MATHÉMATIQUES SECONDE SCIENTIFIQUE

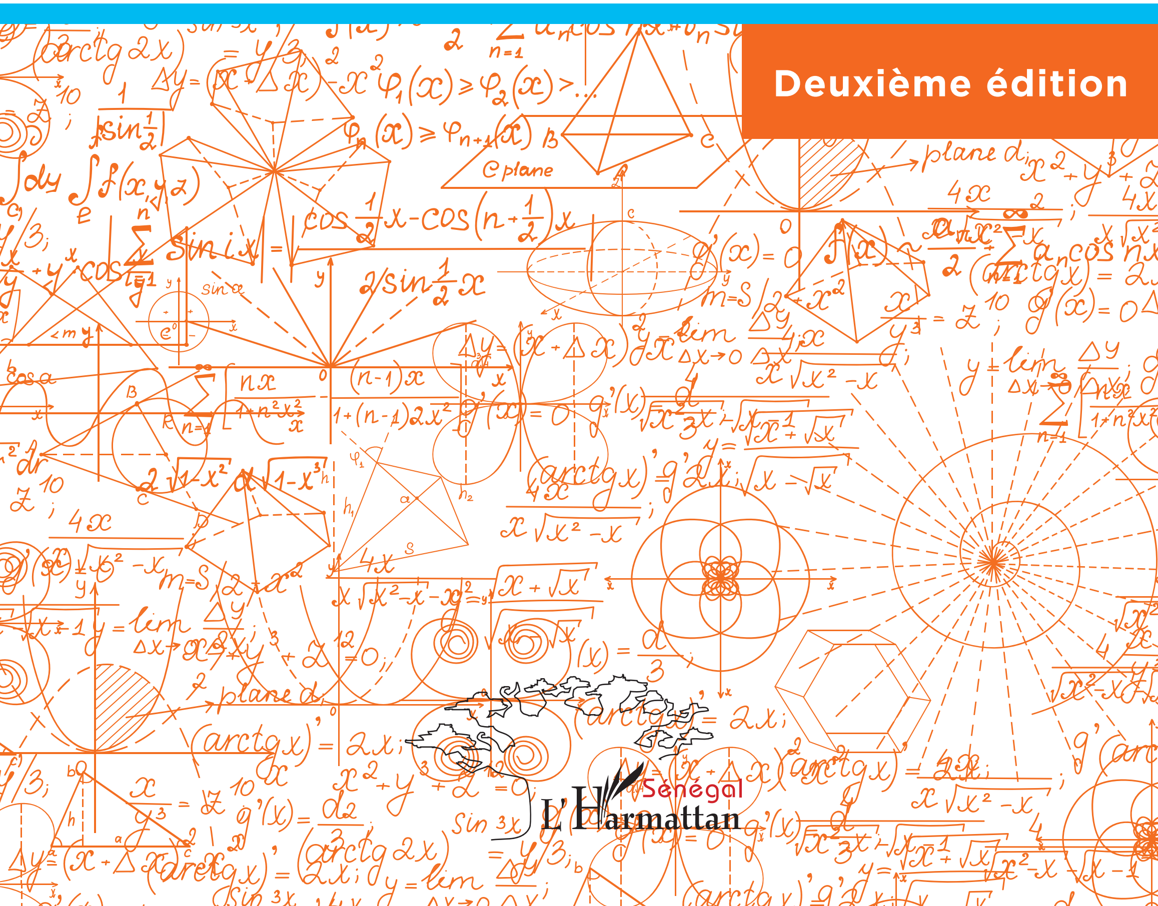
PAPA
OUSMANE
THIAO

XY MATHS

CAP VERS LA RÉUSSITE

2nde S

Deuxième édition



Sénégal
L'Harmattan

XY-MATHS
CAP VERS LA RÉUSSITE

Mathématiques seconde scientifique

Pape Ousmane Thiao

XY-MATHS
CAP VERS LA RÉUSSITE

Mathématiques seconde scientifique

L'Harmattan Sénégal

10 VDN, Sicap Amitié 3, Lotissement Cité Police, DAKAR

http://www.harmattansenegal.com
senharmattan@gmail.com
senlibrairie@gmail.com

ISBN : 978-2-343-12743-9
EAN : 9782343127439

PRÉFACE

1. Parcours de l'auteur : Orienté en 2003 en classe de seconde scientifique, il fut un excellent élève et obtient le baccalauréat en 2006. Il fait sa carrière universitaire à l'Université Alioune Diop de Bambey en Maths-Physiques-Chimies-Informatiques où il obtient une licence ; il s'inscrit ensuite en formation professionnelle à l'École Supérieure Polytechnique de Dakar et obtient le Master II en Management de la Qualité de la Santé et Sécurité au travail et de l'Environnement.

Après cet excellent parcours universitaire il s'engage dans l'enseignement en 2012 comme professeur vacataire de mathématiques avec premier poste le lycée de Bambey, sorte de retour au royaume d'enfance avec certainement beaucoup d'ambition.

2. qualité professionnelles et humaines : Sa compétence, sa disponibilité et son sérieux dans le travail lui ont valu la grande estime de son administration et de ses élèves.

3. Sur le plan pédagogique : Par son humilité et son esprit d'ouverture, il a bénéficié de la franche collaboration des collègues de mathématiques au sein de leur cellule ce qui fait que :

- Le contenu est conforme au programme de seconde scientifique en vigueur au Sénégal dont il s'efforce d'atteindre les objectifs fondamentaux tant sur le plan méthodologique que sur le plan des connaissances.

- Les types d'exercices proposés sont intéressants et variés

- Ce document, « XY-MATHS », sera très utile non seulement aux élèves mais également aux professeurs.

4. Perspective : Brillant élève, brillant étudiant, l'honnêteté intellectuelle la curiosité et le goût de la recherche qui l'anime feront de lui un brillant professeur de mathématiques.

Lycée Bambey le 22 /04 /2016
Le proviseur Ndongo SENE

