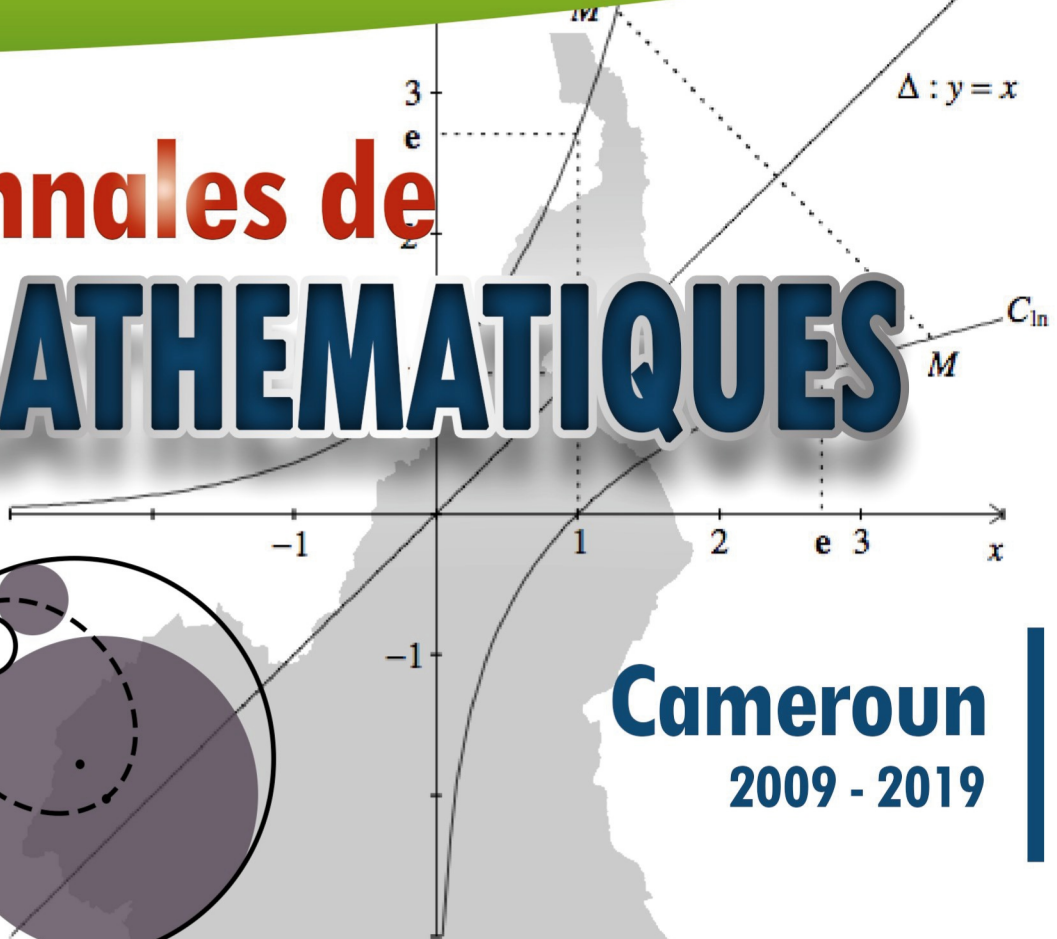
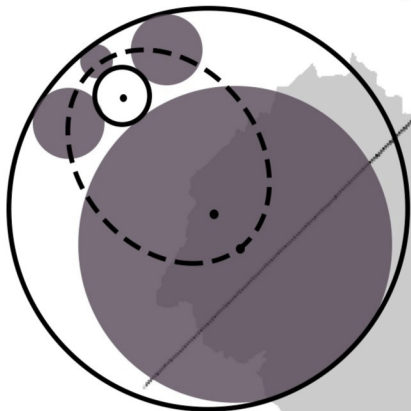


Sujets et
Corrigés

Baccalauréat

C | E

Annales de
MATHEMATIQUES



Cameroun
2009 - 2019

4

Christian V. NGUEMBOU TAGNE

2^{ème} édition

Annales de Mathématiques
Baccalauréat C et E
Cameroun
2009 – 2019

Annales de Mathématiques
Baccalauréat C et E
Cameroun
2009 – 2019

Sujets et Corrigés

Christian V. Nguembou Tagne

BoD - Books on Demand

© 2021, Christian Valéry Nguembou Tagne

« Cette œuvre est protégée par le droit d’auteur et strictement réservée à l’usage privé du client. Toute reproduction ou diffusion au profit de tiers, à titre gratuit ou onéreux, de tout ou partie de cette œuvre, est strictement interdite et constitue une contrefaçon prévue par les articles L 335-2 et suivants du Code de la Propriété Intellectuelle. L’auteur se réserve le droit de poursuivre toute atteinte à ses droits de propriété intellectuelle devant les juridictions civiles ou pénales. »

Éditeur : BoD - [Books on Demand](#),
12/14 rond-point des Champs Élysés, 75008 Paris
Impression : BoD - [Books on Demand](#), Allemagne

ISBN : 978-2-322-22574-3

(Première édition, novembre 2019)

Dépôt légal : février 2021

À la mémoire de
PAULINE TCHUENGUEM
(1906 – 2011)

Avant-propos

Conformément à son titre, cet ouvrage est une chronique de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat C et E du Cameroun, pour les onze sessions de 2009 à 2019. Il est composé de onze chapitres correspondants à ces sessions. Chaque chapitre se décline en trois sections. La première section reprend l'énoncé original du sujet. La deuxième section propose dans la foulée un corrigé du sujet. La troisième section, conclusion du chapitre, est dédiée à des notes et commentaires succincts sur l'énoncé ou le corrigé proposé.

