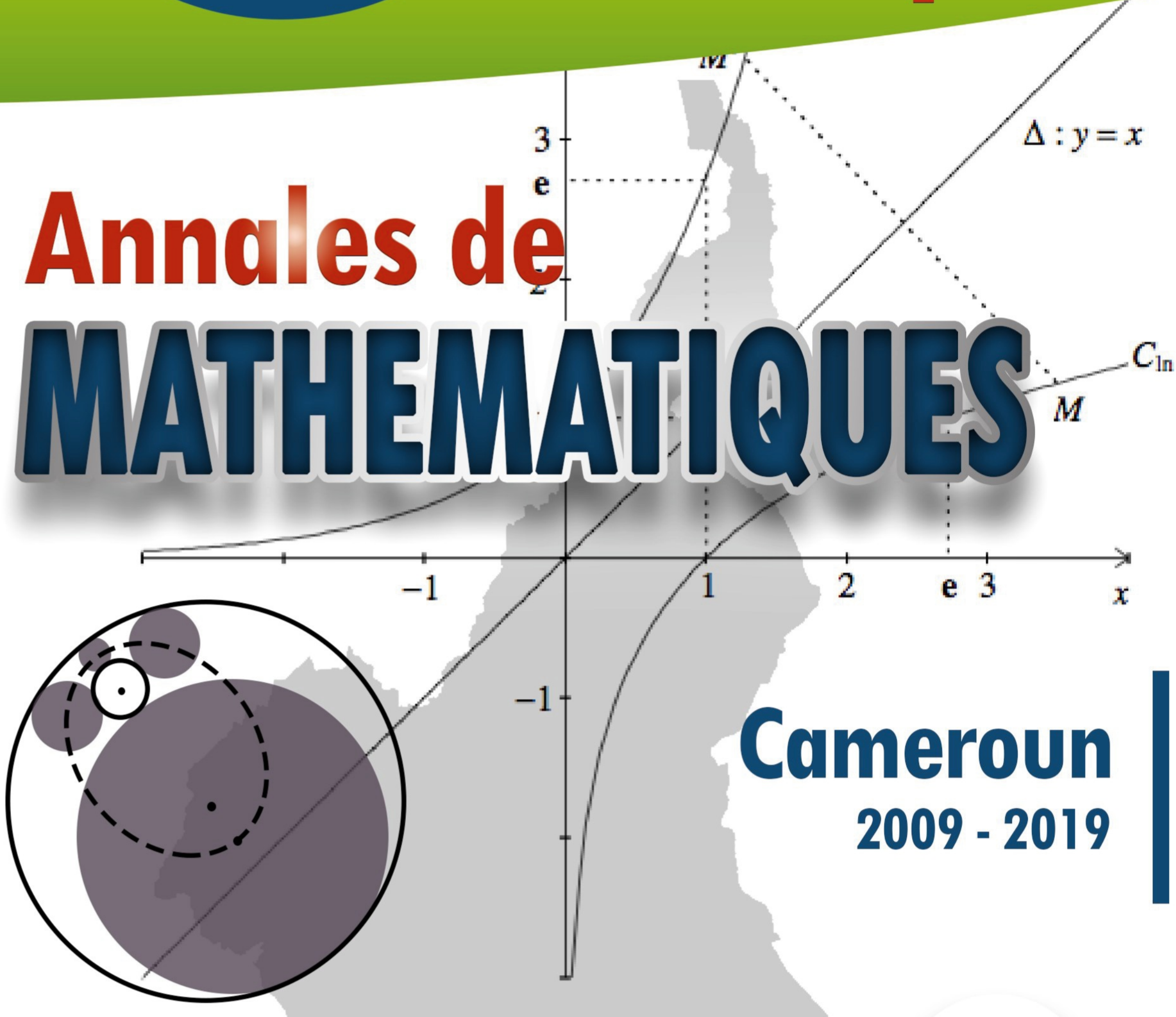
Sujets et Corrigés

Baccalauréat C|E

Annales de MATHEMATIQUES



Cameroun
2009 - 2019

4

Christian V. NGUEMBOU TAGNE

2 ème édition

Annales de Mathématiques

Baccalauréat C et E

Cameroun

2009 – 2019

Annales de Mathématiques

Baccalauréat C et E

Cameroun

2009 – 2019

Sujets et Corrigés

Christian V. Nguembou Tagne

BoD - Books on Demand

Éditeur : BoD - Books on Demand,

12/14 rond-point des Champs Élysés, 75008 Paris

Impression : BoD - Books on Demand, Allemagne

ISBN : 978-2-322-22574-3

(*Première édition, novembre 2019*)