Ministère de l'Éducation Nationale
Le Proviseur
Lycée de Bambey

NDONGO SENE

AVANT-PROPOS

On s’accorde désormais sur le fait que l’élève doit être au centre du processus éducatif, mais il ne faut pas croire qu’il suffit de présenter les mathématiques, ou des situations supposées contenir des mathématiques pour susciter l’apprentissage. Une démarche didactique volontariste est nécessaire pour guider le plus grand nombre sur le chemin de la réussite.

Sans rien refuser qui soit de nature à susciter et renforcer l’intérêt de l’élève, nous pensons qu’un apprentissage solide des mathématiques nécessite une construction intérieure des savoirs, qu’on ne peut pas obtenir sans effort, ni patience : *« il faut une longue et calme fréquentation des concepts pour réussir leur appropriation. » (*F. Reynes). Une première étape dans ce processus d’appropriation doit être une étape de construction du sens, qui nécessite d’abord une maitrise du langage et des techniques de base, mais aussi un développement et une canalisation de l’activité mentale de l’élève. Le monde Mathématique de chaque élève s’élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calcul, d’argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Pleinement conscients de ce que de nombreux élèves parviennent désormais en classe de seconde Scientifique sans être suffisamment armés pour mener à bien ce processus d’apprentissage, nous sommes néanmoins convaincus que la diminution des exigences ne saurait être une solution pour l’avenir.

Pour atteindre ces exigences, nous avons construit chacun des chapitres selon une structure simple.

- **Un cours** clair et détaillé où l’essentiel est donné (définition, remarques, théorèmes, propriétés)
- A la fin de chaque sous-titre du cours ; **des exercices d’applications** résolus pour appliquer le cours.
- **Une série d’exercices** est proposée pour chaque cours pour mettre en application les méthodes étudiées.
- **Exercices corrigés** sur chacune des séries : exercices - types qu’il faut savoir résoudre pour aller plus loin**.**

⟐ **Des Devoirs à la maison :** des exercices classiques et de recherches permettant d'aller à la frontière du programme. Ils mettent les élèves dans une situation de chercheur et de rédacteur de solutions.