Traditionnellement, les annales sont des outils mis à la disposition des apprenants pour la préparation aux épreuves des examens officiels des divers ordres d'enseignement. Le présent texte s'inscrit dans cette tradition didactique. En effet, il présente des corrigés détaillés, des notes informatives, des commentaires explicatifs, et un index thématique pour une lecture ciblée et un apprentissage méthodique.

En plus d'être des textes didactiques, les annales sont manifestement des documents d'archives. Cette dimension historique a été un moteur de la rédaction de ce livre, qui est le premier opus d'une collection visant la constitution d'archives pour le présent et la postérité.

Verviers, le 21 février 2021

Christian V. Nguembou Tagne

formalis-mathematica.net

Table des matières

Avant-propos	vii
1. Session 2009	1
1.1. Sujet 2009	1
Exercice 1 (E) : Alignement – Points coplanaires – Calcul d’aire.....	1
Exercice 2 (C) : Somme des diviseurs et carré parfait.....	2
Exercice 3 : Lancer d’un dé pipé.	2
Problème : Fonctions – Applications affines - Plan complexe.....	2
1.2. Corrigé 2009	5
1.3. Notes et commentaires sur le sujet 2009.....	22
Théorème de la bijection.....	23
Points d’inflexion.	23
2. Session 2010	25
2.1. Sujet 2010	25
Exercice 1 : Racines d’un polynôme complexe et similitude plane.....	25
Exercice 2 : Conique et application affine.	26
Exercice 3 : Tétraèdre régulier – Endomorphisme de l’espace vectoriel.	26
Problème : Équations différentielles – Fonctions – Suites réelles.	27

2.2.	Corrigé 2010.....	29
2.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2010.....	50
	Corollaire du théorème de l'angle au centre.....	50
	Bijektivité, noyau et image d'un endomorphisme.....	51
3.	Session 2011.....	53
3.1.	Sujet 2011.....	53
	Exercice 1 : Suites réelles définies par des intégrales.....	53
	Exercice 2 : Plan, sphère et projection plane dans l'espace.....	54
	Exercice 3 : Rotations dans le plan complexe.....	54
	Problème : Étude d'une famille de fonctions – Suite réelle.....	55
3.2.	Corrigé 2011.....	56
3.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2011.....	77
	Distance d'un point à un plan.....	77
	Intersection d'un plan et d'une sphère.....	80
	Théorème de l'angle au centre.....	81
4.	Session 2012.....	89
4.1.	Sujet 2012.....	89
	Exercice 1 (E) : Bijection, réciproque et calcul intégral.....	89
	Exercice 2 (C) : Congruences et coordonnées entières d'une parabole.....	90
	Exercice 3 : Racines d'un polynôme complexe et triangle.....	90
	Problème : Fonctions – Suites réelles – Rotation et conique.....	91
4.2.	Corrigé 2012.....	93
4.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2012.....	110
	Caractérisation des triangles isocèles.....	110
	Image d'un repère cartésien par une application affine.....	110
5.	Session 2013.....	111
5.1.	Sujet 2013.....	111
	Exercice 1 (C) : Numération et division euclidienne.....	111
	Exercice 2 (E) : Minoration d'une fonction définie par une intégrale.....	112

Exercice 3 : Barycentre et lieux géométriques dans l'espace.	112
Exercice 4 : Racines complexes et mesures d'angles vectorielles.	113
Problème : Fonctions, calcul d'aire et suites réelles.	113
5.2. Corrigé 2013.	115
5.3. Notes et commentaires sur le sujet 2013.	134
Construction d'un parallélogramme.	135
Construction de la médiatrice et du milieu d'un segment.	136
6. Session 2014.	139
6.1. Sujet 2014.	139
Exercice 1 : Volume d'un tétraèdre – Sphère et réflexion.	139
Exercice 2 : Équations différentielles – Étude d'une fonction.	140
Exercice 3 : Encadrement et convergence d'une suite réelle.	140
Problème : Inversion dans un cercle – Application non-linéaire.	141
6.2. Corrigé 2014.	143
6.3. Notes et commentaires sur le sujet 2014.	161
Inversion dans un cercle.	161
7. Session 2015.	165
7.1. Sujet 2015.	165
Exercice 1 : Résolution d'un système d'équations non-linéaire.	165
Exercice 2 : Suites adjacentes – Dérivée d'une fonction.	167
Exercice 3 : Endomorphismes du plan vectoriel et probabilités.	167
Problème : Racines cubiques d'un complexe – Aire d'une section.	168
7.2. Corrigé 2015.	170
7.3. Notes et commentaires sur le sujet 2015.	194
8. Session 2016.	195
8.1. Sujet 2016.	195
Exercice 1 : Tirage aléatoire de jetons et nombres complexes.	195
Exercice 2 : Surfaces dans l'espace – Volume d'un tétraèdre.	196
Problème : Isométries laissant invariante une partie du plan.	197