Dépôt légal : février 2021

À la mémoire de

Pauline Tchuenguem

(1906 – 2011)

Avant-propos

Conformément à son titre, cet ouvrage est une chronique de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat C et E du Cameroun, pour les onze sessions de 2009 à 2019. Il est composé de onze chapitres correspondants à ces sessions. Chaque chapitre se décline en trois sections. La première section reprend l'énoncé original du sujet. La deuxième section propose dans la foulée un corrigé du sujet. La troisième section, conclusion du chapitre, est dédiée à des notes et commentaires succincts sur l'énoncé ou le corrigé proposé.

Traditionnellement, les annales sont des outils mis à la disposition des apprenants pour la préparation aux épreuves des examens officiels des divers ordres d'enseignement. Le présent texte s'inscrit dans cette tradition didactique. En effet, il présente des corrigés détaillés, des notes informatives, des commentaires explicatifs, et un index thématique pour une lecture ciblée et un apprentissage méthodique.

En plus d'être des textes didactiques, les annales sont manifestement des documents d'archives. Cette dimension historique a été un moteur de la rédaction de ce livre, qui est le premier opus d'une collection visant la constitution d'archives pour le présent et la postérité.

Verviers, le 21 février 2021

Christian V. Nguembou Tagne

formalis-mathematica.net

Table des matières

Chapitre 1 Session 2009

1.1. Sujet 2009

Ce sujet est composé de trois exercices et d'un problème. Hormis les deux premiers exercices, tous s'adressent aux candidats des séries C et E. L'exercice 1 concerne uniquement la série E, tandis que l'exercice 2 est destiné exclusivement à la série C.

Exercice 1 (E) : Alignement – Points coplanaires – Calcul d'aire.

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(-4, 6, -1)$, $B(1, 2, 2)$ et $C(-1, 4, 3)$.

1.(a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

(b) Calculer l'aire du triangle ABC.

2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit I le milieu du segment $[AC]$, et $D = \mathcal{S}_I(B)$, où $\mathcal{S}_I$ désigne la symétrie de centre I.

(a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

(b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et puis calculer son aire.

Exercice 2 (C) : Somme des diviseurs et carré parfait.

Soit S la somme des diviseurs positifs de p^4, où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p.

2. Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$, où n est un entier naturel.

- **(a)** Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question **2.**)
- **(b)** Exprimer n en fonction de p.
- **(c)** Établir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. (On utilisera le fait que $4S = 4n^2$.)
- **(d)** Déduire de **(c)** la valeur de p, puis celle de n.

Exercice 3 : Lancer d'un dé pipé.

Un dé cubique pipé a les caractéristiques suivantes : Deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4 ; et une face est marquée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i.

1. Calculer les nombres p_2, p_4 et p_6.

2. On suppose dans la suite que

$$p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_4 = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad p_6 = \frac{1}{2}.$$

On lance deux fois de suite le dé précédent, puis note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui, au couple (i, j), associe le nombre $i - j$.

- **(a)** Déterminer l'univers-image de X.
- **(b)** Déterminer la loi de probabilité de X.

Problème : Fonctions – Applications affines - Plan complexe.

Le problème comprend trois parties **A**, **B** et **C** obligatoires. La partie **C** est indépendante.

Partie A.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1.(a) Calculer la dérivée f' de f, et dresser le tableau de variation de f.

(b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}_0$ en O.

(c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2.(a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

(b) Soit g la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative. Montrer que

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

pour tout $x \in I$.

3. Construire dans le même graphique les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées.)

4. Une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie, pour tout entier naturel n strictement positif, par

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)dx.$$

(a) En utilisant l'intégarion par parties, montrer que

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}.$$

(b) Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B.

5. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. On pose $\varphi = \tau \circ \sigma$.
   (a) Donner la nature de l'application φ.
   (b) Construire l'image par φ de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
6. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, puis la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$, ainsi que σ' la symétrie orthogonale d'axe (Δ').
   (a) Vérifier que le triplet $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme un repère orthogonal du plan.
   (b) Montrer que, dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, où $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{e_1}$ et à $\overrightarrow{e_2}$ que l'on précisera.
   (c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ'). Montrer que $\overrightarrow{V_2} = 2 \cdot \overrightarrow{HH'}$. En déduire que $\tau = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$, où τ_1 est une translation dont on donnera le vecteur.
   (d) Montrer que $\varphi = \tau_1 \circ \sigma'$.