Nous espérons que cet ouvrage, aidera de manière efficace les élèves et les professeurs dans leurs tâches quotidiennes. Nous remercions par avance les utilisateurs de nous faire part de leurs remarques, critiques et suggestions dont nous tiendrons le plus grand compte lors de prochaines développements de ce manuel **XY-MATHS.**

REMERCIEMENT

Je remercie chaleureusement tous les collègues de la cellule d'animation pédagogique de mathématiques du lycée de Bambey qui ont relu, posé leurs questions, soulevé des remarques constructives. Ils ont permis l'enrichissement et l'amélioration de ce manuel ; nommément :

M. Issa SECK professeur de mathématiques ; coordonnateur de la cellule d'animation pédagogique de mathématiques du lycée de Bambey

M. Abdou Karime DIENE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Ibrahima FALL ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Assane NDIAYE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Ibrahima MBAYE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Djibril DIAGNE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

Maimouna KA Mme SY ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

Mme. Ndella Ndiaye SENGHOR ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey,

Un immense merci à **M. Ndongo SENE** proviseur du lycée de Bambey et tous les membres de son équipe administrative de leur soutien indéfectible accordé, à **M. IBRAHIMA SYLLA** professeur de français au lycée de Bambey et à **M. LATYR FAYE** professeur de mathématiques au collège d'enseignement moyen Ousmane Soce DIOP de Dieuppeul pour la relecture pertinente, constructive et du recadrage incontournable apportés à ce présent manuel .

Alphabet grec pour l'écriture scientifique			
lettre grecque majuscule	lettre grecque minuscule		Lettre latine équivalente
Α	α	alpha	a
Β	β	beta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	epsilon	e
Ζ	ζ	zêta	z
Η	η	êta	h
Θ	θ	thêta	q
Ι	ι	iota	i
Κ	κ	kappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	mu	m
Ν	ν	nu	n
Χ	χ	xi ou ksi	c
Ο	ο	omicron	o
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	rhô	r
Σ	σ	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	upsilon	u
Φ	φ	phi	f
Ξ	ξ	chi ou khi	x
Ψ	ψ	psi	y
Ω	ω	omega	w

HISTORIQUE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES

- **Plus et moins : (+ ; −) WIDMANN (Allemagne), 1489 dans un** traité d'arithmétique commerciale.
- **Multiplication** : (× **et** .) William OUGHTRED (1574-1660, Angleterre), en 1631 pour × et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716, Allemagne), en 1698 pour le point (.).
- **Exposants :** Nicolas CHUQUET (15ème siècle), (mais généralisé bien après)
- **Plus-ou-moins** (±) a été employé par William Oughtred (1574-1660) dans Clavis Mathematicae, édité en 1631.
- **Le symbole de produit** (∏) a été introduit par René Descartes, selon Gullberg mais Cajori indique que ce symbole a été présenté par Gauss en 1812.
- **Racine carrée** ($\sqrt{\ }$) par Christophe RUDOLFF (Allemagne), en 1525.
- **Addition ∑** Le symbole d'addition (∑) a été employé la première fois par Leonhard Euler (1707-1783) en 1755 :
- **× , Pour le produit de vecteurs** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson.
- **(.) , Le point pour le produit scalaire** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson.
- **utilisation des lettres.** Maurolico, dit Francesco de Messina (début 16e) et François Viète (1540-1603, France) en sont les principaux acteurs.
- Albert GIRARD (1595-1632) utilise les notations **"sin, cos et tan"** en 1626, dans Tables de sinus, tangentes et sécantes. Mais c'est l'Allemand REGIOMONTANUS (15ème siècle), qui est le créateur du mot sinus dans ses travaux sur la trigonométrie (De Triangulis omnimodus en 1464, publié en 1533
- **Les parenthèses (.)** Raphaël BOMBELLI (Bologne, 1522-1572)
- **Égalité (=).** Robert RECORDE (1510-1558, Angleterre), en 1557.

❖ **< , > inférieur stricte, supérieur stricte.** Les symboles < et > apparaissent dans Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas de Thomas Harriot (1560-1621), publié de façon posthume en 1631 :

"Signum majoritatis ut a > b significet a majorem quam b" and "Signum minoritatis ut a < b significet a minorem quam b."