8.2.	Corrigé 2016.....	199
8.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2016.....	225
	Sur la formulation de la Section III de l'Exercice 2.....	225
	Invariance locale et invariance globale.....	226
9.	Session 2017.....	227
9.1.	Sujet 2017.....	227
	Exercice 1 : Arithmétique – Tirage aléatoire de boules numérotées.....	227
	Exercice 2 : Endomorphisme de l'espace vectoriel.....	228
	Exercice 3 : Isométries affines et lieux géométriques du plan.....	229
	Problème : Géométrie de l'espace – Étude de fonctions.....	229
9.2.	Corrigé 2017.....	232
9.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2017.....	258
	Équations diophantiennes.....	258
	Endomorphismes, changement de bases et matrices de passage.....	259
10.	Session 2018.....	263
10.1.	Sujet 2018.....	263
	Exercice 1 (C) : Équation diophantienne et droite dans le plan.....	263
	Exercice 2 (E) : Test de recrutement et calcul de probabilités.....	264
	Exercice 3 : Calcul du volume d'un tétraèdre.....	264
	Problème : Lignes de niveau – Fonctions et calcul d'aire.....	265
10.2.	Corrigé 2018.....	267
10.3.	Notes et commentaires sur le sujet 2018.....	287
	Volume d'un tétraèdre et distance d'un point à un plan.....	287
11.	Session 2019.....	289
11.1.	Sujet 2019.....	289
	Exercice 1 : Plans et réflexion de l'espace euclidien.....	289
	Exercice 2 : Nombres complexes, cercles et conique.....	290
	Exercice 3 : Probabilités et suites numériques.....	291
	Problème : Équations différentielles – Étude de fonctions.....	291

11.2. Corrigé 2019.....	293
11.3. Notes et commentaires sur le sujet 2019.....	313
Cercles tangents.....	313
Index thématique	317
Liste des tableaux.....	329
Liste des schémas	331
Bibliographie	333
Index	335

Chapitre 1

Session 2009

1.1. Sujet 2009

Ce sujet est composé de trois exercices et d'un problème. Hormis les deux premiers exercices, tous s'adressent aux candidats des séries C et E. L'exercice 1 concerne uniquement la série E, tandis que l'exercice 2 est destiné exclusivement à la série C.

Exercice 1 (E) : Alignement – Points coplanaires – Calcul d'aire.

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-4, 6, -1)$, $B(1, 2, 2)$ et $C(-1, 4, 3)$.

1. (a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
(b) Calculer l'aire du triangle ABC .
2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Soit I le milieu du segment $[AC]$, et $D = \mathcal{S}_I(B)$, où \mathcal{S}_I désigne la symétrie de centre I .
 - (a) Démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.
 - (b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et puis calculer son aire.

Exercice 2 (C) : Somme des diviseurs et carré parfait.

Soit S la somme des diviseurs positifs de p^4 , où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p .
2. Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$, où n est un entier naturel.
 - (a) Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2.)
 - (b) Exprimer n en fonction de p .
 - (c) Établir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. (On utilisera le fait que $4S = 4n^2$.)
 - (d) Déduire de (c) la valeur de p , puis celle de n .

Exercice 3 : Lancer d'un dé pipé.

Un dé cubique pipé a les caractéristiques suivantes : Deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4 ; et une face est marquée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i .

1. Calculer les nombres p_2 , p_4 et p_6 .
2. On suppose dans la suite que

$$p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_4 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_6 = \frac{1}{2}.$$

On lance deux fois de suite le dé précédent, puis note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui, au couple (i, j) , associe le nombre $i - j$.

- (a) Déterminer l'univers-image de X .
- (b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Problème : Fonctions – Applications affines - Plan complexe.

Le problème comprend trois parties **A**, **B** et **C** obligatoires. La partie **C** est indépendante.

Partie A.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f , et dresser le tableau de variation de f .
- (b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à sa tangente \mathcal{T}_0 en O .
- (c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (\mathcal{C}_f) .
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle I de \mathbb{R} que l'on précisera.
- (b) Soit g la bijection réciproque de f et (\mathcal{C}_g) sa courbe représentative. Montrer que

$$g(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

pour tout $x \in I$.

3. Construire dans le même graphique les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) . (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées.)
4. Une suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie, pour tout entier naturel n strictement positif, par

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) dx.$$

- (a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n} \right) \ln \left(\frac{2n-1}{n} \right) - \frac{\ln n}{n}.$$

- (b) Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B.

5. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. On pose $\varphi = \tau \circ \sigma$.
- (a) Donner la nature de l'application φ .
 - (b) Construire l'image par φ de la courbe (C_f) .
6. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$, puis la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$, ainsi que σ' la symétrie orthogonale d'axe (Δ') .
- (a) Vérifier que le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme un repère orthogonal du plan.
 - (b) Montrer que, dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , le vecteur \overrightarrow{OA} se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, où \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont des vecteurs colinéaires à \vec{e}_1 et à \vec{e}_2 que l'on précisera.
 - (c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ') . Montrer que $\vec{V}_2 = 2 \cdot \overrightarrow{HH'}$. En déduire que $\tau = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$, où τ_1 est une translation dont on donnera le vecteur.
 - (d) Montrer que $\varphi = \tau_1 \circ \sigma'$.

Partie C.

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (\mathcal{D}) la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan ont pour affixes respectives z et $1 - i$.

