse curviligne sur \mathcal{C} , $ds^2 = dx^2 + dz^2$, c'est-à-dire, $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$. Finalement, la métrique induite est simplement : $d\sigma^2 = ds^2 + x(s)^2 dp^2$.

[M] ■ EXERCICE 1.4

Le calcul de l'aire d'une pseudo-sphère dans un espace muni d'une métrique non-euclidienne est un exercice classique.

Pseudo-sphère en dimension 3 – Soit l'espace \mathbb{R}^3 , muni de la métrique \mathbf{g} telle que $\mathbf{g}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s) = ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. On définit la *pseudo-sphère* comme étant la surface $\Psi S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. On appelle *projection stéréographique*, l'application qui, à un point (x, y) du disque, \mathcal{D} , de rayon 2 et de centre $N = (0, 0, 1)$, tangent à la pseudo-sphère en N , associe le point d'intersection de la droite passant par les points $S = (0, 0, -1)$ et $A = (x, y, 1)$ avec la pseudo-sphère (voir figure 1.1).

1 – Exprimer, dans le système de coordonnées $\{x, y\}$, la métrique induite par la forme quadratique \mathbf{g} sur la pseudo-sphère.

2 – Quelle est l'aire de la pseudo-sphère ?

► SOLUTION

1 – Soit $M = (x_M, y_M, z_M)$ un point de la pseudo-sphère. On peut y associer le point A du disque en écrivant $\overrightarrow{SM} = t \overrightarrow{SA}$, avec $t \geq 1$. On déduit facilement

$$\{x_M = tx, \quad y_M = ty, \quad z_M = 2t - 1\}.$$

Comme $x_M^2 + y_M^2 - z_M^2 = -1$, on a alors $t(x^2 + y^2 - 4) = -4$, et la paramétrisation suivante pour la pseudo-sphère,

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{4x}{4 - x^2 - y^2}, \\ y_M &= \frac{4y}{4 - x^2 - y^2}, \\ z_M &= \frac{4 + x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

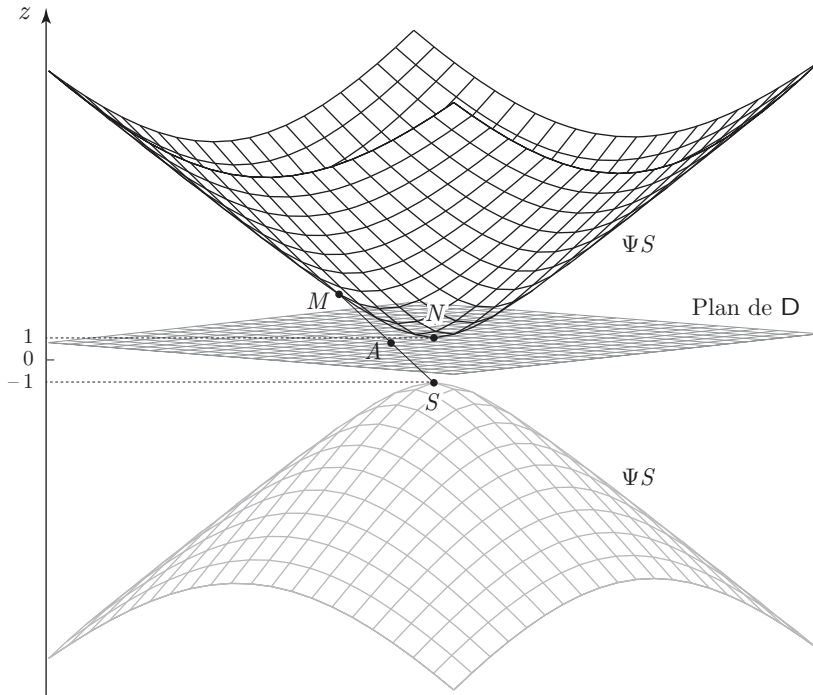


Figure 1.1 – Projection stéréographique de la pseudo-sphère.

De plus,

$$\begin{aligned} dx_M &= x dt + t dx, \\ dy_M &= y dt + t dy, \\ dz_M &= 2 dt. \end{aligned}$$

On peut donc écrire, en réarrangeant les termes,

$$dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = (x^2 + y^2 - 4) dt^2 + 2t dt (x dx + y dy) + t^2 (dx^2 + dy^2).$$

De l'égalité $t(x^2 + y^2 - 4) = -4$, on a la relation $(x^2 + y^2 - 4) dt + 2t(x dx + y dy) = 0$, ce qui implique

$$dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = t^2 (dx^2 + dy^2).$$

La métrique induite s'écrit donc

$$d\sigma^2 = dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

2 – D'après la métrique induite, l'élément d'aire s'écrit

$$dS = \sqrt{|g|} dx dy = \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy.$$

L'aire de la pseudo-sphère est donc égale à

$$S = \int_{\mathcal{D}} \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy = \int_{r=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(4 - r^2)^2} = +\infty.$$

[M] ■ EXERCICE 1.5

La dualité métrique est une notion fondamentale pour comprendre les bases du calcul tensoriel et de la géométrie pseudo-riemannienne. Une interprétation géométrique vient illustrer ici sa définition et ses propriétés.

Dualité métrique – On se place dans une variété pseudo-riemannienne \mathcal{V} munie d'une métrique \mathbf{g} . En tout point M de \mathcal{V} , et pour tout vecteur \mathbf{u} de l'espace vectoriel tangent $\mathbf{T}_M(\mathcal{V})$, on peut définir une unique forme linéaire \mathbf{u}^* de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* : \mathbf{T}_M(\mathcal{V}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

On dit que \mathbf{u}^* est associée à \mathbf{u} par dualité métrique. Dans une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$, les *coordonnées covariantes* u_μ d'un vecteur \mathbf{u} sont définies comme les coordonnées de la forme \mathbf{u}^* dans la base duale $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\mu\}$ de \mathcal{B} .

De la même façon, les *coordonnées contravariantes* \tilde{u}^μ d'une forme linéaire \mathbf{u}^* sont définies comme les coordonnées dans \mathcal{B} de l'unique vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ tel que, $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$, $\mathbf{v}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{g}^*(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$. On dit alors que le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ est associé à \mathbf{u}^* par dualité métrique.

1 – Exprimer les coordonnées covariantes d'un vecteur \mathbf{u} en fonction de ses coordonnées contravariantes dans une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$, et de $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. En déduire les coordonnées covariantes d'un vecteur de la base \mathcal{B} .

2 – Exprimer les coordonnées contravariantes d'une forme linéaire \mathbf{u}^* en fonction de ses coordonnées covariantes dans la base $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\mu\}$, et de $g^{\mu\nu} = \mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\mu, \mathbf{e}^\nu)$, avec \mathbf{g}^* le tenseur dual de \mathbf{g} . En déduire les coordonnées contravariantes d'un vecteur de la base \mathcal{B}^* .

3 – Les formes linéaires associées aux vecteurs de la base \mathcal{B} forment-elle une base de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$?