Partie C.

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan ont pour affixes respectives z et $1 - i$.

1. Exprimer, en fonction de z, la distance de M à la droite $(\mathcal{D})$.
2. On suppose que $z + \overline{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation suivante :
$$\left|z - 1 + i\right| - m \cdot \left|\overline{z} + z - 4\right| = 0.$$
   (a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m).
   (b) Donner les éléments caractéristiques de (Γ_1).

1.2. Corrigé 2009

Solution de l'Exercice 1 (E).

1.

(a) Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés. À cet effet, notons que

$$\overrightarrow{AB} = \big(1-(-4)\big)\overrightarrow{i} + \big(2-6\big)\overrightarrow{j} + \big(2-(-1)\big)\overrightarrow{k} = 5\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = \big(-1-(-4)\big)\overrightarrow{i} + \big(4-6\big)\overrightarrow{j} + \big(3-(-1)\big)\overrightarrow{k} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k} \\ &= -10\overrightarrow{i} - 11\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

De ce fait, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

(b) Soit $\mathfrak{a}$ l'aire du triangle ABC. Alors,

$$\mathfrak{a} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\left\|-10\overrightarrow{i} - 11\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-11)^2 + 2^2}}{2}.$$

Donc,

$$\mathfrak{a} = \frac{\sqrt{100+121+4}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{\sqrt{15^2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

2.

Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC). Donc, $-10x - 11y + 2z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$, est une équation de (ABC). Ainsi,

$$\begin{aligned}0 = -10x_A - 11y_A + 2z_A + d &= (-10 \times -4) - (11 \times 6) + 2 \times (-1) + d \\ &= -28 + d.\end{aligned}$$

D'où $d = 28$. Par conséquent, une équation du plan (ABC) est

$$10x + 11y - 2z - 28 = 0.$$

3.

Soit $\mathcal{S}_I$ la symétrie de centre I.

(a) Nous avons $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, car I le milieu du segment $[AC]$. Du reste, $D = \mathcal{S}_I(B)$. Ceci induit $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$. D'où

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI},$$

puis $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ceci montre que le point D appartient au plan (ABC). Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

(b) Eu égard à la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB},$$

et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme. Son aire vaut

$$\mathfrak{a}' = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right\|.$$

Ceci signifie que

$$\mathfrak{a}' = \left\|\left(-\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 2\mathfrak{a},$$

où $\mathfrak{a}$ est l'aire du triangle ABC. De ce fait, $\mathfrak{a}' = 15$.

Solution de l'Exercice 2 (C).

Soit S la somme des diviseurs positifs de p^4, où p est un nombre premier plus grand que 2.

1.

Pour exprimer S en fonction de p, il convient de noter que l'ensemble des diviseurs positifs de p^4 est

$$\left\{p^0, p^1, p^2, p^3, p^4\right\} = \left\{1, p, p^2, p^3, p^4\right\}.$$

Par conséquent,

$$S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = \frac{1 - p^5}{1 - p}.$$

2.

L'une des identités remarquables du second degré livre

$$(2p^2 + p)^2 = (2p^2)^2 + 2 \cdot 2p^2 p + p^2 = 4p^4 + 4p^3 + p^2.$$

Or, $p^2 < 4p^2 < 4p^2 + 4p + 4$. De ce fait,

$$4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 4S.$$

Autrement dit, $(2p^2 + p)^2 < 4S$. De plus,

$$(2p^2 + p + 2)^2 = (2p^2 + p)^2 + 4(2p^2 + p) + 2^2 = 4p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 4p + 4.$$

D'où

$$(2p^2 + p + 2)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 + +5p^2 = 4S + 5p^2 > 4S.$$

Tout compte fait, nous avons $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

3.

Supposons que S est un carré parfait et posons $S = n^2$, où n est un entier naturel.

