Philipp Werner

David Lewis und seine mereologische Interpretation der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre

Logos

Studien zur Logik, Sprachphilosophie und Metaphysik

Herausgegeben von/Edited by
Volker Halbach, Alexander Hieke, Hannes Leitgeb,
Holger Sturm

Band/Volume 24

Philipp Werner

David Lewis und seine mereologische Interpretation der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre

Eine Rekonstruktion

DE GRUYTER

ISBN 978-1-61451-778-8
e-ISBN (PDF) 978-1-61451-703-0
e-ISBN (EPUB) 978-1-61451-936-2
ISSN 2198-2201

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Printing: CPI books GmbH, Leck
♾ Printed on acid-free paper
Printed in Germany

www.degruyter.com

Meiner Frau und meinen Eltern

Vorwort

Dieses Buch ist eine geringfügig überarbeitete Fassung eines Textes, der im Sommersemester 2012 von der Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft an der Ludwig-Maximilians-Universität München als Dissertation angenommen wurde. Ich möchte mich ganz herzlich bei meinen Logiker-Freunden der ersten Stunde – Johannes Stern, Martin Fischer, Roland Poellinger – für die guten Gespräche, bei meinem Gutachter Godehard Link und besonders bei meinem Doktorvater Karl-Georg Niebergall für die erstklassige Betreuung sowie bei meinen Eltern für die in jeder Hinsicht großartige Unterstützung bedanken. Aus tiefstem Herzen möchte ich mich jedoch bei Dir, liebe Ursula, bedanken – bedanken und entschuldigen.

Inhalt

1 Einleitung

1.1 Hintergrund der Arbeit

1.1.1 Nominalismus, Mengen und Fusionen

Gemäß einer genauso gängigen wie vagen Charakterisierung besteht der oder eine Variante des Nominalismus in der Ablehnung abstrakter Gegenstände.

Mengen sind das Paradebeispiel abstrakter Gegenstände. Jede Katze ist konkret, die Menge der Katzen ist etwas abstraktes – und als solche für den Nominalisten nicht akzeptabel. Zudem kann der Nominalist mit Verweis auf Russell ein logisches Argument gegen den Mengenbegriff anführen: intuitiv sollte es zu jeder Eigenschaft F die Menge der F geben. Die übliche erststufige Formalisierung dieses Postulats ist inkonsistent.[1]

Der Fusionsbegriff ist dem Nominalist sympathischer, denn die Fusion konkreter Gegenstände ist konkret: die Fusion der Katzen ist der aus allen Katzen bestehende Gegenstand. Er ist zwar unzusammenhängend über die Welt verstreut, aber dennoch konkret. Der Fusionsbegriff wird auch nicht vom logischen Argument getroffen. Zu jeder nicht-leeren Eigenschaft F soll es die Fusion der F geben. Die übliche erststufige Formalisierung dieses Postulats ist konsistent.[2]

Die vage Frage, ob sich der Mengenbegriff sich durch den Fusionsbegriff ersetzen lässt, besitzt also nicht nur logisches, sondern auch philosophisches Interesse.

Eine erste Analyse lässt daran zweifeln, dass die Frage zu bejahen ist. Zwar teilt der Fusionsbegriff mit dem Mengenbegriff das Merkmal der Rechtseindeutigkeit: sind Eigenschaften umfangsgleich, so sind ihre Fusionen identisch. Aber der Fusionsbegriff ist im Gegensatz zum Mengenbegriff nicht linkseindeutig: *Hase* und *Hasenteil* sind nicht umfangsgleich, ihre Fusionen jedoch identisch.[3]

---

1 Weiter ist der Mengenbegriff unendlichkeitserzeugend. Aber daran braucht sich der Nominalist nicht unbedingt zu stören.

2 Der Fusionsbegriff ist zudem nicht unendlichkeitserzeugend.

3 So gesehen ist der Fusionsbegriff vielleicht kein echter Komprehensionsbegriff. Immerhin: wir können von dem Sachverhalt, dass die Fusion der Kinder von Adam identisch ist mit der Fusion der Kinder von Eva, darauf schließen, dass Adam und Eva dieselben Kinder haben. Denn Kinder sind Menschen und überlappende Menschen sind identisch. (Dagegen sind Hasen und Hasenteile in der Regel verschieden, auch wenn sie sich überlappen). Aber leider sind Fusionen von Menschen in der Regel keine Menschen.