4 – Montrer que le produit scalaire entre un vecteur \mathbf{e}_λ de la base \mathcal{B} et le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ associé à la forme linéaire \mathbf{e}^λ de la base \mathcal{B}^* est égal au produit scalaire entre la forme linéaire \mathbf{e}^λ et la forme linéaire \mathbf{u}^* associée au vecteur \mathbf{e}_λ .

5 – Donner une interprétation géométrique des coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur \mathbf{u} en choisissant une base normalisée mais non orthogonale pour \mathcal{B} . Que se passe-t-il lorsque la base est orthonormée ?

► SOLUTION

1 – Si, dans la base \mathcal{B} , $\mathbf{u} = u^\mu \mathbf{e}_\mu$, la définition de \mathbf{u}^* donne

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{g}(u^\mu \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu,$$

et, en posant $\mathbf{u}^* = u_\mu \mathbf{e}^\mu$,

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_\nu) = u_\mu \mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = u_\mu \delta_\nu^\mu = u_\nu,$$

c'est-à-dire, $u_\nu = g_{\mu\nu} u^\mu$. On en déduit la μ -ième coordonnée covariante, notée $(\mathbf{e}_\lambda)_\mu$, d'un vecteur \mathbf{e}_λ de la base \mathcal{B} qui s'écrit donc $(\mathbf{e}_\lambda)_\mu = g_{\lambda\mu}$.

2 – On pose $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}^\mu \mathbf{e}_\mu$ dans la base \mathcal{B} , et $\mathbf{u}^* = u_\mu \mathbf{e}^\mu$ dans la base \mathcal{B}^* . On a donc d'une part, $\mathbf{e}^\nu(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{u}^\mu \mathbf{e}^\nu(\mathbf{e}_\mu) = \tilde{u}^\nu$, et, d'autre part, par définition, $\mathbf{e}^\nu(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{g}^*(\mathbf{u}^*, \mathbf{e}^\nu) = g^{\mu\nu} u_\mu$. Ainsi, $\tilde{u}^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu$. On en déduit la μ -ième coordonnée contravariante, notée $(\mathbf{e}^\lambda)^\mu$, d'une forme linéaire \mathbf{e}^λ de la base \mathcal{B}^* qui s'écrit donc $(\mathbf{e}^\lambda)^\mu = g^{\lambda\mu}$.

Remarque : si \mathbf{u}^* est associée à \mathbf{u} par dualité métrique, alors $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

3 – Puisque les formes linéaires $\{\omega_\lambda\}$ associées aux vecteurs de la base \mathcal{B} ont pour coordonnées les composantes covariantes du tenseur métrique, on a : $\det \mathbf{g} \neq 0$ équivaut à $\{\omega_\lambda\}$ est une base de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$.

4 – Le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ associé à la forme linéaire \mathbf{e}^λ s'écrit $\tilde{\mathbf{u}} = g^{\lambda\mu} \mathbf{e}_\mu$, donc le produit scalaire est

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_\lambda, \tilde{\mathbf{u}}) = g^{\lambda\mu} \mathbf{g}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu) = g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} = 1.$$

Attention, dans cette expression, λ est fixé, et la sommation se fait uniquement sur $\mu \dots$. La forme linéaire \mathbf{u}^* associée au vecteur \mathbf{e}_λ s'écrit $\mathbf{u}^* = g_{\lambda\mu} \mathbf{e}^\mu$, donc le produit scalaire est

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\lambda, \mathbf{u}^*) = g_{\lambda\mu} \mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\lambda, \mathbf{e}^\mu) = g_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = 1,$$

où, là encore, la sommation se fait uniquement sur μ . On a donc bien égalité des deux produits scalaires.

Remarque : on notera que $\mathbf{g}(\mathbf{e}_\sigma, \tilde{\mathbf{u}}) = \delta_\sigma^\lambda$ et $\mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\sigma, \mathbf{u}^*) = \delta_\lambda^\sigma$.

5 – Dans une base normalisée $\{\mathbf{e}_\mu\}$, soit \mathbf{v} le vecteur de coordonnées contravariantes v^μ égales aux coordonnées covariantes u_μ d'un vecteur \mathbf{u} . D'après les questions précédentes, $v^\mu = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_\mu)$, donc \mathbf{v} est la somme des projections orthogonales (pour \mathbf{g}) du vecteur \mathbf{u} sur les vecteurs de la base $\{\mathbf{e}_\mu\}$. Chacune de ces projections sur un vecteur de base ne dépend pas des autres vecteurs de base, mais uniquement de la métrique via le produit scalaire. Par définition, chacune des coordonnées contravariantes d'un vecteur \mathbf{u} correspond quant à elle à la projection sur un vecteur de base parallèlement à tous les autres vecteurs de la base (voir figure 1.2). Les coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur ne sont donc égales que lorsque la base est orthogonale (ici, orthonormée).

☞ **Références bibliographiques :** [5], [12], [17], [15].

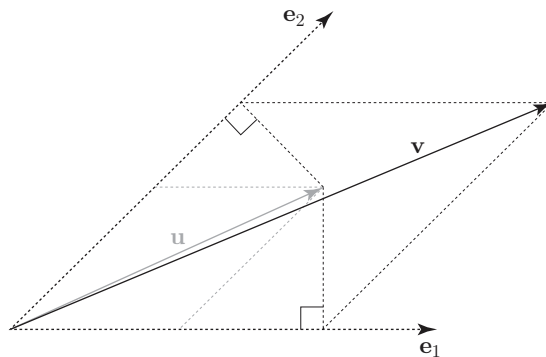


Figure 1.2 – Coordonnées covariantes et contravariantes en dimension 2 : les vecteurs $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$ et $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$ sont différents lorsque la base n'est pas orthogonale.

[M] ■ **EXERCICE 1.6**

Quadri-vecteurs de genre lumière, temps et espace – On se place dans un espace-temps muni d'une métrique \mathbf{g} de signature $(+, -, -, -)$, et l'on étudie quelques-unes des propriétés des quadri-vecteurs selon leur genre.

1 – Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux quadri-vecteurs non nuls de genre lumière définis en un point P de cet espace-temps.

(a) Montrer que si le pseudo-produit scalaire entre \mathbf{x} et \mathbf{y} est nul, alors les deux quadri-vecteurs sont colinéaires.

(b) Montrer que tout vecteur orthogonal au vecteur \mathbf{x} est soit de genre lumière, soit de genre espace.

2 – Soit \mathbf{u} un quadri-vecteur de genre temps défini en un point P de cet espace-temps.

(a) Montrer que tout quadri-vecteur \mathbf{v} colinéaire à \mathbf{u} est aussi de genre temps.

(b) Montrer que tout quadri-vecteur \mathbf{v} orthogonal à \mathbf{u} est de genre espace.

3 – Soit \mathbf{u} un quadri-vecteur de genre espace défini en un point P de cet espace-temps. Montrer qu'il existe des vecteurs de genre espace, temps ou lumière qui sont orthogonaux à \mathbf{u} .