(a) Soit p un nombre premier supérieur à 2. S'il existe un entier naturel n tel que $S = n^2$, l'inégalité $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$, établie à la question **(2)** précédente, induit

$$(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2,$$

c'est-à-dire

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2.$$

Or, il existe un unique entier naturel x tel que $2p^2 + p < x < 2p^2 + p + 2$: notamment $x = 2p^2 + p + 1$. Par conséquent, $2n = 2p^2 + p + 1$. Cependant, p est impair, car 2 est le seul nombre entier premier pair. Donc, les entiers $p + 1$ et $2p^2 + p + 1$ sont impairs. Ceci prouve l'existence et l'unicité de n.

(b) L'égalité $2n = 2p^2 + p + 1$ entraîne de manière triviale

$$n = p^2 + \frac{p+1}{2}.$$

(c) Par définition, $4S - 4n^2 = 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 4n^2 = (2n)^2 = (2p^2+p+1)^2 &= (2p^2)^2 + 4p^2(p+1) + (p+1)^2 \\ &= 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 \\ &= (4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4) + p^2 - 2p - 3 \\ &= 4S + p^2 - 2p - 3. \end{aligned}$$

Autrement dit, $4S - 4n^2 = 3 + 2p - p^2$. Par conséquent, $3 + 2p - p^2 = 0$.

(d) D'après la question **(c)** précédente, p est une solution de l'équation du second degré à une inconnue $x^2 - 2x - 3 = 0$. Cette dernière a pour discriminant réduit $\Delta' = (-1)^2 - 1 \times (-3) = 4 = 2^2$, et admet deux solutions distinctes

$$x_1 = 1 - \sqrt{2^2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2^2} = 3.$$

De ce fait,

$$p = 3 \qquad \text{et} \qquad n = 3^2 + \frac{3+1}{2} = 9 + 2 = 11.$$

Solution de l'Exercice 3.

Un dé cubique pipé a les caractéristiques suivantes : deux faces sont marquées 2, trois faces portent le nombre 4, et une face est numérotée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i.

1.

Selon l'hypothèse, nous avons

$$\frac{p_2}{2} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_6}{6},$$

c'est-à-dire $p_4 = 2p_2$ et $p_6 = 3p_2$. Au demeurant,

$$p_2 + p_4 + p_6 = 1.$$

D'où $p_2 + 2p_2 + 3p_3 = 1$. Ceci signifie que $6p_2 = 1$. Ainsi,

$$p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_4 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad p_6 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2.

Dans la suite, nous supposons que

$$p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_4 = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad p_6 = \frac{1}{2}.$$

On lance deux fois de suite le dé précédent, puis note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. Soit X la variable aléatoire qui, au couple (i, j), associe le nombre $i - j$.

(a) Soit Ω l'univers de l'espace aléatoire décrit ci-dessus. Alors,

$$\Omega = \{2, 4, 6\}^2$$

et la variable aléatoire X est donnée par

$$X : \Omega \to \mathbb{Z}, \ \ (i, j) \mapsto i - j.$$

Son univers-image $X(\Omega)$ est lisible dans le tableau 1.1 ci-dessous, qui indique les diverses valeurs de $i-j$ lorsque le couple (i, j) parcourt le produit cartésien $\{2, 4, 6\}^2$. Précisément,

$$X(\Omega) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}.$$

Tableau 1.1 – Univers-image de la variable aléatoire X

i \ j	2	4	6
2	0	-2	-4
4	2	0	-2
6	4	2	0

(b) Le tableau 1.1 ci-dessus nous montre que $X = -4$ si et seulement si $(i, j) = (2, 6)$. Donc,

$$\mathbb{P}(X = -4) = \mathbb{P}\big((i, j) = (2, 6)\big) = \mathbb{P}(i = 2 \ \wedge \ j = 6).$$

Toutefois, les résultats des deux lancers sont indépendants. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(i = 2 \ \wedge \ j = 6) = \mathbb{P}(i = 2) \times \mathbb{P}(j = 6) = p_2 p_6 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}.$$

De ce fait,

$$\mathbb{P}(X = -4) = \frac{1}{12}.$$

Dans le même esprit,

$$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}\Big((i, j) \in \big\{(2, 4), (4, 6)\big\}\Big) = p_2 p_4 + p_4 p_6 = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}\Big((i, j) \in \big\{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\big\}\Big) = p_2^2 + p_4^2 + p_6^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{7}{18},$$

puis

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}\Big((i, j) \in \big\{(4, 2), (6, 4)\big\}\Big) = p_4 p_2 + p_6 p_4 = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}\Big((i, j) = (6, 2)\Big) = p_6 p_2 = \frac{1}{12}.$$

Cette loi de probabilité de X est récapitulée dans le tableau 1.2 ci-dessous.