- 1. Exprimer, en fonction de z , la distance de M à la droite (\mathcal{D}) .
- 2. On suppose que $z + \bar{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation suivante :

$$|z - 1 + i| - m \cdot |\bar{z} + z - 4| = 0.$$

- (a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m) .
- (b) Donner les éléments caractéristiques de (Γ_1) .

1.2. Corrigé 2009

Solution de l'Exercice 1 (E).

1.

(a) Démontrons que les points A , B et C ne sont pas alignés. À cet effet, notons que

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-4))\vec{i} + (2 - 6)\vec{j} + (2 - (-1))\vec{k} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - (-4))\vec{i} + (4 - 6)\vec{j} + (3 - (-1))\vec{k} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\ &= -10\vec{i} - 11\vec{j} + 2\vec{k} \neq \vec{0}.\end{aligned}$$

De ce fait, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires. Les points A , B et C ne sont donc pas alignés.

(b) Soit a l'aire du triangle ABC . Alors,

$$a = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|-10\vec{i} - 11\vec{j} + 2\vec{k}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-11)^2 + 2^2}}{2}.$$

Donc,

$$a = \frac{\sqrt{100 + 121 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{\sqrt{15^2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

2.

Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC) . Donc, $-10x - 11y + 2z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$, est une équation de (ABC) . Ainsi,

$$\begin{aligned}0 &= -10x_A - 11y_A + 2z_A + d = (-10 \times -4) - (11 \times 6) + 2 \times (-1) + d \\ &= -28 + d.\end{aligned}$$

D'où $d = 28$. Par conséquent, une équation du plan (ABC) est

$$10x + 11y - 2z - 28 = 0.$$

3.

Soit S_I la symétrie de centre I .

(a) Nous avons $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, car I le milieu du segment $[AC]$. Du reste, $D = S_I(B)$. Ceci induit $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$. D'où

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI},$$

puis $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ceci montre que le point D appartient au plan (ABC) . Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

(b) Eu égard à la relation de CHASLES, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB},$$

et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme. Son aire vaut

$$\alpha' = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\|.$$

Ceci signifie que

$$\alpha' = \|(-\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 2\alpha,$$

où α est l'aire du triangle ABC . De ce fait, $\alpha' = 15$.

Solution de l'Exercice 2 (C).

Soit S la somme des diviseurs positifs de p^4 , où p est un nombre premier plus grand que 2.

1.

Pour exprimer S en fonction de p , il convient de noter que l'ensemble des diviseurs positifs de p^4 est

$$\{p^0, p^1, p^2, p^3, p^4\} = \{1, p, p^2, p^3, p^4\}.$$

Par conséquent,

$$S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = \frac{1 - p^5}{1 - p}.$$

2.

L'une des identités remarquables du second degré livre

$$(2p^2 + p)^2 = (2p^2)^2 + 2 \cdot 2p^2p + p^2 = 4p^4 + 4p^3 + p^2.$$

Or, $p^2 < 4p^2 < 4p^2 + 4p + 4$. De ce fait,

$$4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 4S.$$

Autrement dit, $(2p^2 + p)^2 < 4S$. De plus,

$$(2p^2 + p + 2)^2 = (2p^2 + p)^2 + 4(2p^2 + p) + 2^2 = 4p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 4p + 4.$$

D'où

$$(2p^2 + p + 2)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 + 5p^2 = 4S + 5p^2 > 4S.$$

Tout compte fait, nous avons $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$.

3.

Supposons que S est un carré parfait et posons $S = n^2$, où n est un entier naturel.

(a) Soit p un nombre premier supérieur à 2. S'il existe un entier naturel n tel que $S = n^2$, l'inégalité $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$, établie à la question (2) précédente, induit

$$(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2,$$

c'est-à-dire

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2.$$

Or, il existe un unique entier naturel x tel que $2p^2 + p < x < 2p^2 + p + 2$: notamment $x = 2p^2 + p + 1$. Par conséquent, $2n = 2p^2 + p + 1$. Cependant, p est impair, car 2 est le seul nombre entier premier pair. Donc, les entiers $p + 1$ et $2p^2 + p + 1$ sont impairs. Ceci prouve l'existence et l'unicité de n .

(b) L'égalité $2n = 2p^2 + p + 1$ entraîne de manière triviale

$$n = p^2 + \frac{p+1}{2}.$$

(c) Par définition, $4S - 4n^2 = 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 4n^2 &= (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2 = (2p^2)^2 + 4p^2(p+1) + (p+1)^2 \\ &= 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 \\ &= (4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4) + p^2 - 2p - 3 \\ &= 4S + p^2 - 2p - 3. \end{aligned}$$

Autrement dit, $4S - 4n^2 = 3 + 2p - p^2$. Par conséquent, $3 + 2p - p^2 = 0$.

(d) D'après la question (c) précédente, p est une solution de l'équation du second degré à une inconnue $x^2 - 2x - 3 = 0$. Cette dernière a pour discriminant réduit $\Delta' = (-1)^2 - 1 \times (-3) = 4 = 2^2$, et admet deux solutions distinctes

$$x_1 = 1 - \sqrt{2^2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2^2} = 3.$$

De ce fait,

$$p = 3 \quad \text{et} \quad n = 3^2 + \frac{3+1}{2} = 9 + 2 = 11.$$

Solution de l'Exercice 3.

Un dé cubique pipé a les caractéristiques suivantes : deux faces sont marquées 2, trois faces portent le nombre 4, et une face est numérotée 6. La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i .