► SOLUTION

1(a) – En tout point P de l'espace-temps, on peut définir un système de coordonnées localement cartésiennes dans lequel le tenseur métrique a pour composantes covariantes non nulles : $g_{00} = 1$, et $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. De plus, par une simple rotation spatiale, ce système de coordonnées peut être choisi tel que, un des deux vecteurs (par exemple, le vecteur \mathbf{x}) n'ait qu'une seule composante spatiale non nulle. Enfin, les quadri-vecteurs de genre lumière ont, par définition, une pseudo-norme égale à 0. On dispose donc des trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu &= 0, \\g_{\mu\nu} y^\mu y^\nu &= 0, \\g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu &= 0,\end{aligned}$$

la dernière de ces équations traduisant la nullité du produit scalaire. En choisissant un système de coordonnées tel que les seules composantes non nulles du vecteur \mathbf{x} soient x^0 et x^1 , les équations précédentes peuvent se réécrire simplement

$$\begin{aligned}(x^0)^2 - (x^1)^2 &= 0, \\(y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 &= 0, \\x^0 y^0 - x^1 y^1 &= 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que $(y^0)^2 = (y^1)^2$, et par suite $(y^2)^2 = -(y^3)^2$, ou encore $y^2 = y^3 = 0$: les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} sont donc colinéaires.

1(b) – Si le vecteur \mathbf{y} est quelconque, la seule équation qui change, dans le système précédent, est la dernière. On a donc

$$-(y^2)^2 - (y^3)^2 = A,$$

avec A , la pseudo-norme de \mathbf{y} . On en déduit donc que si $A \neq 0$ alors $A < 0$ et \mathbf{y} est de genre espace.

2(a) – En posant $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, avec $\lambda \neq 0$, on obtient $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$, donc \mathbf{v} est aussi de genre temps.

2(b) – Comme dans la question précédente, on peut définir un système de coordonnées localement cartésiennes dans lequel \mathbf{u} et \mathbf{v} ont pour coordonnées, respectivement, $(u^0, u^1, 0, 0)$ et (v^0, v^1, v^2, v^3) . Comme \mathbf{u} est de genre temps, $(u^0)^2 - (u^1)^2 > 0$, et l'orthogonalité de \mathbf{u} et \mathbf{v} implique $(u^0)^2 (v^0)^2 = (u^1)^2 (v^1)^2$. Ainsi, on déduit que $(v^1)^2 > (v^0)^2$, et donc $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$.

3 – On reprend la démarche précédente. Soient \mathbf{u} de genre espace et de coordonnées $(u^0, u^1, 0, 0)$, et \mathbf{v} de coordonnées (v^0, v^1, v^2, v^3) orthogonal à \mathbf{u} . On a : $(u^0)^2 - (u^1)^2 < 0$, et $(u^0)^2 (v^0)^2 = (u^1)^2 (v^1)^2$.

– Si $v^0 = 0$, comme $u^1 \neq 0$, $v^1 = 0$, et $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$.

– Si $v^0 \neq 0$, comme $(u^0)^2 < (u^1)^2$, $(v^0)^2 > (v^1)^2$. Donc, si $v^2 = v^3 = 0$, alors $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, et si v^2 et v^3 sont telles que $(v^0)^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$, alors $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.

Le quadri-vecteur \mathbf{v} n'a donc pas de genre défini.

[MD] ■ EXERCICE 1.7

La dérivée de Lie est un outil important qui sera souvent utilisé, notamment dans le chapitre 7. Elle est introduite ici dans le cadre plus général des dérivations.

Dérivée de Lie – On considère une variété pseudo-riemannienne munie d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$, dont la base naturelle associée est $\{\mathbf{e}_\mu\}$. Par définition, une *dérivation* v est une fonction qui transforme tout champ scalaire f en un autre champ scalaire $v(f)$, et qui possède les propriétés suivantes : (a) $v(f + g) = v(f) + v(g)$, (b) $v(fg) = v(f)g + f v(g)$, et (c) si k est une fonction constante, $v(k) = 0$.

1 – Soit v une dérivation et \mathbf{V} un vecteur de composantes v^μ , telles que $v^\mu = v(x^\mu)$. Montrer que pour tout champ scalaire f , $v(f) = \nabla_{\mathbf{V}} f$, avec $\nabla_{\mathbf{V}} f = v^\nu \partial_\nu f$.

2 – Pour tout champ scalaire f , en notant $\mathbf{V}[f] = v(f)$, montrer que $\mathbf{V}[f] = \langle \nabla f, \mathbf{V} \rangle$, où ∇f est le gradient de f .

3 – Soient v et w , deux dérivations. Montrer que le crochet de Lie $[v, w]$, défini pour tout f par

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)),$$

est aussi une dérivation. Exprimer les coordonnées $[v, w](x^\mu)$, dans la base $\{\mathbf{e}_\mu\}$, du vecteur associé à $[v, w]$, en fonction des coordonnées des vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} , tels que $\mathbf{V}[f] = v(f)$ et $\mathbf{W}[f] = w(f)$. Quelle expression équivalente peut-on donner à ces coordonnées lorsque le tenseur de torsion est nul ?

4 – On appelle *dérivée de Lie* du champ vectoriel \mathbf{W} dans la direction de \mathbf{V}

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = [\mathbf{V}, \mathbf{W}],$$

en notant $[\mathbf{V}, \mathbf{W}] = [v, w]$. Pour un champ scalaire f , la dérivée de Lie, dans la direction de \mathbf{V} , est : $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}f = \mathbf{V}[f]$.

(a) Déterminer les coordonnées, dans la base duale $\{\mathbf{e}^\mu\}$, de la dérivée de Lie, suivant \mathbf{V} , d'une forme linéaire $\Phi = \phi_\mu \mathbf{e}^\mu$.

(b) Soient w_μ et w^μ , les coordonnées covariantes et contravariantes d'un champ vectoriel \mathbf{W} : à quelle condition $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\mu) = 0$ implique $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w_\mu) = 0$?

5 – Soit \mathbf{T} , un tenseur de composantes covariantes $T_{\mu\nu}$. Déterminer les coordonnées, dans la base $\{\mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu\}$, de la dérivée de Lie, dans la direction de \mathbf{V} , du tenseur \mathbf{T} .