1.1.2 Elementschaft und Überlappung

Im Hinblick auf eine Präzisierung der gestellten Frage ist es günstig, den Blick auf Theorien der Elementschaftsbeziehung ε und Theorien der Überlappungsbeziehung $\circ$ zu lenken. Denn

$$z \text{ ist die Menge der } F \qquad \text{bzw} \qquad z \text{ ist die Fusion der } F$$

wird gemeinhin durch

$$\forall u(u\,\varepsilon\, z \leftrightarrow Fu) \qquad \text{bzw} \qquad \forall u(u \circ z \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge u \circ x))$$

erklärt.[4] Welche Axiome sind mit ε bzw $\circ$ verbunden?

(i) Überlappung ist reflexiv und symmetrisch. Ferner enthalten überlappende Gegenstände einen gemeinsamen Teil. Zusammengenommen führt dies zum so genannten Überlappungsaxiom[5]

$$\forall xy(x \circ y \leftrightarrow \exists z \forall u(u \circ z \rightarrow u \circ x \wedge u \circ y))$$

(ii) Das Extensionalitätsaxiom bzw Individuierungsaxiom[6]

$$\forall u(u\,\varepsilon\, z \leftrightarrow u\,\varepsilon\, w) \rightarrow z = w \qquad \text{bzw} \qquad \forall u(u \circ z \leftrightarrow u \circ w) \rightarrow z = w$$

ist äquivalent mit der Forderung der Rechtseindeutigkeit des Mengen- bzw Fusionsbegriffs.

(iii) Die oben angeführten Existenzpostulate gehen über in das Komprehensionsschema

$$\exists z \forall u(u\,\varepsilon\, z \leftrightarrow Fu)$$

bzw das Fusionsschema

$$\exists x Fx \rightarrow \exists z \forall u(u \circ z \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge u \circ x))$$

Das Komprehensionsschema ist inkonsistent: es enthält die Russell-Antinomie

$$\exists z \forall u(u\,\varepsilon\, z \leftrightarrow \neg u\,\varepsilon\, u)$$

4 So ergibt sich unmittelbar die Linkseindeutigkeit des Mengenbegriffs. Ist z die Fusion der F und mit der Fusion z' der F' identisch, so sind F und F' umfangsgleich, sofern jedes F bzw F', was ein F' bzw F überlappt, mit diesem identisch und Überlappung reflexiv ist.

5 Das Überlappunsaxiom ist äquivalent zur Konjunktion der Sätze $\forall x x \circ x$, $\forall xy(x \circ y \rightarrow y \circ x)$ und $\forall xy(x \circ y \rightarrow \exists z \forall u(u \circ z \rightarrow u \circ x \wedge u \circ y))$.

6 Ich übernehme die Bezeichnung aus [46].

An konsistenten Instanzen enthält es den mit dem Leeremengeaxiom $\exists z \forall u \neg u \, \varepsilon \, z$ äquivalenten Satz

$$\exists z \forall u (u \, \varepsilon \, z \leftrightarrow u \neq u)$$

sowie das Adjunktmengeaxiom

$$\forall xy \exists z \forall u (u \, \varepsilon \, z \leftrightarrow u \, \varepsilon \, x \vee u = y)$$

Das Fusionsschema ist konsistent. Sowohl das Summenaxiom

$$\forall xy \exists z \forall u (u \circ z \leftrightarrow x \circ y \vee u \circ y)$$

als auch das Negataxiom

$$\forall x (\exists y \neg x \circ y \to \forall x \exists z \forall y (\forall u (u \circ y \to u \circ z) \leftrightarrow \neg x \circ y))$$

ist mit einer Instanz des Fusionsschemas äquivalent.

1.1.3 Die Theorien ASE und CI

Die Theorie ASE, eine Teiltheorie der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre mit Auswahlaxiom ZFC, ist durch Extensionalitätsaxiom, Leeremengeaxiom und Adjunktmengeaxiom axiomatisierbar. Bezüglich relativer Interpretierbarkeit[7] ist ASE erheblich schwächer als ZFC. Immerhin ist die Robinson-Arithmetik Q in ASE relativ interpretierbar.[8] Da Q wesentlich unentscheidbar ist, ist folglich jede konsistente Theorie, in der ASE relativ interpretierbar ist, unentscheidbar.