1.

Selon l'hypothèse, nous avons

$$\frac{p_2}{2} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_6}{6},$$

c'est-à-dire $p_4 = 2p_2$ et $p_6 = 3p_2$. Au demeurant,

$$p_2 + p_4 + p_6 = 1.$$

D'où $p_2 + 2p_2 + 3p_3 = 1$. Ceci signifie que $6p_2 = 1$. Ainsi,

$$p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_4 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_6 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2.

Dans la suite, nous supposons que

$$p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_4 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_6 = \frac{1}{2}.$$

On lance deux fois de suite le dé précédent, puis note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. Soit X la variable aléatoire qui, au couple (i, j) , associe le nombre $i - j$.

(a) Soit Ω l'univers de l'espace aléatoire décrit ci-dessus. Alors,

$$\Omega = \{2, 4, 6\}^2$$

et la variable aléatoire X est donnée par

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (i, j) \mapsto i - j.$$

Son univers-image $X(\Omega)$ est lisible dans le tableau 1.1 ci-dessous, qui indique les diverses valeurs de $i - j$ lorsque le couple (i, j) parcourt le produit cartésien $\{2, 4, 6\}^2$. Précisément,

$$X(\Omega) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}.$$

Tableau 1.1 – Univers-image de la variable aléatoire X

$i \backslash j$	2	4	6
2	0	-2	-4
4	2	0	-2
6	4	2	0

(b) Le tableau 1.1 ci-dessus nous montre que $X = -4$ si et seulement si $(i, j) = (2, 6)$. Donc,

$$\mathbb{P}(X = -4) = \mathbb{P}((i, j) = (2, 6)) = \mathbb{P}(i = 2 \wedge j = 6).$$

Toutefois, les résultats des deux lancers sont indépendants. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(i = 2 \wedge j = 6) = \mathbb{P}(i = 2) \times \mathbb{P}(j = 6) = p_2 p_6 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}.$$

De ce fait,

$$\mathbb{P}(X = -4) = \frac{1}{12}.$$

Dans le même esprit,

$$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}((i, j) \in \{(2, 4), (4, 6)\}) = p_2 p_4 + p_4 p_6 = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((i, j) \in \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}) = p_2^2 + p_4^2 + p_6^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{7}{18},$$

puis

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((i, j) \in \{(4, 2), (6, 4)\}) = p_4 p_2 + p_6 p_4 = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}((i, j) = (6, 2)) = p_6 p_2 = \frac{1}{12}.$$

Cette loi de probabilité de X est récapitulée dans le tableau 1.2 ci-dessous.

Tableau 1.2 – Loi de probabilité de la variable aléatoire X

a	-4	-2	0	2	4
$\mathbb{P}(X = a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

Solution du Problème.

Partie A.

Soit f la fonction numérique, de variable x , définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1.

(a) La fonction f peut être regardée comme étant un quotient dont le numérateur, comme le dénominateur, est la somme de l'exponentielle et d'une constante. Du reste, le dénominateur est strictement positif pour chaque réel x . Par conséquent, f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2 + e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a - 1}{a + 1} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a - 1}{a + 1} = 1.$$

Ces informations conduisent au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	+1

(b) La dérivée de f est elle-même dérivable, en tant que quotient de fonctions dérivables. De plus,

$$f''(x) = \frac{(2e^x)'(e^x + 1)^2 - 2e^x[(e^x + 1)^2]'}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 4(e^x)^2(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$$

et

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x + 1)(e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x(1 + e^x)(1 - e^x)}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x(1 - e^{2x})}{(e^x + 1)^4}$$

pour chaque réel x . Cependant, $e^{2x} < 1$ pour tout $x < 0$ et $e^{2x} > 1$ pour chaque $x > 0$, tandis que $e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$. Autrement dit, $1 - e^{2x} > 0$ pour tout $x < 0$, puis $1 - e^{2x} < 0$ pour chaque $x > 0$, et $1 - e^{2x} = 0$ si $x = 0$. Puisque $\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ pour tout réel x , il en résulte que la dérivée seconde de f est strictement positive sur l'intervalle $] - \infty, 0[$, strictement négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et qu'elle s'annule en 0. Par conséquent, la tangente \mathcal{T}_O de (\mathcal{C}_f) en O est au dessus de (\mathcal{C}_f) sur l'intervalle $] - \infty, 0[$. Elle est en dessous de (\mathcal{C}_f) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Nous avons en outre

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De ce fait, la tangente \mathcal{T}_O a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x$. L'égalité $f(0) = 0$ montre bien que $O(0, 0)$, l'origine du repère, appartient à (\mathcal{C}_f) .

(c) La dérivée seconde de f s'annule en 0 tout en changeant de signe. par conséquent, le point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = 0$, c'est-à-dire l'origine O du repère, est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f) .

2.

(a) La fonction f est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} . Elle est de ce fait une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ vers l'intervalle

$$I = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-1, 1[.$$

(b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative. Si $x \in]-1, 1[$ et $g(x) = y$. Alors,

$$x = f(y) = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}.$$

D'où $x(e^y + 1) = e^y - 1$, c'est-à-dire $xe^y + x = e^y - 1$ ou $1 + x = e^y(1 - x)$. Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, l'égalité $g(x) = y$ entraîne $e^y = \frac{1+x}{1-x}$, puis $y = \ln e^y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. Du reste, la fonction $x \mapsto \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ est définie si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$, c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$. La bijection réciproque g de f est de ce fait donnée par

$$g(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

3.