❖ **≤ ≥ , inférieur ou égal, supérieur ou égal.**

≦ ≧ **Pierre BOUGUER** (1698 -1758) utilise ces symboles en 1734.

En 1670, John WALLIS utilise des symboles similaires avec une seule barre horizontale. Le symbole actuel est sans doute le fruit d'une évolution typographique plus moderne.

❖ **≠, différent de.** EULER (1707 - 1783) utilise une graphie proche de celle usuelle (barre verticale pour EULER).

❖ **≈ presque égal.** Ce symbole a été employé en 1875 par Anton Steinhauser dans der Mathematik de Lehrbuch,« Algèbre ». Le même symbole a été employé en 1832 par Wolfgang Bolyai pour signifier l'égalité absolue.

❖ **symboles intersection et union : ∩ et ∪ .** Les symboles ∩ and ∪ sont utilisés pour la première fois par le mathématicien allemand GRASSMANN Hermann (1809-1877) dans Die Ausdehnungslehre von (1844) mais il les utilise comme symbole d'opération, pas nécessairement pour désigner l'union et l'intersection. Puis c'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) qui les utilise à cet usage en 1888 dans Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ([Cajo] page 298).

❖ **symbole "il existe" : ∃ C'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe** (1858-1932) qui utilise le symbole ∃ dans Formulaire de mathematiqués, en 1897.

❖ **symbole "appartient à" : ∈. Le mathématicien italien PEANO Giuseppe** (1858-1932) utilise le symbole ε (epsilon) dans ses Arithmetices prinicipia nova methodo exposita, en 1889 et dans Formulaire de mathematiqués, en 1897, pour désigner l'appartenance à un ensemble. Cela viendrait en fait de la première lettre du mot grec qui signifie est. Le symbole ∈ pour désigner l'appartenance apparaitrait dans le traité du mathématicien anglais RUSSELL Bertrand Arthur William (1872-1970), Principles of Mathematics en 1903.

❖ **Histoire du symbole "pour tout ou quelque soit" : ∀.** CAJORI, insiste sur le fait que l'italien PEANO Giuseppe (1858-1932) utilise le symbole ∀ (pour tout) avant l'anglais RUSSELL Bertrand Arthur William (1872-1970).

RUSSELL utilisait la notation (x) signifiant "pour tout x".

❖ **symbole "ensemble vide" : Ø.**

❖ Ce symbole pour désigner l'ensemble vide apparait dans les travaux du groupe BOURBAKI Éléments de mathématique Fasc.1: Les structures fondamentales de l'analyse; Liv.1: Théorie des ensembles. (Fascicule de résultants) (1939): "certaines propriétés... ne sont vraies pour aucun élément de E... la partie qu'elles définissent est appelée la partie vide de E, et désignée par la notation Ø."

Le mathématicien français André WEIL (1906-1998), membre du groupe BOURBAKI, se dit responsable de l'introduction de ce symbole.

<u>SOURCE</u> : Math93.com

Une Histoire des Mathématiques

SOMMAIRE

CALCUL DANS IR

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- ♦ Connaître la définition de valeur absolue.
- ♦ Savoir interpréter les solutions des équations et inéquations
- ♦ Savoir utiliser les radicaux dans des situations diverses

PLAN DU COURS

1. PUISSANCE DANS IR

1.1. ACTIVITÉ

1) avec une calculatrice calculer et compléter le tableau suivant

n	a	$\underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n\ fois}$	a^n
2	3	$3 \times 3 = \cdots$	$3^2 = \cdots$
5	4	$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = \cdots$	$4^5 = \cdots$
3	2.5	$2.5 \times 2.5 \times 2.5 = \cdots$	$2.5^3 = \cdots$
4	-5	$(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = \cdots$	$(-5)^4 = \cdots$

2) comparer les résultats trouvés de la colonne trois et de la colonne quatre puis conclure.