Tableau 1.2 – Loi de probabilité de la variable aléatoire X

a	-4	-2	0	2	4
$\mathbb{P}(X = a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

Solution du Problème.

Partie A.

Soit f la fonction numérique, de variable x, définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

1.

(a) La fonction f peut être regardée comme étant un quotient dont le numérateur, comme le dénominateur, est la somme de l'exponentielle et d'une constante. Du reste, le dénominateur est strictement positif pour chaque réel x. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1) - (e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} &= \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2 + e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{a \to 0^+} \frac{a-1}{a+1} = -1$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{a \to +\infty} \frac{a-1}{a+1} = 1.$$

Ces informations conduisent au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+1$

(b) La dérivée de f est elle-même dérivable, en tant que quotient de fonctions dérivables. De plus,

$$f''(x) = \frac{(2e^x)'(e^x+1)^2 - 2e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x(e^x+1)^2 - 4(e^x)^2(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

et

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x(1+e^x)(1-e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x(1-e^{2x})}{(e^x+1)^4}$$

pour chaque réel x. Cependant, $e^{2x} < 1$ pour tout $x < 0$ et $e^{2x} > 1$ pour chaque $x > 0$, tandis que $e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$. Autrement dit, $1 - e^{2x} > 0$ pour tout $x < 0$, puis $1 - e^{2x} < 0$ pour chaque $x > 0$, et $1 - e^{2x} = 0$ si $x = 0$. Puisque $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ pour tout réel x, il en résulte que la dérivée seconde de f est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, strictement négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et qu'elle s'annule en 0. Par conséquent, la tangente $\mathcal{T}_O$ de $(\mathcal{C}_f)$ en O est au dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Elle est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Nous avons en outre

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \frac{2e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De ce fait, la tangente $\mathcal{T}_O$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x$. L'égalité $f(0) = 0$ montre bien que $O(0,0)$, l'origine du repère, appartient à $(\mathcal{C}_f)$.

(c) La dérivée seconde de f s'annule en 0 tout en changeant de signe. par conséquent, le point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = 0$, c'est-à-dire l'origine O du repère, est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2.

(a) La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de ce fait une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ vers l'intervalle

$$I = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]-1, 1[.$$

(b) Soit g la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative. Si $x \in]-1, 1[$ et $g(x) = y$. Alors,

$$x = f(y) = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}.$$

D'où $x(e^y + 1) = e^y - 1$, c'est-à-dire $xe^y + x = e^y - 1$ ou $1 + x = e^y(1 - x)$. Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, l'égalité $g(x) = y$ entraîne $e^y = \frac{1+x}{1-x}$, puis $y = \ln e^y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Du reste, la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est définie si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$, c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$. La bijection réciproque g de f est de ce fait donnée par

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet exactement deux branches infinies : l'une en $-\infty$ et l'autre en $+\infty$. Précisément, les droites d'équations respectives

$$y = -1 \qquad \text{et} \qquad y = 1$$

sont asymptotes horizontales à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$, car

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Au demeurant, $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$, puisque g est la bijection réciproque de f. Les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont représentées sur le schéma 1.1 ci-dessous à l'échelle $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2\,\text{cm}$. La première, $(\mathcal{C}_f)$, est dessinée d'un trait continue, tandis que la seconde, $(\mathcal{C}_g)$, est tracée d'un trait interrompu.