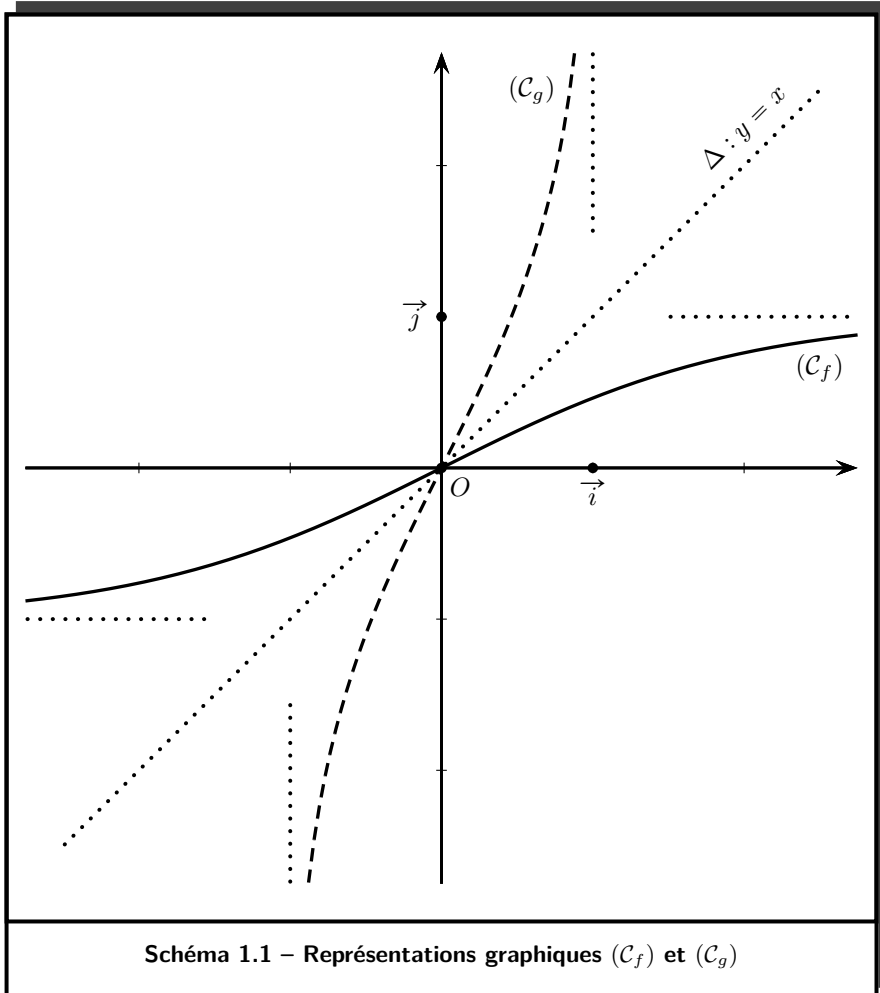
La courbe (C_f) admet exactement deux branches infinies : l'une en $-\infty$ et l'autre en $+\infty$. Précisément, les droites d'équations respectives

$$y = -1 \quad \text{et} \quad y = 1$$

sont asymptotes horizontales à (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$, car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Au demeurant, (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$, puisque g est la bijection réciproque de f . Les courbes (C_f) et (C_g) sont représentées sur le schéma 1.1 ci-dessous à l'échelle $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$. La première, (C_f) , est dessinée d'un trait continue, tandis que la seconde, (C_g) , est tracée d'un trait interrompu.



4.

Soit la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) dx$$

pour tout entier naturel n strictement positif.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$. Nous posons

$$u(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

Alors, $v'(x) = 1$ et

$$u'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Du reste,

$$0 \leq \frac{n-1}{n} < 1 \quad \text{et} \quad U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} u(x)v'(x) dx.$$

Eu égard à la règle d'intégration par parties, il en résulte que

$$\begin{aligned} U_n &= \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{n-1}{n}} - \int_0^{\frac{n-1}{n}} u'(x)v(x) dx \\ &= \left[x(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \right]_0^{\frac{n-1}{n}} - \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{2x}{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{n} \left(\ln \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \right) + \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx \\ &= \frac{n-1}{n} \left(\ln \left(\frac{2n-1}{n} \right) - \ln \left(\frac{1}{n} \right) \right) + \left[\ln |x^2-1| \right]_0^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{n-1}{n} \left(\ln \left(\frac{2n-1}{n} \right) + \ln n \right) + \ln \left| \frac{(n-1)^2}{n^2} - 1 \right| \\ &= \frac{n-1}{n} \ln \left(\frac{2n-1}{n} \right) + \frac{n-1}{n} \ln n + \ln \left| \frac{-2n+1}{n^2} \right| \\ &= \frac{n-1}{n} \ln \left(\frac{2n-1}{n} \right) + \frac{n-1}{n} \ln n + \ln \left(\frac{2n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{n-1}{n} \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n} \ln n + \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\&= \frac{n-1}{n} \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \frac{n-1}{n} \ln n + \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \ln n \\&= \left(\frac{n-1}{n} + 1\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n} - 1\right) \ln n \\&= \left(\frac{n-1+n}{n}\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1-n}{n}\right) \ln n.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}.$$

(b) Soit $p = \frac{2n-1}{n}$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p = 2$. Du reste,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

De ce fait,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2n-1}{n}\right) \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n} \right) \\&= \lim_{p \rightarrow 2} p \ln p - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}.\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \ln 2 - 0 = 2 \ln 2.$$

Cette limite correspond à l'aire de la section du plan délimitée par la courbe (C_g) , l'axe de abscisses et la droite d'équation $x = 1$ (voir la partie grisée du schéma 1.2 à la page 18). En effet,

$$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \int_0^{\frac{n-1}{n}} g(x) dx$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \int_0^1 g(x) dx,$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Partie B.