6 – Soient \mathbf{V} et \mathbf{W} , deux champs vectoriels quelconques, et P et Q deux points de coordonnées respectives x^μ et $x^\mu + h v^\mu$, avec $0 < h \ll 1$. On effectue un changement de coordonnées en Q , tel que les nouvelles coordonnées de Q soient égales aux coordonnées de P . Exprimer les nouvelles coordonnées contravariantes w'^μ , du vecteur \mathbf{W} en Q . En déduire que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\mu) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w'^\mu(Q) - w^\mu(P)}{h}.$$

► SOLUTION

1 – Soit P un point fixe quelconque de la variété, de coordonnées x_P^μ . Pour tout autre point M , de coordonnées x_M^μ , on peut écrire, au premier ordre

$$f(M) = f(P) + (x_M^\mu - x_P^\mu) \partial_\mu f(P).$$

En appliquant la dérivation v , on obtient simplement

$$v(f(M)) = v(x_M^\mu) \partial_\mu f(P),$$

ce qui implique

$$v(f(P)) = v(x_P^\mu) \partial_\mu f(P) = v^\mu(P) \partial_\mu f(P).$$

2 – Le gradient de f s'écrit : $\nabla f = \partial_\nu f \mathbf{e}^\nu$, avec $\{\mathbf{e}^\nu\}$, la base duale de la base naturelle associée à $\{x^\mu\}$. Donc, on a

$$\langle \nabla f, \mathbf{V} \rangle = v^\mu \partial_\nu f \langle \mathbf{e}^\nu, \mathbf{e}_\mu \rangle = v^\mu \partial_\mu f = \mathbf{V}[f].$$

3 – Pour tous champs scalaires f et g , on a les relations :

$$\begin{aligned}
 [v, w](f + g) &= v(w(f) + w(g)) - w(v(f) + v(g)) \\
 &= v(w(f)) - w(v(f)) + v(w(g)) - w(v(g)) = [v, w](f) + [v, w](g), \\
 [v, w](fg) &= v(fw(g) + w(f)g) - w(fv(g) + v(f)g) \\
 &= v(fw(g)) + v(w(f)g) - w(fv(g)) - w(v(f)g) \\
 &= f v(w(g)) - f w(v(g)) + g v(w(f)) - g w(v(f)) \\
 &= f [v, w](g) + g [v, w](f), \\
 [v, w](k) &= v(w(k)) - w(v(k)) = v(0) - w(0) = 0,
 \end{aligned}$$

avec k une constante. La fonction $[v, w]$ est donc bien une dérivation. Les coordonnées des vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} , dans la base naturelle, sont respectivement $v^\mu = v(x^\mu)$, et $w^\mu = w(x^\mu)$, donc

$$\begin{aligned}
 [v, w](x^\mu) &= v(w(x^\mu)) - w(v(x^\mu)) = v(w^\mu) - w(v^\mu) \\
 &= v^\nu \partial_\nu w^\mu - w^\nu \partial_\nu v^\mu.
 \end{aligned}$$

Lorsque le tenseur de torsion est nul, les coefficients de connexion sont symétriques : $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. On peut donc remplacer les dérivées partielles par les dérivées covariantes :

$$[v, w](x^\mu) = v^\nu \nabla_\nu w^\mu - w^\nu \nabla_\nu v^\mu.$$

4(a) – Pour tout vecteur \mathbf{W} , on peut exprimer la dérivée de Lie du scalaire $\Phi(\mathbf{W}) = \phi_\nu w^\nu$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi_\nu w^\nu) = (\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi_\nu)) w^\nu + \phi_\nu (\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\nu)) = v^\lambda \partial_\lambda (\phi_\nu w^\nu),$$

avec les relations,

$$\begin{aligned}
 \phi_\nu (\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\nu)) &= \phi_\nu (v^\lambda \partial_\lambda w^\nu - w^\lambda \partial_\lambda v^\nu), \\
 v^\lambda \partial_\lambda (\phi_\nu w^\nu) &= v^\lambda (\partial_\lambda \phi_\nu) w^\nu + v^\lambda \phi_\nu (\partial_\lambda w^\nu),
 \end{aligned}$$

ce qui implique, en réarrangeant les indices,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi_\lambda)) w^\lambda = (v^\nu \partial_\nu \phi_\lambda + \phi_\nu \partial_\lambda v^\nu) w^\lambda.$$

Le vecteur \mathbf{W} étant quelconque, on déduit

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi_\lambda) = v^\nu \partial_\nu \phi_\lambda + \phi_\nu \partial_\lambda v^\nu.$$

4(b) – Supposons que $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\mu) = 0$, on peut écrire,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w_\mu) &= \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(g_{\mu\lambda} w^\lambda) \\
 &= w^\lambda \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(g_{\mu\lambda}) \\
 &= w^\lambda (g_{\sigma\lambda} \partial_\mu v^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\lambda v^\sigma) \\
 &= w^\lambda (\partial_\mu v_\lambda + \partial_\lambda v_\mu).
 \end{aligned}$$

La condition d'annulation de $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w_\mu)$ est donc $\partial_\mu v_\lambda + \partial_\lambda v_\mu = 0$, c'est-à-dire \mathbf{V} est un vecteur de Killing.

5 – Pour tous vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{W} , la dérivée de Lie du scalaire $T_{\mu\nu} u^\mu w^\nu$, suivant le vecteur \mathbf{V} , s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(T_{\mu\nu} u^\mu w^\nu) &= \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(T_{\mu\nu}) u^\mu w^\nu + T_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(u^\mu) w^\nu + T_{\mu\nu} u^\mu \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\nu) \\ &= v^\lambda \partial_\lambda (T_{\mu\nu} u^\mu w^\nu), \end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(u^\mu) w^\nu &= T_{\mu\nu} w^\nu (v^\lambda \partial_\lambda u^\mu - u^\lambda \partial_\lambda v^\nu), \\ T_{\mu\nu} u^\mu \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\nu) &= T_{\mu\nu} u^\mu (v^\lambda \partial_\lambda w^\nu - w^\lambda \partial_\lambda v^\nu), \\ v^\lambda \partial_\lambda (T_{\mu\nu} u^\mu w^\nu) &= v^\lambda \partial_\lambda (T_{\mu\nu}) u^\mu w^\nu + v^\lambda T_{\mu\nu} w^\nu \partial_\lambda u^\mu + v^\lambda T_{\mu\nu} u^\mu \partial_\lambda w^\nu, \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(T_{\mu\nu}) u^\mu w^\nu = (v^\lambda \partial_\lambda (T_{\mu\nu}) + T_{\lambda\nu} \partial_\mu v^\lambda + T_{\mu\lambda} \partial_\nu v^\lambda) u^\mu w^\nu.$$

Les vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{W} étant quelconques, on déduit

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(T_{\mu\nu}) = v^\lambda \partial_\lambda (T_{\mu\nu}) + T_{\lambda\nu} \partial_\mu v^\lambda + T_{\mu\lambda} \partial_\nu v^\lambda.$$

6 – Le changement de coordonnées en Q s'écrit : $x'^\mu = x^\mu - h v^\mu$, ce qui implique

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu - h \partial_\nu v^\mu.$$

Par ailleurs, au premier ordre en h , $w^\nu(Q) = w^\nu(P) + h v^\lambda \partial_\lambda w^\nu(P)$. Les nouvelles coordonnées du vecteur \mathbf{W} en Q sont donc données par

$$w'^\mu(Q) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} w^\nu(Q) = (\delta_\nu^\mu - h \partial_\nu v^\mu) [w^\nu(P) + h v^\lambda \partial_\lambda w^\nu(P)],$$

au premier ordre en h . Ainsi, on a

$$w'^\mu(Q) = w^\mu(P) + h v^\lambda \partial_\lambda w^\mu(P) - h w^\nu(P) \partial_\nu v^\mu.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w'^\mu(Q) - w^\mu(P)}{h} = v^\lambda \partial_\lambda w^\mu - w^\nu \partial_\nu v^\mu,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w'^\mu(Q) - w^\mu(P)}{h} = \mathcal{L}_{\mathbf{V}}(w^\mu).$$

 **Références bibliographiques : [9], [12], [15], [17].**

[M] ■ EXERCICE 1.8

Changement de coordonnées dans l'espace-temps – On considère un espace-temps muni d'une métrique et d'un système de coordonnées $\{t, x, y, z\}$ tel que le carré de l'élément de longueur infinitésimal s'écrit

$$ds^2 = (c^2 - a^2 t^2) dt^2 - 2 a t dt dx - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.1)$$

où a et c sont deux constantes non nulles.