1.2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1.2.1. Définition

Soit a un nombre réel ($a \in IR$) et n un entier naturel non nul ($n \in IN^*$)
On appelle a exposant n noté a^n le réel défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n\ facteurs}$$

Exemples

$4,5^3 = 4,5 \times 4,5 \times 4,5$

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

1.2.2. Propriétés

Pour tous nombres réels a et b non nuls ($a \in IR^*$ et $b \in IR^*$) et pour tous nombres entiers relatifs m et p ($m, p \in Z$) on a les propriétés suivantes :

- $\mathbf{a^m \times a^p = a^{m+p}}$
- $\mathbf{(a^m)^p = a^{m \times p}}$
- $\mathbf{(a \times b)^m = a^m \times b^m}$
- $\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$
- $\mathbf{\frac{1}{a^m} = a^{-m}\ ;\ \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}}$

N.B : conventionnellement on a pour tout réel a :

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$

Remarque :

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ si n est pair} \\ -a^n \text{ si n est impair} \end{cases}$$

Exemples

$(-2)^4 = 2^4$

$(-5)^3 = -5^3$

Exercice d'application

Simplifier les expressions A et B suivantes

$A = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4}$ et $B = \frac{(-3)^4 \times (-27)^2}{(-8)^3 \times (2^4)^{-2}}$

Solution Succincte

$\mathbf{A = \frac{3^{20}}{2^{17}}}$; $\mathbf{B = -\frac{3^{10}}{2}}$

1.3. NOTATION SCIENTIFIQUE

DÉFINITION

La notation scientifique c'est l'écriture sous la forme du produit d'un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et d'une puissance de 10 d'exposant un entier relatif.

Exemples :

$41000 = 4{,}1 10^4$

$325{,}75\ 10^{-5} = 3{,}2575\ 10^{-2}$

$0.00537 = 5.37\ 10^{-3}$

1.4. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES IDENTITÉS REMARQUABLES

1.4.1. RAPPELS

- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
- $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$

1.4.2. COMPLÉMENTS

- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3$
- $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 - 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 - \mathbf{b}^3$
- $\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}^2 - \mathbf{ab} + \mathbf{b}^2)$
- $\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{b}^2)$

Exercice d'application

1) Développer et simplifier les expressions A et B suivantes

$A = (x+1)^3 - x(x-2)^2$ $B = (3x+1)^3 - (2x-1)^3$

2) Factoriser les expressions C et D suivantes :

$C = x^3 - 27 + 2(x-3)(x+1)$ $D = (x-2)^3 - 8(x+1)^3$

Solution Succincte

1) Développons et simplifions les expressions A et B

$A = 7x^2 - x + 1$ $B = 19x^2 + 39x^2 + 3x + 2$

2) Factorisons les expressions C et D

$C = (x-3)(x^2 + 5x + 11)$ $D = (-x-4)(7x^2 + 4)$

2. ORDRE ET OPÉRATIONS DANS IR

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux réels (a ; $b \in IR$) on a les propriétés suivantes :

- **Si $a \leq b$ pour tout réel c ; $a + c \leq b + c$**

Ajouter (ou soustraire) un nombre ne change pas l'ordre.

- **Si $a \leq b$ pour tout réel $c > 0$; $a \times c \leq b \times c$**

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif ne change pas l'ordre

- **Si $a \leq b$ pour tout réel $c < 0$; $a \times c \geq b \times c$**

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif change l'ordre.

- **Pour tous a , b , c et d des réels positifs**

Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$

- **Pour tous réels a et b positifs on a :**
- **$a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$**

Le passage au carré conserve l'ordre pour des nombres positifs

- **$a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$**

Le passage à la racine carré conserve l'ordre.

- **Pour tous réels a et b négatifs on a : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$**

Le passage au carré inverse l'ordre pour des nombres négatifs.

- **soient a et b deux réels non nul de même signe**

$a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Le passage à l'inverse change l'ordre pour des nombres strictement positifs ou négatifs

N.B : Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.