5.

Soit σ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. De plus, nous posons $\varphi = \tau \circ \sigma$.

(a) L'application est un anti-déplacement, en tant que composée d'un déplacement (la translation τ) par un anti-déplacement (la symétrie orthogonale σ). Il s'agit précisément d'une symétrie glissée.

(b) La courbe (C_g) est notoirement l'image de (C_f) par σ . Par conséquent, l'image de (C_f) par φ est l'image de (C_g) par la translation τ de vecteur \overrightarrow{OA} . Autrement dit,

$$\varphi(C_f) = \tau \circ \sigma(C_f) = \tau(\sigma(C_f)) = \tau(C_g)$$

(voir le schéma 1.2 ci-dessous).

6.

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$, puis la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$, ainsi que σ' la symétrie orthogonale d'axe (Δ') .

(a) Pour vérifier que le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthogonal, il suffit d'établir que la famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est libre et que les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonaux. Ces derniers sont exprimés dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) . Il suffit donc d'utiliser le déterminant et le produit scalaire. En l'espèce la famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est libre, car

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0;$$

tandis que les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonaux, puisque

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

(b) La famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) étant une base du plan vectoriel, il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, c'est-à-dire

$$3\vec{i} + \vec{j} = \alpha(\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} - \vec{j}) = (\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha - \beta)\vec{j}.$$

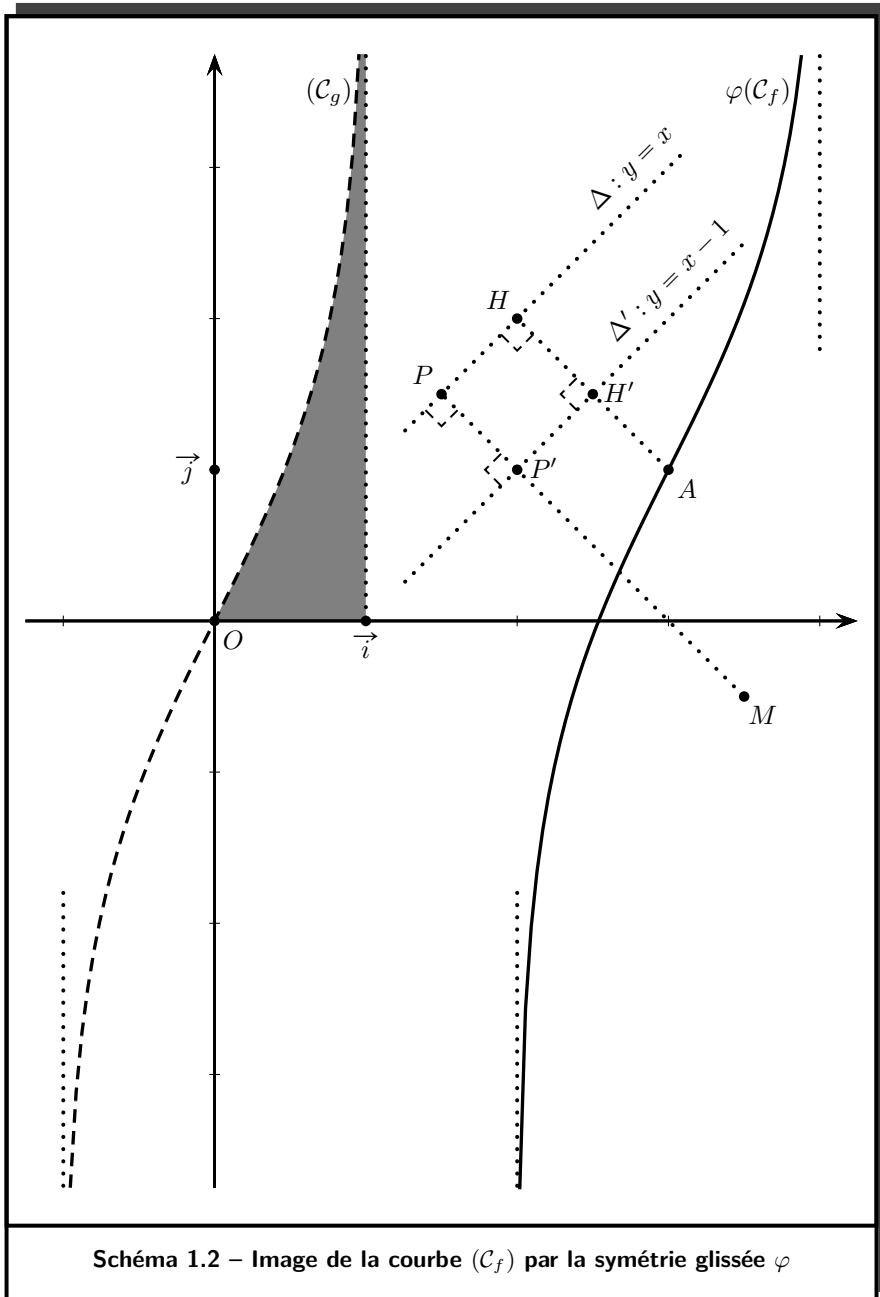


Schéma 1.2 – Image de la courbe (C_f) par la symétrie glissée φ

Il en résulte que le couple (α, β) est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3 - 1}{-1 - 1} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 3}{-1 - 1} = 1.$$

De ce fait, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$, où $\overrightarrow{V}_1 = 2\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{e}_2$.