1 – Par une transformation de coordonnées, montrer que ds^2 peut être ramené à l'élément de longueur de l'espace-temps de Minkowski exprimé en coordonnées cartésiennes $\{t', x', y', z'\}$.

2 – Quelle est la vitesse d'une particule spatialement fixe dans le système de coordonnées $\{t, x, y, z\}$, mesurée par un observateur spatialement fixe dans le système de coordonnées $\{t', x', y', z'\}$?

3 – Pour quelle raison le système de coordonnées $\{t, x, y, z\}$ ne permet-il pas de décrire tout l'espace-temps de Minkowski?

► SOLUTION

1 – On peut réécrire l'élément de longueur ds^2 de la façon suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (a t dt + dx)^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ainsi, en posant $x' = x + \frac{a t^2}{2}$, $t' = t$, $y' = y$ et $z' = z$, on obtient un élément de longueur de l'espace-temps de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

2 – Pour la particule, la variation des coordonnées spatiales sur sa ligne d'univers étant nulle : $dx = dy = dz = 0$. De plus, comme $dx' = dx + a t dt$, la vitesse mesurée par l'observateur est telle que : $dx'/dt' = a t'$, $dy'/dt' = dz'/dt' = 0$, le temps t' étant le temps propre mesuré par cet observateur.

3 – Dans l'expression (1.1) de la métrique en coordonnées $\{t, x, y, z\}$, on lit directement $g_{tt} = c^2 - a^2 t^2$. La métrique change donc de signature lorsque $t > c/a$. Dans la question précédente, on voit qu'une conséquence de ce changement est que la vitesse de la particule peut dépasser la vitesse de la lumière. C'est donc en contradiction avec les propriétés de l'espace-temps de Minkowski.

[MD] ■ EXERCICE 1.9

Changement de coordonnées et élément de volume – On se place dans une variété pseudo-riemannienne de dimension n munie de deux systèmes de coordonnées $\{x^\mu\}$ et $\{x'^\mu\}$.

1 – Pour toute fonction f intégrable sur un volume \mathcal{V} quelconque de cette variété, montrer que

$$\int_{\mathcal{V}} f(x^\mu) \sqrt{|g|} dx^n = \int_{\mathcal{V}} f'(x'^\mu) \sqrt{|g'|} dx'^n,$$

avec g et g' les déterminants du tenseur métrique relativement aux systèmes de coordonnées $\{x^\mu\}$ et $\{x'^\mu\}$, et f' telle que $f'(x'^\mu) = f(x^\mu)$. Conclure.

2 – Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , un système de coordonnées $\{x'^\mu\}$ est relié aux coordonnées cartésiennes $\{x^\mu\}$ par les relations : $x^1 = x'^1 + x'^2$, $x^2 = x'^1 - x'^2$, $x^3 = 2x'^1 x'^2 + x'^3$.

(a) Décrire les surfaces obtenues en fixant les coordonnées $\{x'^\mu\}$.

(b) Déterminer les composantes covariantes du tenseur métrique dans le système $\{x'^\mu\}$. En déduire que ces coordonnées ne sont pas orthogonales.

(c) Exprimer l'élément de volume infinitésimal $d\mathcal{V}$ dans le système $\{x'^\mu\}$.

► SOLUTION

1 – On sait que

$$\int_{\mathcal{V}} f(x^\mu) dx^n = \int_{\mathcal{V}} f'(x'^\mu) |J| dx'^n,$$

où J est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation de coordonnées, c'est-à-dire $J = \det(\partial x^\mu / \partial x'^\nu)$. Par ailleurs, les composantes du tenseur métrique se transforment selon

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}.$$

Le déterminant de cette dernière relation donne donc

$$\sqrt{|g'|} = |J| \sqrt{|g|},$$

et l'on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} f(x^\mu) \sqrt{|g|} dx^n = \int_{\mathcal{V}} f'(x'^\mu) \sqrt{|g'|} dx'^n.$$

2(a) – En fixant les coordonnées $\{x'^{\mu}\}$, comme $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 4x'^1 x'^2$, on obtient l'ensemble des surfaces dont les équations cartésiennes sont de la forme

$$F(x^1, x^2, x^3) = x^3 - \frac{1}{2} [(x^1)^2 - (x^2)^2] - x'^3,$$

avec $x'^3 \in \mathbb{R}$. Ce sont donc des paraboloides hyperboliques.

2(b) – Il faut réexprimer le carré de l'élément de longueur $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ en fonction des nouvelles coordonnées. On a facilement

$$\begin{aligned} dx^1 &= dx'^1 + dx'^2, \\ dx^2 &= dx'^1 - dx'^2, \\ dx^3 &= 2x'^2 dx'^1 + 2x'^1 dx'^2 + dx'^3. \end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= [2 + 4(x'^2)^2] (dx'^1)^2 + [2 + 4(x'^1)^2] (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 \\ &\quad + 8x'^1 x'^2 dx'^1 dx'^2 + 4x'^2 dx'^1 dx'^3 + 4x'^1 dx'^2 dx'^3. \end{aligned}$$

La présence des termes croisés $dx'^{\mu} dx'^{\nu}$, avec $\mu \neq \nu$, implique que ces coordonnées ne sont pas orthogonales. Les composantes covariantes du tenseur métrique sont :

$$\begin{aligned} g'_{11} &= 2 + 4(x'^2)^2, & g'_{22} &= 2 + 4(x'^1)^2, & g'_{33} &= 1, \\ g'_{12} &= g'_{21} = 4x'^1 x'^2, & g'_{13} &= g'_{31} = 2x'^2, & g'_{23} &= g'_{32} = 2x'^1. \end{aligned}$$

2(c) – L'élément de volume $d\mathcal{V}$ peut être déterminé de deux façons différentes. La première utilise la valeur absolue du jacobien de la transformation des coordonnées :

$$|J| = |\det(\partial x^{\mu} / \partial x'^{\nu})|.$$

Dans notre cas,

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2x'^2 & 2x'^1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Le système de coordonnées $\{x'^{\mu}\}$ étant cartésien, on a ainsi

$$d\mathcal{V} = dx^1 dx^2 dx^3 = |J| dx'^1 dx'^2 dx'^3 = 2 dx'^1 dx'^2 dx'^3.$$

La seconde méthode utilise le déterminant du tenseur métrique,

$$g = \begin{vmatrix} 2 + 4(x'^2)^2 & 4x'^1 x'^2 & 2x'^2 \\ 4x'^1 x'^2 & 2 + 4(x'^1)^2 & 2x'^1 \\ 2x'^2 & 2x'^1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Nous obtenons alors

$$d\mathcal{V} = \sqrt{g} dx'^1 dx'^2 dx'^3 = 2 dx'^1 dx'^2 dx'^3.$$

[MD] ■ EXERCICE 1.10

Le principe variationnel est un outil très efficace qui permet d'obtenir rapidement les équations des géodésiques. Le lecteur pourra, par exemple, se reporter au chapitre 4 et à la détermination des géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild.