Si $a - b < 0$ alors $a < b$

Si $a - b = 0$ alors $a = b$

Si $a - b > 0$ alors $a > b$

Exercice d'application

1. Soit a, b et c trois réels ; Justifier que :

Si $a < b$ et si $b < c$ alors $a < c$

2. Soit a et b deux réels positifs Prouver que Si $a < b$ alors :

i. $a^2 < b^2$

ii. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. Soit a un réel positif démonter que :

Si $a > 1$ alors $a < a^2 < a^3$

Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$

Solution intégrale

1. Soit a, b et c trois réels ; Justifions que si $a < b$ et si $b < c$ alors $a < c$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$ et

$b < c$ alors $b - c < 0$ ainsi $(a - b) + (b - c) < 0 \Leftrightarrow$

$a - c < 0$ d'où $a < c$

2. Soit a et b deux réels positifs Prouvons que :

❖ Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$

et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ or a et b deux réels positifs ainsi

$\begin{cases} a - b < 0 \\ a + b > 0 \end{cases}$ donc

$(a - b)(a + b) < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0$ d'où $a^2 < b^2$

❖ Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$

et $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ or a et b deux réels positifs

$\begin{cases} a - b < 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0 \end{cases}$ donc $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ d'où $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

❖ Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

On a $a < b$ alors $b - a > 0$

et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$ or a et b deux réels positifs

$\begin{cases} b - a > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$ donc $\frac{b - a}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. Soit a un réel positif démontrons que :

❖ Si $a > 1$ alors $a < a^2 < a^3$

On a $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et $a - a^2 = a(1 - a)$ or

$\begin{cases} a > 0 \\ 1 - a < 0 \end{cases}$ donc $a(1 - a) < 0 \Leftrightarrow a - a^2 < 0$ d'où $a < a^2$ **1**

$a^2 - a^3 = a^2(1 - a)$ or

$\begin{cases} a^2 > 0 \\ 1 - a < 0 \end{cases}$ donc$a^2(1 - a) < 0 \Leftrightarrow a^2 - a^3 < 0$ d'où $a^2 < a^3$ **2**

De **1** et **2** on a : $a < a^2 < a^3$

❖ Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$

On a $a < 1$ alors $a - 1 < 0$ et $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$ or

$\begin{cases} a^2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$ donc $a^2(a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^3 - a^2 < 0$ d'où $a^3 < a^2$ **1**

et $a^2 - a = a(a - 1)$ or $\begin{cases} a > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$

donc $a(a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - a < 0$ d'où $a^2 < a$ **2**

De **1** et **2** on a : $a^3 < a^2 < a$

3. CALCUL AVEC LES RADICAUX

3.1. DÉFINITION

Soit a un nombre réel positif ou nul ($a \in IR_+$), on appelle racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, le réel positif ou nul dont le carré est égal à a.

On a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

3.2. PROPRIÉTÉS

- **soient a et b deux réels positifs**

On a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ **et** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ **avec b un réel non nul**

- **soient a un nombre réel positif et n un entier naturel**

On a : $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

- **soient a un nombre réel et b un réel positif.**

On a : $\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$

- **Pour tout nombre réel positif a et toute variable x on a :**

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$

Exercice d'application

On donne $A = \sqrt{\frac{3^5 \times 0{,}00001}{2 \times 15^3}}$ $B = \sqrt{\frac{10^2 \times 3^2}{16 \times 5^2}} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$

Ecrire A et B sans symbole du radical

Solution Succincte

Ecrivons A et B sans symbole du radical

$A = \frac{3}{2^3 \times 5^4}$ $B = \frac{3}{2} \div 2^2 \times 3^4$

4. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

4.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

4.1.1. Définition

Soit un nombre réel x ; on appelle valeur absolue de x le nombre réel positif noté | x | qui est égal au plus grand nombre entre x et − x

On a ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

$|-3| = -(-3) = 3$; $|7| = 7$

Exercice d'application

Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les réels et expressions suivants :

$|-5\,|$; $|2\,|$; $|1-\sqrt{2}|$; $\left|3-\sqrt{8}\right|$; $|\,2x\,-1|$; $|-3x\,-5|$

Solution Succincte

Ecrivons sans le symbole de la valeur absolue les réels et expressions

- $\boldsymbol{|-5\,|\,=5}$
- $|2\,|\,=\,2$
- $|1-\sqrt{2}|$

Etudions d'abord le signe de la quantité $1-\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} 1^2 \,=\, 1 \\ \left(\sqrt{2}\right)^2 \,=\, 2 \end{cases}$; $1 < 2 \Leftrightarrow 1^2 \,<\, \left(\sqrt{2}\right)^2$ d'où $1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 <\, 0$