(c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) d'équation $y = x$ et sur (Δ') d'équation $y = x - 1$. Alors, il existe des réels h et h' tels que

$$\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{i} + h\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH'} = h'\overrightarrow{i} + (h' - 1)\overrightarrow{j}.$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (h - 3)\overrightarrow{i} + (h - 1)\overrightarrow{j}$$

et

$$\overrightarrow{AH'} = \overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA} = (h' - 3)\overrightarrow{i} + (h' - 2)\overrightarrow{j}.$$

Au demeurant, les droites (Δ) et (Δ') ont $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ pour vecteur directeur. Puisque

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{e}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{e}_1 = 0,$$

il en résulte que

$$0 = h - 3 + h - 1 = 2h - 4 \quad \text{et} \quad 0 = h' - 3 + h' - 2 = 2h' - 5,$$

puis $h = 2$ et $h' = \frac{5}{2}$. D'où

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.$$

De ce fait,

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AH'} - \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{i} - \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{V}_2.$$

En d'autres termes, $\vec{V}_2 = 2\overrightarrow{HH'}$.

Posons maintenant $\gamma = \sigma' \circ \sigma$ et considérons un point M , son image M_1 par σ , ainsi que M' l'image de M_1 par σ' . Par conséquent,

$$\gamma(M) = (\sigma' \circ \sigma)(M) = \sigma'(\sigma(M)) = \sigma'(M_1) = M'.$$

Par ailleurs, soient P et P' les projetés orthogonaux de M sur les droites (Δ) et (Δ') , respectivement (voir le schéma 1.2 à la page 18). Alors, P et P' sont les milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$. Donc,

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{PM_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1P'}.$$

Ceci entraîne

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{PM_1} + 2\overrightarrow{M_1P'} = 2(\overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{M_1P'}) = 2\overrightarrow{PP'}.$$

Cependant,

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

De ce fait, $\overrightarrow{MM'} = \vec{e}_2$. Ainsi, γ est la translation de vecteur \vec{e}_2 . Par ailleurs,

$$\overrightarrow{OA} - \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA} - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 = 2\vec{e}_1.$$

À présent, notons τ_1 la translation de vecteur $2\vec{e}_1$. Alors, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma = \tau_1 \circ \gamma$ est la composition des translations des vecteurs respectifs $2\vec{e}_1$ et \vec{e}_2 . Par suite, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$ est la translation de vecteur

$$2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA} - \vec{e}_2 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA}.$$

Autrement dit, $\tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma = \tau$, où τ_1 est la translation de vecteur $2\vec{e}_1$.

(d) De l'égalité $\tau = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma$, nous déduisons

$$\varphi = \tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \sigma' \circ \sigma \circ \sigma.$$

Or toute symétrie orthogonale est involutive. Ceci signifie que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité du plan. Par conséquent, $\varphi = \tau_1 \circ \sigma'$.

Partie C.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit (\mathcal{D}) la droite d'équation $x = 2$. Nous considérons par ailleurs les points M et F du plan ayant pour affixes respectives z et $1 - i$.

1.

Il existe de réels x et y tels que $z = x + iy$. Du reste, si z' désigne l'affixe du projeté orthogonal M' du point M sur la droite (\mathcal{D}) . Alors, $z' = 2 + iy$. Or, la distance $d(M, (\mathcal{D}))$ du point M à la droite (\mathcal{D}) est déterminée par

$$d(M, (\mathcal{D})) = MM' = |z - z'| = |x + iy - 2 - iy| = |x - 2|.$$

Cependant, $x = \Re(z)$, où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z . Par conséquent,

$$d(M, (\mathcal{D})) = |\Re(z) - 2|.$$

2.

On suppose que $z + \bar{z} - 4 \neq 0$. Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation suivante :

$$|z - 1 + i| - m \cdot |\bar{z} + z - 4| = 0. \quad (\mathbf{E}_m)$$

(a) Notons que $|z - 1 + i| = FM$ et

$$|\bar{z} + z - 4| = |2\Re(z) - 4| = 2|\Re(z) - 2| = 2 \cdot d(M, (\mathcal{D})).$$

De ce fait, l'équation (\mathbf{E}_m) est équivalent à

$$FM - 2m \cdot d(M, (\mathcal{D})) = 0.$$

Ainsi, un point M appartient à (Γ_m) si et seulement si

$$\frac{FM}{d(M, (\mathcal{D}))} = 2m.$$

L'ensemble (Γ_m) est donc une conique. Précisément, (Γ_m) est une ellipse si $0 < m < \frac{1}{2}$, puis (Γ_m) est une parabole si $m = \frac{1}{2}$, tandis que (Γ_m) est une hyperbole si $m > \frac{1}{2}$.