Equations des géodésiques et principe variationnel – On se place dans un espace-temps \mathcal{E} , muni d'une métrique \mathbf{g} . Une géodésique de \mathcal{E} peut être définie comme la ligne d'univers qui rend extrémal le temps propre d'une particule matérielle reliant un événement A à un événement B .

1 – Après avoir exprimé le temps propre reliant deux événements A et B reliés par une ligne d'univers quelconque de genre temps paramétrée affinement par λ , expliquer pourquoi une géodésique peut-elle maximiser ou minimiser le temps propre ?

2 – On choisit une métrique de signature $(-, +, +, +)$, et l'on définit un lagrangien \mathcal{L} par $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, avec $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Démontrer, via le principe variationnel, que l'équation des géodésiques est de la forme

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0,$$

où les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ s'écrivent

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\beta g_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\alpha}).$$

Ces coefficients sont appelés *symboles de Christoffel* ou *coefficients de la connexion* (voir exercice page 23).

3 – On suppose que les composantes du tenseur métrique ne dépendent pas d'une certaine coordonnée x^λ . Comment s'écrit l'équation d'Euler-Lagrange associée à cette coordonnée ? Que peut-on en déduire ?

4 – Pour une particule massive en chute libre, montrer que les symboles de Christoffel s'écrivent également

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

avec $\{\xi^\alpha\}$, un système inertiel local de coordonnées.

5 – Exemple 1 : Soit un espace-temps de de Sitter simplifié, en dimension 2, dont la métrique est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t dx^2.$$

(a) Donner les équations des géodésiques.

(b) Retrouver ces équations en appliquant le principe variationnel avec un lagrangien qui s'écrit $\mathcal{L}^2 = -(dt/d\tau)^2 + \cosh^2 t (dx/d\tau)^2$.

6 – Exemple 2 : On considère un espace-temps dont la métrique est donnée par

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

où A et B sont des fonctions strictement positives sur \mathbb{R}_+ .

(a) Déterminer les symboles de Christoffel.

(b) En déduire les équations des géodésiques.

► SOLUTION

1 – Par définition, l'intervalle de temps propre $d\tau$ reliant deux événements infiniment proches de \mathcal{E} est tel que $c^2 d\tau^2 = \pm g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, le signe dépendant de la signature de la métrique : si la métrique a pour signature $(+, -, -, -)$ alors c'est un signe $+$, et si la métrique a pour signature $(-, +, +, +)$, c'est un signe $-$. L'intervalle de temps propre $d\tau$ reliant deux événements A et B quelconques, reliés par une ligne d'univers $x^\mu(\lambda)$ de genre temps paramétrée affinement par λ , s'écrit alors

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda.$$

Une géodésique de genre temps minimise le carré de la pseudo-distance ds^2 entre deux événements infiniment proches ; si $ds^2 > 0$, alors $c^2 d\tau^2 = ds^2$ et la géodésique minimise aussi le temps propre entre ces deux événements. En revanche, si $ds^2 < 0$, alors $c^2 d\tau^2 = -ds^2$ et la géodésique maximise le temps propre entre ces deux événements.

2 – Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} &= -2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= -\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à λ la première expression, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= -2 g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu - 2 \frac{dg_{\mu\nu}}{d\lambda} \dot{x}^\nu \\ &= -2 g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu - 2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\nu. \end{aligned}$$

Après changement des indices et par symétrie du tenseur métrique, les équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left[2 \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0,$$

avec

$$2 \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Conclusion, on obtient l'équation des géodésiques

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0,$$

avec les symboles de Christoffel,

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\beta g_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\alpha}).$$

Par symétrie du tenseur métrique, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$.

3 – L'équation d'Euler-Lagrange associée à x^λ est simplement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} = \text{constante},$$

c'est-à-dire, $g_{\lambda\nu} \dot{x}^\nu = \dot{x}_\lambda = \text{constante}$. Autrement dit, la composante covariante \dot{x}_λ du vecteur tangent à la géodésique, suivant la coordonnée x^λ , est donc conservée le long de cette géodésique.

4 – La particule étant en chute libre, on peut écrire

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0.$$

Comme $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$, on obtient

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0.$$

En multipliant cette équation par $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, on trouve

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right] \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

avec $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda$ et $\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau \partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$.

Par identification avec l'équation des géodésiques, on définit donc

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

5(a) – Les composantes covariantes du tenseur métrique sont $g_{tt} = -1$ et $g_{xx} = \cosh^2 t$. D'après l'expression des symboles de Christoffel, les seuls symboles non nuls sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^t &= \sinh t \cosh t, \\ \Gamma_{tx}^x &= \Gamma_{xt}^x = \tanh t. \end{aligned}$$

Les équations des géodésiques s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \sinh t \cosh t \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2 \tanh t \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

5(b) – Le principe variationnel s'écrit $\delta \int \mathcal{L}^2 d\tau = 0$. Les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial t} = 0$$

et

$$\frac{d}{d\tau} [\cosh^2(t) \dot{x}] = 0$$

avec $\dot{t} = dt/d\tau$ et $\dot{x} = dx/d\tau$, redonnent facilement les équations précédentes.

6(a) – Les composantes covariantes du tenseur métrique sont : $g_{tt} = A(r)$, $g_{rr} = -B(r)$, $g_{\theta\theta} = -r^2$, et $g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta$. Par définition des symboles de Christoffel, les seuls symboles non nuls sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \partial_r g_{tt} = \frac{1}{2} \frac{A'(r)}{A(r)}, & \Gamma_{tt}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt} = \frac{1}{2} \frac{A'(r)}{B(r)}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\theta\theta} = -\frac{r}{B(r)}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \partial_r g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

6(b) – L'équation des géodésiques se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2\Gamma_{tr}^t \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^r \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2\Gamma_{r\theta}^\theta \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2\Gamma_{r\varphi}^\varphi \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + 2\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

☞ Références bibliographiques : [17], [19].