Goodmans Individuenkalkül aus [19] ist die durch Fusionsschema, Individuierungs- und Überlappungsaxiom axiomatisierte Theorie.[9] Die Theorie CI ist durch Summen-, Negat-, Individuierungs- und Überlappungsaxiom axiomatisierbar[10] (also eine Teiltheorie von Goodmans Individuenkalkül) und in BA, der Theorie der Booleschen Algebren, treu interpretierbar. Mit der Entscheidbarkeit von BA ergibt sich so die Entscheidbarkeit von CI.[11]

7 Siehe [48].

8 Siehe [47]. Umgekehrt ist ASE in Q relativ interpretierbar. Siehe [49].

9 Siehe auch [67]. Goodmans Individuenkalkül ist endlich axiomatisierbar. Siehe [52].

10 Siehe [32].

11 Siehe [52].

1.1.4 Ein Nichtinterpretierbarkeitsresultat

In [52] hat Niebergall gezeigt, dass ASE ist in keiner mit CI konsistenten $\mathcal{L}[\circ]$-Theorie relativ interpretierbar ist. Der Beweis verläuft so:

Angenommen ASE ist in einer mit CI konsistenten $\mathcal{L}[\circ]$-Theorie relativ interpretierbar. Da ASE endlich axiomatisierbar ist, enthält die betreffende Theorie einen Satz φ, so dass ASE in der durch φ axiomatisierten Theorie und erst recht in der Erweiterung von CI um φ relativ interpretierbar ist. Aber diese Erweiterung ist konsistent und somit (siehe oben) unentscheidbar. Als endliche Erweiterung von CI ist sie jedoch entscheidbar. Widerspruch.

1.1.5 Mereologien

Der polnische Logiker Lesniewski entwickelte von 1916 an einige Theorien des Fusionsbegriffs, die er später Mereologien nannte.[12] In [63], [65] und [22] wurden seine Theorien in vertraute Notation übertragen. Das mereologische Axiomensystem aus [22] besteht *cum grano salis* aus Überlappungsaxiom, Individuierungsaxiom und dem Fusionsaxiom zweiter Stufe

$$\forall X(\exists x Xx \rightarrow \exists z \forall u(u \circ z \leftrightarrow \exists x(Xx \wedge u \circ x)))$$

Es gibt also gute historische Gründe, Mereologien auf den Bereich der $\mathcal{L}[\circ]$- und $\mathcal{LL}[\circ]$-Theorien zu beschränken.[13] Aber nicht jede $\mathcal{L}[\circ]$- bzw $\mathcal{LL}[\circ]$-Theorie soll eine Mereologie erster bzw zweiter Stufe sein:

Konsistente Merologien erster Stufe sollten mit Goodmans Individuenkalkül (und erst recht mit CI) konsistent sein. Denn Fusionsschema, Individuierungs- und Überlappungsaxiom ergeben sich aus der Analyse des Fusions- und des Überlappungsbegriffs. Man wird keines dieser Axiome als synthetisch ansehen wollen. Mit dem Ergebnis von Niebergall ergibt sich so: nicht einmal ASE ist in einer konsistenten Mereologie erster Stufe relativ interpretierbar. Konsistente Mereologien erster Stufe sind also bezüglich relativer Interpretierbarkeit sehr schwach[14] und somit ist – Mereologien erster Stufe gelten als die nominalistischen Theori-

12 Einen Überblick gibt [57].

13 $\mathcal{L}[\circ]$ bzw $\mathcal{LL}[\circ]$ ist die zu $\circ$ gehörige Sprache erster bzw (monadischer) zweiter Stufe. Der Begriff der $\mathcal{L}[\circ]$-Theorie ist klar, der Begriff der $\mathcal{LL}[\circ]$-Theorie wird in dieser Arbeit mittels der allgemeinen Folgerungsbeziehung erklärt. Siehe hierzu Kapitel 2.

14 Man könnte auch sagen: der Fusionsbegriff ist für sich genommen sehr schwach. Inwiefern Theorien (etwa Zahlentheorien) durch Hinzufügung des Fusionsbegriffs verstärkt werden können, siehe [37].