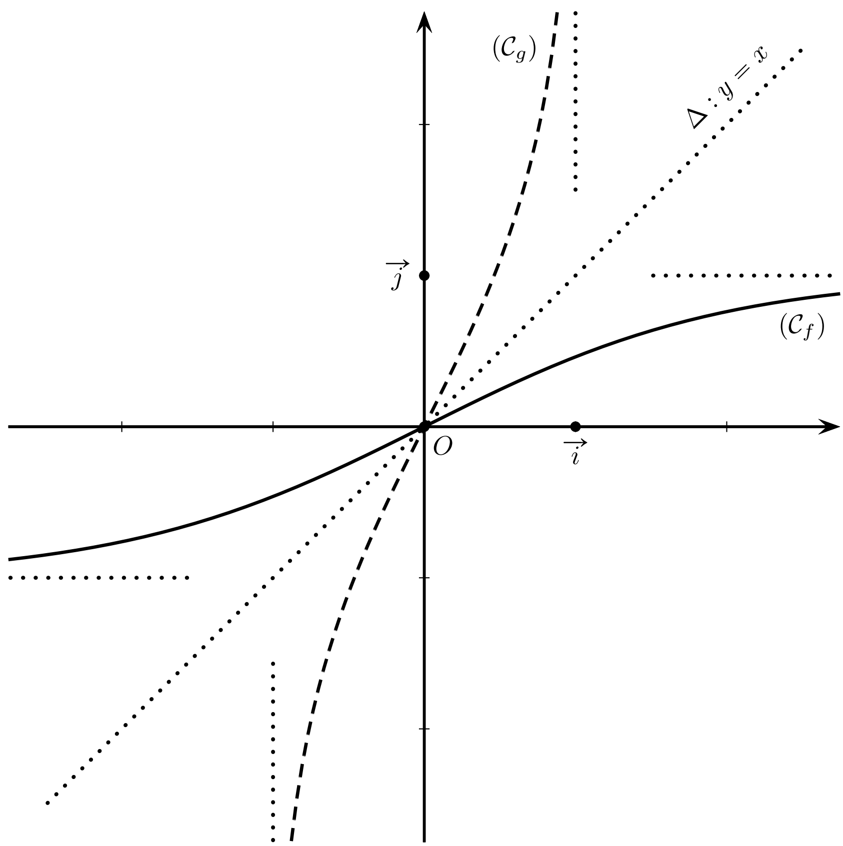


Schéma 1.1 – Représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$ **et** $(\mathcal{C}_g)$

4.

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)dx$$

pour tout entier naturel n strictement positif.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$. Nous posons

$$u(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x.$$

Alors, $v'(x) = 1$ et

$$u'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Du reste,

$$0 \leqslant \frac{n-1}{n} < 1 \qquad \text{et} \qquad U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} u(x)v'(x)dx.$$

Eu égard à la règle d'intégration par parties, il en résulte que

$$\begin{aligned}
U_n &= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\frac{n-1}{n}} - \int_0^{\frac{n-1}{n}} u'(x)v(x)dx \\
&= \Big[x\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)\Big]_0^{\frac{n-1}{n}} - \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{2x}{1-x^2}dx \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right) + \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \Big[\ln|x^2-1|\Big]_0^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \ln n\right) + \ln\left|\frac{(n-1)^2}{n^2} - 1\right| \\
&= \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\ln n + \ln\left|\frac{-2n+1}{n^2}\right| \\
&= \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\ln n + \ln\left(\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\ln n + \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}\ln n + \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \ln n\\
&= \left(\frac{n-1}{n}+1\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}-1\right)\ln n\\
&= \left(\frac{n-1+n}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1-n}{n}\right)\ln n.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}.$$

(b) Soit $p = \frac{2n-1}{n}$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} p = 2$. Du reste,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0.$$

De ce fait,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} U_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}\right)\\
&= \lim_{p\to2} p\ln p - \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}.
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2\ln 2 - 0 = 2\ln 2.$$

Cette limite correspond à l'aire de la section du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, l'axe de abscisses et la droite d'équation $x = 1$ (voir la partie grisée du schéma 1.2 à la page 18). En effet,

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{n-1}{n}} g(x)dx$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 g(x)dx,$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = 1$.

Partie B.

5.

Soit σ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. De plus, nous posons $\varphi = \tau \circ \sigma$.

(a) L'application est un anti-déplacement, en tant que composée d'un déplacement (la translation τ) par un anti-déplacement (la symétrie orthogonale σ). Il s'agit précisément d'une symétrie glissée.

(b) La courbe $(\mathcal{C}_g)$ est notoirement l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par σ. Par conséquent, l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par φ est l'image de $(\mathcal{C}_g)$ par la translation τ de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Autrement dit,

$$\varphi(\mathcal{C}_f) = \tau \circ \sigma(\mathcal{C}_f) = \tau\Big(\sigma(\mathcal{C}_f)\Big) = \tau(\mathcal{C}_g)$$

(voir le schéma 1.2 ci-dessous).

6.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, puis la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$, ainsi que σ' la symétrie orthogonale d'axe (Δ').