Alors $1-\sqrt{2}\, < 0$ donc

$\left|1-\sqrt{2}\right| = \,-\left(1-\sqrt{2}\right) = \,-1+\sqrt{2}$

- $\left|3-\sqrt{8}\,\right|$

Etudions d'abord le signe de la quantité $3-\sqrt{8}$

On a $\begin{cases} 3^2 \,=\, 9 \\ \left(\sqrt{8}\right)^2 \,=\, 8 \end{cases}$; $9 > 8$

$\Leftrightarrow 3^2 \,>\, \left(\sqrt{8}\right)^2$ d'où $3^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2 > 0$ alors $3-\sqrt{8}\, > 0$ donc

$\boldsymbol{\left|3-\sqrt{8}\,\right| = \,3-\sqrt{8}}$

- $|\,2x\,-1|$

Elaborons le tableau de signe de l'expression $2x - 1$

Posons $2x - 1 =\, 0 \Leftrightarrow x \,=\, \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\vert 2x-1\vert$		$-2x+1$	0	$2x-1$	

Ainsi ; $|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 \text{ si } x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\\ 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\end{cases}$

- $|-3x - 5|$

Élaborons le tableau de signe de l'expression $-3x - 5$

Posons $-3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-3x - 5$		$+$	0	$-$	
$\lvert -3x - 5 \rvert$		$-3x - 5$	0	$3x + 5$	

Ainsi ; $|-3x - 5| = \begin{cases} -3x - 5 \text{ si } x \in \left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right[\\ 0 \quad \text{si} \quad x = -\frac{5}{3} \\ 3x + 5 \text{ si } x \in \left]-\frac{5}{3} ; +\infty\right[\end{cases}$

4.1.2. Propriétés

Pour tous réels a , b et n un entier naturel on a les propriétés suivantes :

- $|a| \geq 0$ **(La valeur absolue d'un réel est toujours positive ou nulle)**
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| = |-a|$
- $|a^2| = |a|^2 = a^2$
- $|a^n| = |a|^n$ **, avec a et n non simultanément nuls**
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ **ou** $a = -b$
- $|ab| = |a||b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ **(avec** $b \neq 0$**)**
- $|a - b| = |b - a|$
- **Pour tout réel a positif et x une variable on a :**

- $\mathbf{|\,x\,| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \text{ et } x \geq -a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a}$
- $\mathbf{|\,x\,| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a}$

Inégalités triangulaire

i. $\mathbf{|x+y| \leq |x| + |y|}$
ii. $\mathbf{|x-y| \leq |x| + |y|}$
iii. $\mathbf{|(\,|x| - |y|\,)| \leq |\,x - y\,|}$

Preuves Inégalités triangulaire

Prouvons les inégalités triangulaires

- $\mathbf{|x+y| \leq |x| + |y|}$

Méthode 1

$\forall$ x et y $\in$ IR on a :

$x \leq |\,x\,|$ et $-x \leq |\,x\,|$

$y \leq |\,y\,|$ et $-y \leq |\,y\,|$; effectuons somme membre en membre

$x + y \leq |x| + |y|$ et $-x - y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(x+y) \leq |x| + |y|$

Ainsi $x + y \leq |x| + |y|$ et $-(x+y) \leq |x| + |y|$

alors $|x+y| \leq |x| + |y|$

Méthode 2

Elevons au carré les expressions $|x+y|$ et $|x| + |y|$

$(|x+y|)^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy| + y^2$

Or $\forall$ $(x;y) \in IR^2$ $xy \leq |xy|$

$\Leftrightarrow 2xy \leq 2|xy|$ $x^2 + 2xy + y^2$
$\leq x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow (|x+y|)^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$ d'où $|x+y| \leq |x| + |y|$;

- $\mathbf{|x-y| \leq |x| + |y|}$

$\forall$ $(x;y) \in IR^2$ on a : $x \leq |\,x\,|$ et $-x \leq |\,x\,|$

$-y \leq |\,y\,|$ et $y \leq |\,y\,|$; effectuons la somme membre en membre

$x - y \leq |x| + |y|$ et $-x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(x-y) \leq |x| + |y|$