[MD] ■ EXERCICE 1.11

Unicité de la connexion de Levi-Civita – Sur toute variété pseudo-riemannienne \mathcal{V} , munie d'une métrique \mathbf{g} , il existe une infinité de *connexions* ou *dérivations covariantes*, notées ∇ , telles que $\forall M \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \nabla : \mathbf{T}_M(\mathcal{V}) \times \mathbf{T}_M(\mathcal{V}) &\rightarrow \mathbf{T}_M(\mathcal{V}) \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \nabla_{\vec{u}} \vec{v} = u^\nu \nabla_\nu v^\mu \vec{e}_\mu, \end{aligned}$$

avec $\{\vec{e}_\mu\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{T}_M(\mathcal{V})$ tangent à \mathcal{V} en M , $\{\mathbf{e}^\mu\}$ sa base duale, et $\nabla_\nu v^\mu$ les composantes de la dérivée covariante $\nabla \vec{v}$ de \vec{v} telle que $\nabla \vec{v} = \nabla_\nu v^\mu \vec{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$. Ces connexions doivent vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbf{T}_M(\mathcal{V}))^3, \quad \nabla_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) &= \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + \nabla_{\vec{u}} \vec{w}, \\ \nabla_{\vec{u} + \vec{v}} \vec{w} &= \nabla_{\vec{u}} \vec{w} + \nabla_{\vec{v}} \vec{w}, \end{aligned}$$

et pour tout champ scalaire f défini sur \mathcal{V} ,

$$\begin{aligned} \nabla_f \vec{u} \vec{v} &= f \nabla_{\vec{u}} \vec{v}, \\ \nabla_{\vec{u}}(f \vec{v}) &= \langle \nabla f, \vec{u} \rangle \vec{v} + f \nabla_{\vec{u}} \vec{v}, \end{aligned}$$

avec ∇f le gradient de f dans $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$, l'espace dual de $\mathbf{T}_M(\mathcal{V})$.

1 – Dans un système quelconque de coordonnées $\{x^\mu\}$, donner l'expression de $\langle \nabla f, \vec{u} \rangle$ pour un champ scalaire f défini en un point M de \mathcal{V} et un vecteur \vec{u} de $\mathbf{T}_M(\mathcal{V})$.

2 – Soit ∇ une connexion définie par les coefficients $\gamma_{\mu\nu}^\lambda$ tels que : $\nabla_{\vec{e}_\mu} \vec{e}_\nu = \gamma_{\nu\mu}^\lambda \vec{e}_\lambda$.

(a) Montrer que le vecteur $\nabla_{\vec{u}} \vec{v}$ peut se mettre sous la forme

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{v} = u^\alpha [\vec{e}_\alpha(v^\mu) + \gamma_{\beta\alpha}^\mu v^\beta] \vec{e}_\mu,$$

avec $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$, $\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu$, et en notant $\vec{e}_\alpha(f) = \langle \nabla f, \vec{e}_\alpha \rangle$ pour tout champ scalaire f (voir exercice page 12).

(b) Que devient cette expression si $\{\vec{e}_\mu\}$ est la base naturelle associée à un système de coordonnées $\{x^\mu\}$? Exprimer alors la dérivée covariante d'un vecteur \vec{v} .

(c) En déduire une définition de $\nabla\omega = \nabla_\mu \omega_\nu \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$ pour tout $\omega \in \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$. Généraliser cette définition à tout tenseur de type $\binom{p}{q}$.

3 – Soient \mathcal{C} une géodésique de \mathcal{V} pour la métrique \mathbf{g} , et \vec{u} un champ vectoriel de \mathcal{V} tel que, en tout point de la géodésique \mathcal{C} , \vec{u} est un vecteur tangent à \mathcal{C} . A partir de l'équation des géodésiques (voir exercice page 19), et sachant que \vec{u} est transporté parallèlement à lui-même le long de \mathcal{C} pour ∇ ($\Leftrightarrow \nabla_{\vec{u}} \vec{u} = \vec{0}$), montrer que $\gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Conclure.

4 – On définit le tenseur de torsion \mathbf{S} , par rapport à la connexion ∇ , par

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V}) \times (\mathbf{T}_M(\mathcal{V}))^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \langle \omega, \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - \nabla_{\vec{v}} \vec{u} + [\vec{u}, \vec{v}] \rangle, \end{aligned}$$

avec $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie.

(a) Quelles sont les composantes de \mathbf{S} dans la base naturelle associée à $\{x^\mu\}$? A quelle condition \mathbf{S} est-il identiquement nul?

(b) On suppose que \mathbf{S} est identiquement nul. Montrer que $\nabla \mathbf{g} = 0$, et que les composantes de la dérivée covariante du gradient de tout champ scalaire f sont symétriques.

► SOLUTION

1 – En un point M de \mathcal{V} , le gradient d'un champ scalaire f s'écrit $\partial_\mu f(M) \mathbf{e}^\mu$, avec les vecteurs \mathbf{e}^μ de la base de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$, duale de la base naturelle $\{\mathbf{e}_\mu\}$. Un vecteur \vec{u} se décomposera suivant $\vec{u} = u^\mu \mathbf{e}_\mu$. On aura donc

$$\langle \nabla f, \vec{u} \rangle = \partial_\mu f(M) \mathbf{e}^\mu (u^\nu \mathbf{e}_\nu) = u^\nu \partial_\mu f(M) \delta_\nu^\mu,$$

c'est-à-dire $\langle \nabla f, \vec{u} \rangle = u^\mu \partial_\mu f(M) = \vec{u}(f)$.

2(a) – Par définition de la connexion, et d'après ses propriétés, on a

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\vec{u}} \vec{v} &= \langle \nabla v^\mu, \vec{u} \rangle \vec{e}_\mu + v^\mu \nabla_{\vec{u}} \vec{e}_\mu \\
 &= u^\alpha \langle \nabla v^\mu, \vec{e}_\alpha \rangle \vec{e}_\mu + v^\mu u^\nu \nabla_{\vec{e}_\nu} \vec{e}_\mu \\
 &= u^\alpha \vec{e}_\alpha(v^\mu) \vec{e}_\mu + v^\beta u^\alpha \gamma_{\beta\alpha}^\mu \vec{e}_\mu \\
 &= u^\alpha [\vec{e}_\alpha(v^\mu) + \gamma_{\beta\alpha}^\mu v^\beta] \vec{e}_\mu.
 \end{aligned}$$

2(b) – Si $\{\vec{e}_\mu\}$ est la base naturelle associée à un système de coordonnées $\{x^\mu\}$, alors $\vec{e}_\mu = \vec{\partial}_\mu$ et l'expression devient

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{v} = u^\alpha \left[\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha} + \gamma_{\beta\alpha}^\mu v^\beta \right] \vec{e}_\mu.$$

La dérivée covariante d'un vecteur \vec{v} est alors simplement reliée à la connexion par

$$\nabla \vec{v} = \left[\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha} + \gamma_{\beta\alpha}^\mu v^\beta \right] \vec{e}_\mu \otimes \mathbf{e}^\alpha.$$