(a) Pour vérifier que le triplet $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthogonal, il suffit d'établir que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre et que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux. Ces derniers sont exprimés dans la base orthonormé $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Il suffit donc d'utiliser le déterminant et le produit scalaire. En l'espèce la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre, car

$$\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0;$$

tandis que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux, puisque

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

(b) La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ étant une base du plan vectoriel, il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$, c'est-à-dire

$$3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = \alpha\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) + \beta\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{i} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{j}.$$

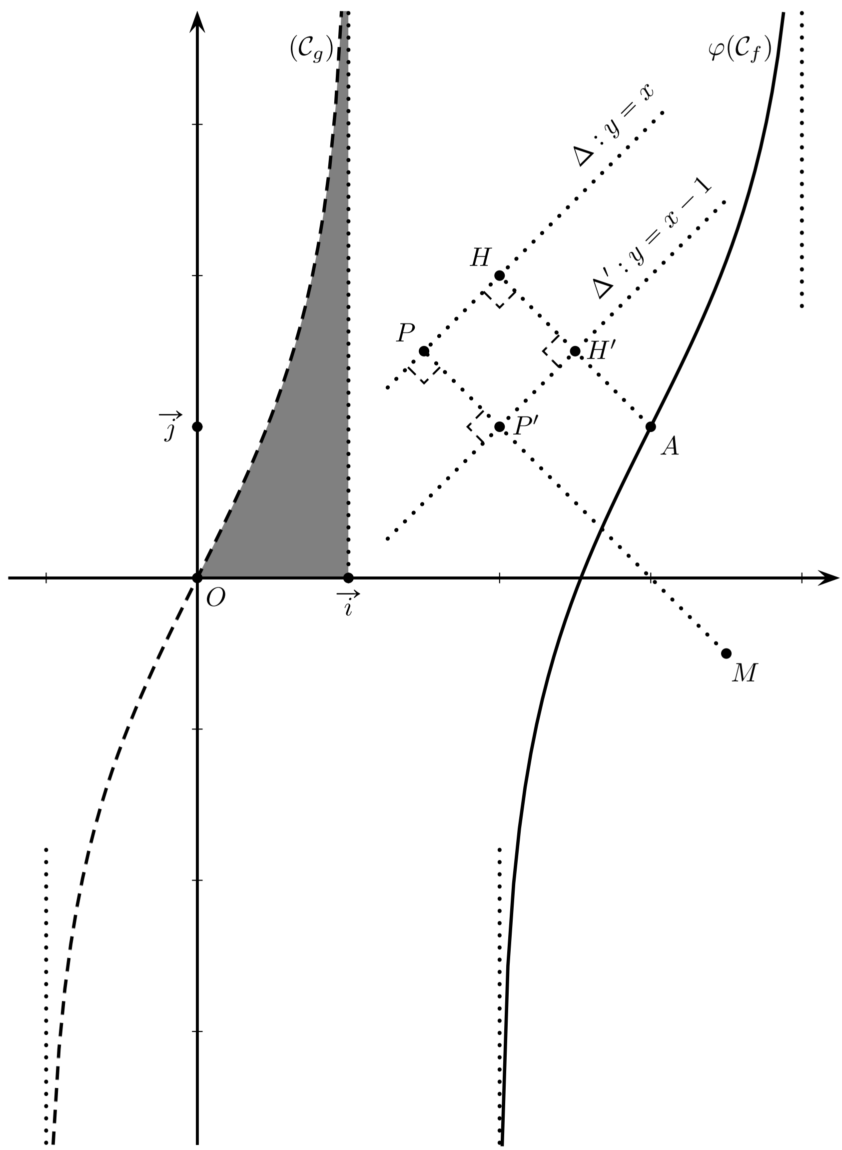


Schéma 1.2 – Image de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie glissée φ

Il en résulte que le couple (α, β) est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-1}{-1-1} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-3}{-1-1} = 1.$$

De ce fait, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, où $\overrightarrow{V_1} = 2\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{e_2}$.