Ainsi $x - y \leq |x| + |y|$ et $-(x-y) \leq |x| + |y|$

Alors $|x-y| \leq |x| + |y|$

- $\mathbf{|\,|x| - |y|\,| \leq |\,x - y\,|}$

$\forall$ $(x;y) \in IR^2$ on a :

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \Leftrightarrow |y| - |x| \leq |y-x|$

$\Leftrightarrow -(|x| - |y|) \leq |y-x|$ Or $|y-x| = |x-y|$ ainsi

$-(|x| - |y|) \leq |x-y|$

on a ainsi $||x| - |y|| \leq |x-y|$

4.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATION COMPORTANT UNE VALEUR ABSOLUE

Exercice 1

Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $|x| = 2$ b) $|-2x+5| = 5$
c) $|x-3| = 2x-4$ d) $|2x+1| = -1$
e) $|3x-2| - 2|x-2| = 0$ f) $|3x-1| = -2x+1$

Solution Succincte

a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$; $S_{IR} = \{-2 ; 2\}$

b) $|-2x+5| = 5$; $S_{IR} = \{0 ; 5\}$

c) $|x-3| = 2x-4$

L'équation admet de solution si et seulement $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Pour tout $x \in [2; +\infty[$

$|x-3| = 2x-4 \Leftrightarrow$

$x-3 = 2x-4$ ou $x-3 = -2x+4 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{7}{3}$

1 n'appartient pas à $[2 ; +\infty[$; $S_{IR} = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

d) $|2x+1| = -1$ impossible $S_{IR} = \emptyset$

e) $|3x-2| - 2|x-2| = 0 \Leftrightarrow |3x-2| = 2|x-2|$

$\Leftrightarrow 3x-2 = 2(x-2)$ ou $3x-2 = -2(x-2)$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{6}{5}$ $S_{IR} = \left\{-2 ; \frac{6}{5}\right\}$

f) $|3x-4| = -2x+1$

L'équation admet de solution si et seulement $-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Pour tout $x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

$|3x-1| = -2x+1 \Leftrightarrow$

$3x-1 = -2x+1$ ou $3x-1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ ou $x = 0$

$\frac{2}{5}$ appartient à $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

0 appartient à $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ $S_{IR} = \left\{0 ; \frac{2}{5}\right\}$

Exercice 2

Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $|x| \leq 3$ b) $|6x - 1| > 2$

c) $|x - 3| < -5$

Solution Succincte

a) $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ $\mathbf{s_{IR} = [-3\,;3\,]}$

b) $|6x - 1| > 2 \Leftrightarrow 6x - 1 > 2$ ou $6x - 1 < -2$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ ou $x < \frac{-1}{6}$ $\mathbf{s_{IR} = \left]-\infty\,; \frac{-1}{6}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,; +\infty\right[}$

c) $|x - 3| < -5$ impossible $\mathbf{s_{IR} = \emptyset}$

IMPORTANT :

Pour résoudre une inéquation du type $|ax + b| < c$ on procède comme suite

- **Si $c \leq 0$, l'inéquation n'admet pas solution ; $s_{IR} = \emptyset$**
- **Si $c > 0$, on résout $-c < ax + b < c$**

Pour résoudre une inéquation du type $|ax + b| > c$ on procède comme suite

- **Si $c < 0$, l'inéquation est vérifiée pour tout x de IR ; $s_{IR} = IR$**
- **Si $c = 0$, l'inéquation est vérifiée pour tout x de IR sauf pour $x = \frac{-b}{a}$; $s_{IR} = IR / \left\{\frac{-b}{a}\right\}$**
- **Si $c > 0$, on résout les inéquations $ax + b < -c$ ou $ax + b > c$**

5. DISTANCE SUR IR

5.1. DROITE RÉELLE (DROITE NUMÉRIQUE)

Une droite réelle est une droite caractérisée par :

- **Une origine O d'abscisse 0**
- **Un sens positif indiqué par une flèche**
- **Une unité de mesure**