2(c) – Soit la forme linéaire $\omega = \omega_\mu \mathbf{e}^\mu$. On a :

$$\nabla[\omega(\vec{u})] = \nabla(\omega_\nu u^\nu) = (\nabla_\mu \omega_\nu u^\nu + \omega_\nu \nabla_\mu u^\nu) \mathbf{e}^\mu,$$

ce qui équivaut à

$$\nabla_\mu \omega_\nu u^\nu \mathbf{e}^\mu = \nabla(\langle \omega, \vec{u} \rangle) - \omega_\nu \nabla_\mu u^\nu \mathbf{e}^\mu.$$

On peut donc définir $\nabla\omega$ comme le tenseur, de type $\binom{0}{2}$, de composantes $\nabla_\mu \omega_\nu$ dans la base $\{\mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu\}$, et qui est tel que, pour tout couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) ,

$$\nabla\omega(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v}(\langle \omega, \vec{u} \rangle) - \nabla\vec{u}(\omega, \vec{v}).$$

Comme le gradient de $\langle \omega, \vec{u} \rangle$ s'écrit

$$\nabla(\langle \omega, \vec{u} \rangle) = \nabla(\omega_\alpha u^\alpha) = \left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\mu} u^\alpha + \omega_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \mathbf{e}^\mu,$$

et d'après les composantes $\nabla_\mu u^\nu$ de la dérivée covariante de \vec{u} , les composantes $\nabla_\mu \omega_\nu$ sont telles que

$$\nabla_\mu \omega_\nu u^\nu = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\mu} u^\alpha - \omega_\alpha \gamma_{\nu\mu}^\alpha u^\nu.$$

Après un changement des indices muets, on obtient

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \gamma_{\nu\mu}^\alpha \omega_\alpha.$$

Regardons à présent ce qui se passe, par exemple, pour un tenseur \mathbf{T} de type $\binom{1}{1}$: celui-ci peut se décomposer dans la base $\{\mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}^\mu\}$ selon $\mathbf{T} = T^\nu_\mu \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}^\mu$. Pour tout $(\omega, \vec{u}) \in \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V}) \times \mathbf{T}_M(\mathcal{V})$, on a alors

$$\begin{aligned} \nabla[\mathbf{T}(\omega, \vec{u})] &= \nabla(T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu) \\ &= (\nabla_\lambda T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu + T^\nu_\mu \nabla_\lambda \omega_\nu u^\mu + T^\nu_\mu \omega_\nu \nabla_\lambda u^\mu) \mathbf{e}^\lambda, \end{aligned}$$

ou encore

$$\nabla_\lambda T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu \mathbf{e}^\lambda = \nabla(T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu) - (T^\nu_\mu \nabla_\lambda \omega_\nu u^\mu + T^\nu_\mu \omega_\nu \nabla_\lambda u^\mu) \mathbf{e}^\lambda$$

avec

$$\nabla(T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu) = \left(\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\lambda} \omega_\nu u^\mu + T^\nu_\mu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\lambda} u^\mu + T^\nu_\mu \omega_\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \mathbf{e}^\lambda.$$

En définissant le tenseur $\nabla\mathbf{T}$ de type $\binom{1}{2}$ et de composantes $\nabla_\lambda T^\nu_\mu$ tel que, pour tout triplet $(\omega, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V}) \times (\mathbf{T}_M(\mathcal{V}))^2$,

$$\begin{aligned} \nabla T(\omega, \vec{u}, \vec{v}) &= \nabla_\lambda T^\nu_\mu \omega_\nu u^\mu v^\lambda \\ &= \left(\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\lambda} \omega_\nu u^\mu + T^\nu_\mu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\lambda} u^\mu + T^\nu_\mu \omega_\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} - T^\nu_\mu \nabla_\lambda \omega_\nu u^\mu - T^\nu_\mu \omega_\nu \nabla_\lambda u^\mu \right) v^\lambda \\ &= \left(\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\lambda} + \gamma^\nu_{\alpha\lambda} T^\alpha_\mu - \gamma^\alpha_{\mu\lambda} T^\nu_\alpha \right) \omega_\nu u^\mu v^\lambda. \end{aligned}$$

On trouve alors facilement la généralisation de cette définition à tout tenseur \mathbf{T} de type $\binom{p}{q}$ qui va donc donner un tenseur $\nabla\mathbf{T}$ de type $\binom{p}{q+1}$.

3 – L'équation des géodésiques, paramétrées affinement par λ , s'écrit

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0.$$

Par ailleurs, le transport parallèle de \vec{u} le long de \mathcal{C} s'écrit

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{u} = u^\alpha \left[\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} + \gamma^\mu_{\beta\alpha} u^\beta \right] \vec{e}_\mu = \vec{0},$$

avec

$$u^\alpha \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{du^\mu}{d\lambda},$$

puisque, par définition, $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. On a donc

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0,$$

et, par identification, $\gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. La connexion assurant le transport parallèle des vecteurs tangents aux géodésiques est donc unique et ses coefficients sont égaux aux

symboles de Christoffel, eux-mêmes étant définis de façon univoque grâce aux coefficients de la métrique. Ainsi,

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_{\beta} g_{\alpha\sigma} + \partial_{\alpha} g_{\sigma\beta} - \partial_{\sigma} g_{\beta\alpha}).$$

La symétrie du tenseur métrique implique $\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$. Cette connexion symétrique, unique, est appelée *connexion de Levi-Civita*.

4(a) – Le crochet de Lie de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est défini par

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (v^{\nu} \partial_{\nu} u^{\mu} - u^{\nu} \partial_{\nu} v^{\mu}) \vec{e}_{\mu}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\omega, \vec{u}, \vec{v}) &= \omega_{\mu} [(u^{\nu} \nabla_{\nu} v^{\mu} - v^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu}) + v^{\nu} \partial_{\nu} u^{\mu} - u^{\nu} \partial_{\nu} v^{\mu}] \\ &= (\gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \gamma_{\alpha\beta}^{\mu}) \omega_{\mu} u^{\alpha} v^{\beta}. \end{aligned}$$

Les composantes de \mathbf{S} sont donc : $S_{\alpha\beta}^{\mu} = \gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. Le tenseur de torsion est identiquement nul pour la connexion de Levi-Civita.

4(b) – Par définition du tenseur métrique, $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu}$. En dérivant,

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} &= (\partial_{\lambda} \mathbf{e}_{\mu}) \cdot \mathbf{e}_{\nu} + \mathbf{e}_{\mu} \cdot (\partial_{\lambda} \mathbf{e}_{\nu}), \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} g_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} g_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée covariante du tenseur métrique a pour composantes

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} g_{\mu\rho},$$

c'est-à-dire, $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$.

Les composantes de $\nabla(\nabla f)$ s'écrivent simplement

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} f &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\nabla_{\mu} f) - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} f \\ &= \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f. \end{aligned}$$

Elles sont donc symétriques.