(c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) d'équation $y = x$ et sur (Δ') d'équation $y = x - 1$. Alors, il existe des réels h et h' tels que

$$\overrightarrow{OH} = h\,\overrightarrow{i} + h\,\overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OH'} = h'\,\overrightarrow{i} + (h'-1)\,\overrightarrow{j}.$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (h-3)\,\overrightarrow{i} + (h-1)\,\overrightarrow{j}$$

et

$$\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA} = (h'-3)\,\overrightarrow{i} + (h'-2)\,\overrightarrow{j}.$$

Au demeurant, les droites (Δ) et (Δ') ont $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ pour vecteur directeur. Puisque

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{e_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{e_1} = 0,$$

il en résulte que

$$0 = h - 3 + h - 1 = 2h - 4 \qquad \text{et} \qquad 0 = h' - 3 + h' - 2 = 2h' - 5,$$

puis $h = 2$ et $h' = \frac{5}{2}$. D'où

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AH'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

De ce fait,

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AH'} - \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_2}.$$

En d'autres termes, $\overrightarrow{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$.

Posons maintenant $\gamma = \sigma' \circ \sigma$ et considérons un point M, son image M_1 par σ, ainsi que M' l'image de M_1 par σ'. Par conséquent,

$$\gamma(M) = (\sigma' \circ \sigma)(M) = \sigma'\big(\sigma(M)\big) = \sigma'(M_1) = M'.$$

Par ailleurs, soient P et P' les projetés orthogonaux de M sur les droites (Δ) et (Δ'), respectivement (voir le schéma 1.2 à la page 18). Alors, P et P' sont les milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$. Donc,

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{PM_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1P'}.$$

Ceci entraîne

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{PM_1} + 2\overrightarrow{M_1P'} = 2\left(\overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{M_1P'}\right) = 2\overrightarrow{PP'}.$$

Cependant,

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}.$$

De ce fait, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{e_2}$. Ainsi, γ est la translation de vecteur $\overrightarrow{e_2}$. Par ailleurs,

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} = 2\overrightarrow{e_1}.$$

À présent, notons τ_1 la translation de vecteur $2\overrightarrow{e_1}$. Alors, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma = \tau_1 \circ \gamma$ est la composition des translations des vecteurs respectifs $2\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. Par suite, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$ est la translation de vecteur

$$2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OA}.$$

Autrement dit, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma = \tau$, où τ_1 est la translation de vecteur $2\overrightarrow{e_1}$.

(d) De l'égalité $\tau = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$, nous déduisons

$$\varphi = \tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma \circ \sigma.$$

Or toute symétrie orthogonale est involutive. Ceci signifie que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité du plan. Par conséquent, $\varphi = \tau_1 \circ \sigma'$.

Partie C.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $x = 2$. Nous considérons par ailleurs les points M et F du plan ayant pour affixes respectives z et $1 - i$.

1.

Il existe de réels x et y tels que $z = x + iy$. Du reste, si z' désigne l'affixe du projeté orthogonal M' du point M sur la droite $(\mathcal{D})$. Alors, $z' = 2 + iy$. Or, la distance $d\big(M, (\mathcal{D})\big)$ du point M à la droite $(\mathcal{D})$ est déterminée par

$$d\big(M, (\mathcal{D})\big) = MM' = |z - z'| = |x + iy - 2 - iy| = |x - 2|.$$

Cependant, $x = \Re e(z)$, où $\Re e(z)$ désigne la partie réelle de z. Par conséquent,

$$d\big(M, (\mathcal{D})\big) = |\Re e(z) - 2|.$$

2.

On suppose que $z + \overline{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation suivante :

$$\big|z - 1 + i\big| - m \cdot \big|\overline{z} + z - 4\big| = 0. \qquad (\mathbf{E}_m)$$

(a) Notons que $|z - 1 + i| = FM$ et

$$|\overline{z} + z - 4| = |2\Re e(z) - 4| = 2\,|\Re e(z) - 2| = 2 \cdot d\big(M, (\mathcal{D})\big).$$

De ce fait, l'équation $(\mathbf{E}_m)$ est équivalent à

$$FM - 2m \cdot d\big(M, (\mathcal{D})\big) = 0.$$

Ainsi, un point M appartient à (Γ_m) si et seulement si

$$\frac{FM}{d\big(M, (\mathcal{D})\big)} = 2m.$$

L'ensemble (Γ_m) est donc une conique. Précisément, (Γ_m) est une ellipse si $0 < m < \frac{1}{2}$, puis (Γ_m) est une parabole si $m = \frac{1}{2}$, tandis que (Γ_m) est une hyperbole si $m > \frac{1}{2}$.